



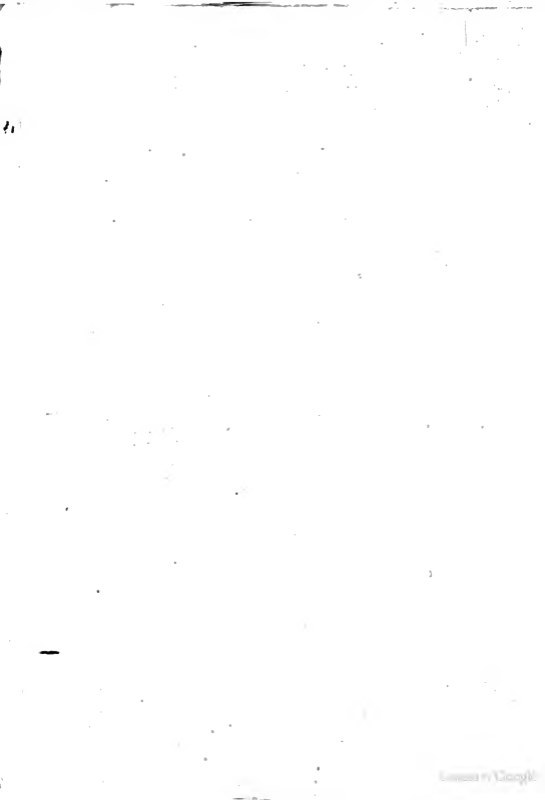
BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele II

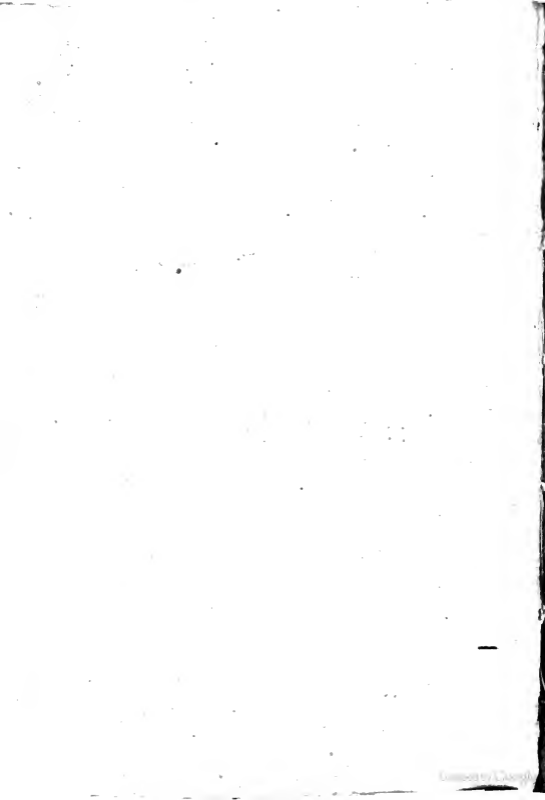
XXIV

F

28

NAPOLI





XXXIV 7 28. 30.

INSTITUTIONES
ANALYTICÆ.

00 07 38 11



INSTITUTIONES
ANALYTICÆ
A
VINCENTIO RICCATO
SOCIETATIS JESU
ET
HIERONYMO SALADINO
MONACHO CELESTINO
COLLECTÆ.
TOMUS PRIMUS.



BONONIÆ MDCCLXV.

EX TYPOGRAPHIA SANCTI THOME AQUINATIS.
SUPERIORUM AUCTORITATÆ.

*Hec qui spernit, idest has semitas sapientie, ei denuncio
non recte philosophandum.*

Boetius Arit. l. 1. c. 1.



P R Æ F A T I O .



Veres græci Geometræ certa quadam analytica methodo procul dubio utebantur, qua scilicet elegantissimis, multumque necessariis inventis scientiam ditârunt. Hæc tota erat: illud siquidem supponebant, quod quærebatur, & eo supposito per idoneas lineares præparationes consequentiam deducebant, donec aut ad postulatum, aut ad locum resolutum pervenirent. Loca resoluta ea vocabant *problemata*, quæ superiores Geometræ demonstrative resolverant. De hujusmodi methodo nitide quidem, ac breviter loquitur Pappus Alexandrinus in præfatione libri septimi collectionum mathematicarum, ubi singillatim eos omnes libros enumerat, quibus resoluta loca describebantur. Istud Analyseos genus, ut ita dicam, geometricæ, ac linearis plurimum affert utilitatis, ac sæpe sæpius elegantissimas constructiones producit. Idcirco in hisce nostris Institutionibus nonnulla identidem exempla proferte non omisimus, ut studiosi eam magni ducere, matureque ediscere assuescant.

Illud porro mihi nequaquam suadere possum, veteres Græcos eo Analyseos genere usos esse, quod nos *Analyfim* speciosam, aut *Algebram* nuncupamus, quæ litteris alphabeticis, aut aliis signis quantitates exprimens, data inter & incognita æquationem componit, atque istam idonee pettractans, ac resolvens, quæsi problematis obtinet solutionem. Licet enim haud parum studii in veteribus Græcis perlegendis contulerim, ac præsertim Pappo, qui mira eorum inventa omnia breviter complectitur, nullum prorsus hujusce methodi vestigium reperi.

De Algebra græcæ unus scripsit Diophantus Alexandrinus, quem ad

unum omnes post Christum narum floruisse conveniunt; et si de firmando anno magna disceptatio. Tempus, quo hic Analyſta vixerit, prorsus ignoratur, nec ut quædam epocha firmetur, satis probabiles conjecturæ afferuntur. Tredecim libros de Algebra dicitur conscripſiſſe: hi latebris diu abditi fuerunt; tandem ad Gulielmum Xilaudrum codex pervenit, qui sex priores libros complectebatur. Hos igitur e græco latine reddidit, & anno 1576. Basilæ typis mandavit. Tunc primum in lucem prodiit Diophantus. Mox anno 1621. eorundem librorum editio græco-latina facta est a Bacchetto de Mazieraco pluribus notis illustrata. Tertia demum accessit anno 1670. celeberrimi Petri Fermatii quamplurimis commentariis ditata.

De problematibus determinatis, quæ resolutis æquationibus dignoscantur, nihil omnino Diophantus: agit dumtaxat de eo problematum semideterninatorum genere, quæ respiciunt quadrata, aut cubos numerorum; quæ problemata, ut resolvantur, quantitates radicales de industria sunt evitandæ. De hisce brevem, & claram proposuimus ideam in libro primo, ubi de problematibus semideterninatis mentionem fecimus.

Antequam Diophanti opera in lucem prodirent, Arabum Algebra ad nos pervenit. F. Lucas Paccioli a Burgo Sancti Sepulcri Ordinis Franciscani primus de Algebra typis mandavit librum; qui ita inscriptus est. *Summa Arithmetica & Geometria, proportionumque & proportionalitatum Venetis*, ut asserit Vallisus, editus est anno 1494, iterumque prodiit anno 1523 in Tusculano pago apud Benaci oras posito. Auctor igitur libri exordio in primæ partis summario fatetur, plurima a Leonardo Pisano, Jordano, Blasio Parmensi, Joanne a Sacrobosco, & Prosdocimo Patavino desumpſiſſe. Deinde ad finem quasi distinctionis quinz, partis primæ, tres memorat consequentes Algebræ professores Venetis, nimirum Paullum a Pergola, Dominicum Bragadinum, Antonium Cornarium, quocum F. Lucas audivit Bragadinum, quem Paullus a Pergola edocuerat. Horum scripta vel perire, vel in Bibliothecis occultantur.

F. Lucas sese disserit de arte minori, quæ est Arithmetica, & de majori, quæ est Algebra, in qua resolutionem æquationum quadraticarum usque attingit. Huc Arabes quoque pervenerant: quare F. Lucas, atque Itali Analyſtæ, qui illum præcesserunt, et si simpliciores Algebræ usus, ac expeditiores reddidere; attamen nihil ultra ab illis productum est, quam quæ fuerit accepta. Quo vero nata exordio, quoque progressu aucta fuerit hæc facultas inter Arabes, scitu valde difficillimum. Cardanus afferens testimonium Leonardi Pisani, inventorem dicit Mahometem filium

filium Moysi. Huic accedit Mahometes alter Bagdadinus, Geber, & alii, quorum nomina vix cognita; neque satis compertum est, utrum de Algebra differuerint, an studio Astronomiæ duntaxat operam navaverint.

Nihil profus huic scientiæ addiderunt, qui ante editionem Artis magnæ Cardani scripsere, ut Michael Stifelius; immo multi ex illis, qui post scripsere, ut Robertus Ricordus Anglus, Petrus Nonnius professor Coninbricensis. Neque ultra quidquam fecit ipse Nicolaus Tartalea Brixiensis in Algebra edita ad calcem suorum Operum, quamvis hujusce scientiæ progressus, ut mox patebit, ei magna ex parte sit tribendus.

Anno 1545 in lucem prodiiit Ars Magna Hieronymi Cardani Mediolanensis, in qua, præter resolutionem æquationum quadratarum, resolutionem quoque cubicarum edocet. Cardanus ipse ingenue fateatur, cujusmodi hujusmodi inventum sit referendum, Scipioni scilicet Petro Bononiensi, qui primus æquationes cubicas resolvit. Hoc mirum inventum celavit, nec cuiquam communicavit, nisi Antonio Florido Veneto ejus auditori. Quam porro iste in litterarium certamen descendisset cum Nicolao Tartalea, huic nonnulla proposuit problemata, quæ resolutionem æquationum tertii gradus postulabant. Tartalea, ne primus illi concederet, adeo studuit, ut ad operam solutionem perveniret. Hujus rei certior fecit Cardanum; eique plurimis adductis precibus regulam aperuit, sed demonstrationem reticuit. Cardanus his auxiliis euncta invenit, atque perfecit, omniumque primus typis mandavit: hinc factum est, ut formula, in quam resolvitur æquatio tertii gradus, formula Cardanica nuncupetur.

In hoc ipso opere aliud continetur inventum sane memoriæ dignum, quod multum ad Algebrae progressum spectat, resolutio scilicet æquationis quarti gradus, sive quadrato-quadraticæ, quam, teste ipso Cardano, Ludovico de Ferrariis ejus auditori debemus. Hanc Raphael Bombellius addidit suæ Algebrae editæ anno 1574. In resolutione æquationum parum, aut nihil ad hæc usque tempora adjectum est, quam quod isti Algebrae Italici docuerunt, nihilque aliud repertum præter id, quod T. I. opus. 4. adinvenit Vincentius Riccatus declarans, quibus conditionibus affici debeant æquationes cujuscumque gradus, ut a formulis quadam Cardanicæ simili resolvantur.

Algebra tunc temporis litteris alphabeticis, aut aliis signis minime utebatur, nisi ut ignotas quantitates, quæ quærebantur, indicaret; satisque ei erat pro notis quantitatibus numeros adhibere; qui sane usus solutiones minus universales efficiebat; datisque mutatis ad calculum o-

mnem iterandum cogebat. Hinc solerter quidam Franciscus Vieta Gal-
 lus homo celeberrimus paullo ante annum 1600 usum denominandi quan-
 titates cognitās, æque atque incognitas induxit, quem Arithmetica[m] spē-
 ciosam appellavit. Nunc vero consuetudo obtinuit, ut primæ alphabeti
 litteræ notis dentur quantitatibus, postremæ ignotis. Licet hæc metho-
 dus plurius non ita utilis videri posset; attamen perbrevis temporis
 spatio novā quadam facie Algebra[m] donavit. Omnibus enim arithmeti-
 cis operationibus ad species accommodatis, facilius æquationes repetie-
 bantur, securius resolvebantur, ac universalissimæ omnino solutiones effi-
 ciebantur, quarum rerum pulchra sane exempla Vieta proponit.

Post Vietam in medium produci merentur Gulielmus Oughtredus
 Anglus, qui libellum *Clavis mathematica* inscriptum edidit anno 1631,
 Thomas Hariottus itidem Anglus, cujus Algebra eodem anno edita fuit
 a Waltero Warnero a morte auctoris, qui obiit anno 1631, & Rena-
 tus Cartesius Gallus, cujus Geometria, quæ citius Algebra dicenda esset,
 gallice scripta primum in lucem prodit anno 1637. Vix credas, quan-
 tum facilitatis, & incrementi Algebra perceperit. Hi scilicet factoribus
 simplicibus multiplicatis æquationum compositionem docuerunt; radices
 ad quamcumque æquationem spectantes ostenderunt; quin etiam radices
 ipsas in positivas & negativas; in commensurabiles & radicales; in reales
 & imaginarias scite dividerunt. Plurimæ deinceps veritates detectæ, plu-
 rimique usus fuerunt indicati, unde postea ditata, ac mirum in modum
 fuit Algebra illustrata.

Hactenus de Algebra pura, minimeque ad Geometriam relata. Quot
 veto utilitates ab hac relatione perceptæ fuerint, a nemine ignoratur, at-
 que ut nonnulla de hac re exempla in Vietæ operibus legas auctor sum.
 Attamen hæc pars nondum absoluta, ac penitus evoluta est, nisi a Ma-
 rino Getaldo Rsgufino in opere posthumo inscripto *De Compositione, &*
Resolutione Mathematica, edito Romæ anno 1630. In ea siquidem dilu-
 cidâ methodus ediscitur, qua æquationes primi, & secundi gradus, post-
 quam resolutæ fuerint, ad geometricam constructionem duci possunt,
 earumque radices reales determinari.

Renato Cartesio, quod Analysis curvis accommodaverit, laudi sa-
 ne maximæ vettendum est. Hic enim eorum proprietates ostendit, & æ-
 quationes secundo gradu superiores eorum interfectione constituit. Præ-
 ter inventi meritum, doctissimos suorum operum illustratores habuisse,
 fortunæ tribuendum est, qui suis doctrinis nitidissimum quoddam lumen
 attulerunt. Hi fuerunt Franciscus a Schooten, Johannes Huddenius,

Florimundus de Baune, Johannaes de Witt, qui Cartesium illustrando, de natura, & constructione æquationum, de earum limitibus, de lecis geometricis, de curvarum elementis, & de ratione geometricas demonstrationes concinnandi a calculo analytico differuerunt. His addatur recentior interpres, scilicet P. Rabuelius Soc. Jesu, qui de Cartesii Geometria copiosum sane, ac pereruditum commentarium edidit.

Longum esset, omnes hic recensere Analystas, qui post Cartesium hujusce facultatis usus faciliores reddidere, eamque plurimis inventis locupletârunt. Quidquid scitu dignius erit attingam, eosque, qui inventionis partem sibi vindicant, commendabo. Ac in primis etsi æquatio prædita fir radicibus rationalibus, in iis tamen repertiendis plurimum sæpe elaborandum est. Ad hoc plurimæ methodi ab Analystis prolatae. Theoria hæc satis abunde a Clairautio pertractata est, rebusque a Geometria ingeniosissimo edoctis nihil addi posse videtur. Quinimo artes exposuit, quibus factores rationales secundi gradus, qui formulam dividunt, dignoscantur.

Proposito a Taylora viro acutissimo quodam problemate omnibus Mathematicis non Anglis, Johannes Bernoullius, Jacobus Hermannus, Gabriel Manfredius, & Julius de Fagnanis methodum binomia plura, & trinomia resolvendi in factores reales secundi gradus docuerunt. Methodum hanc antea cognitam fuisse Ruggerio Cortesio, ejus opera posthuma satis indicant. Nam in his legitur elegantissimum theorema pertinens ad divisionem circumferentiæ in partes æquales, in quo inventio omnis innititur. Legendum puto, quod de hac re scripsit Leonardus Eulerus in Introductione ad Analysim infinite parvorum, quod opus satis commendari non potest. Accedit, quod quarti gradus æquationes omnes, etsi radicibus realibus careant, resolvuntur in factores reales secundi gradus, ut demonstrârunt Gabriel Manfredius, Leonardus Eulerus, & P. le Seur.

Idem Eulerus Analysi novum addidit calculum sinuum, & cosinum, quo nedum ipse, verum ceteri præne omnes Analystæ ejus exemplum sectantes proficue usi sunt, cum in rebus novis repertiendis, tum in jam repertis simplicitate majore, atque elegantia exornandis. Hujusmodi calculum auxit Vincentius Riccatus, atque utiliter eum ad sinus, & cosinus hyperbolicos transtulit, quoniam analogia, quæ inter utrosque intercedit, miram in modum hanc materiam illustrat. Quin imo idem Scrippror eadem methodo edocuit, quam ratione ad elegantem, atque geometricam constructionem ducantur illæ formulæ Cardanicæ similes, in quas multæ æquationes superiorum graduum resolvuntur, quæ antea ad A-

arithmetica dumtaxat, non ad Geometriam spectare videbantur. Seriebus plurimi Scriptores usi sunt, præsertim qui de probabilitate in aleis egerunt, ut Montmortius, Jacobus Bernoullius, & Moivreus. Attamen si series algebraicas, & geometricas demas, illæ poterant numerari, quas in summam redigere, facile cuique esset. Hujusmodi theoriam abunde pertractavit, penitusque evoluit Vincentius Riccatus in libello inscripto *De Seriebus recipientibus summam algebraicam, aut exponentialem Commentarius*. Si regulis ibi edoctis, atque ostensis innitaris, secure dignoscas, utrum series summam algebraicam, aut exponentialem habeat, an non; & si habeat, quamnam sit, facillime comperies. Hæc quoad Algebram puram.

Eadem prout applicata Geometriæ plurimum aucta est post Cætesium. Isaacus Nevvtonus enumerationem linearum tertii gradus in lucem prouit, licet nulla edita demonstratione, regulisque, quibus usus erat, minime attractis, quippe qui magis sibi ipsi admirationem comparare, quam alios edocere cupiebat. Verum ab acutioribus perceptum est, eam inquisitionem suam esse in parallelogrammate analytico, quod utilitatis causâ a Clarissimo de Gua in triangulum conversum est. Stirlingius Nevvtoniana principia adeo feliciter cœpit extricare, ut errores, qui vel ab ipso Nevvtono exciderant, sedulus emendaverit. Deinde doctissimus Nicolas in Reg. Ac. Paris. enumerationem linearum tertii gradus edidit, ea omnia principia recensens, quæ Nevvtonus sequi prouerat. Postea Clarissimus de Bragelogne enumerationem linearum quarti gradus demonstrandam suscepit, licet minime confecerit. Diu de punctis multiplicibus disserit, de ramis aurem infinitis parum, aut nihil. His accessit Clarissimus de Gua, qui in docto quodam libro usus Analyseos Cartesianæ ostendit ad detegendas proprietates linearum geometricarum cuiuscumque gradus. Hujusmodi Scriptor difficilem hanc theoriam quasi perfecisset, nisi, quum de seriebus iudicium proferrer solo primo termino attento, in aliquem paralogismum incidisset. Hæc porro inquisitio absoluta fuit a Gabriele Cramero in egregio admodum opere edito Genevæ anno 1750, quod inscribitur *Introductio ad Analysim linearum curvarum algebraicarum*.

Hunc librum præcesserat Euleri Introductio ad Analysim quantitatum infinitesimalium, cujus operis in parte secunda de iisdem rebus agitur, de quibus Cramerus, idest de ramis infinitis, eorumque generibus, de contractibus, de osculis, de punctis singularibus, solitariis, multiplicibus &c. In consequentiis deducendis Scriptores ambo conveniunt, licet diffi-

mili-

mitibus methodis ad eas perveniant. Ambos nos magni facimus, nec unum primas defestimus. In hisce Institutionibus Euleti methodo usi sumus, tum quia tyronum facilitati, tum quia brevitati nostræ consulere videbatur.

Huc ad nostra usque tempora pervenit Algebra Cartesiana. Plurimi semper eruditi viri e multis aliorum libris inventa colligere studuerunt, nimirum ut difficilem hanc scientiam ubique protraherent, utilesque methodos discantibus ad eam facilius percipiendam suppeditarent. Antiquiores quidem minime proferam veluti Herigonium, & P. de Chales, apud quos Algebra nunc sane imperfecta reperitur. De recentioribus tantum loquar, quos in duplicem classem dividendos puto. Primus illorum est, qui aut de omni, aut de aliqua Cartesiana Algebrae parte discurrunt: altera eorum, qui totius Algebrae cursum perfecerunt de calculo etiam infinitesimali pertractantes, uti & nos decrevimus, huic Volumini alterum addentes, in quo inventa ad calculum differentialem, & integralem spectantia colligantur.

Inter primos recensendus est Johannes Wallisius Anglus in suo de Algebra tractatu historico practico, qui in secundo tomo suorum Operum legitur; Eques Nevvtonus in Arithmetica universalis, quod opus sane est tanto Geometria dignissimum; Marchio Hospitalius, qui in suis sectionibus conicis de æquationibus secundo gradu superioribus agit; Petrus de Martino; P. Ruggerius Boscovichius, Clairautius, qui concinne quidem declarat, quibusnam gradibus suam Analytice scientiam promovere potuerint; Mac-laurius in quodam opere posthumo, cui ab interprete nonnulla Euleri capita addita sunt; Saundersonius Anglus, qui duobus longiusculis libris nonnisi ad resolutionem æquationum quattuor gradus pervenit. Hosce nos Auctores diligentissime evolvimus, & quidquid scire dignius erat contulimus in hoc primum Volumen, quod ad Juvenum utilitatem typis mandamus.

Perfectum absolutumque cursum primus edidit P. Reineaus Presbyter Oratorii in Gallia anno 1708, quem inscripsit *Analysis Demonstrata*. Laudi vetendum est huic operi, quod plurimos arte analytica imbuerit, virosque effecerit. Verum quemadmodum tunc temporis frequentiora doctorum hominum erant inventa, præsertim in calculo integrali, sic brevi illud opus imperfectum evasit. Hac de causa pleniorum tractatum scribendum judicavit Christianus Wolhus, quem inscripsit *Elementa Analytices mathematicæ tam finitorum, quam infinitorum*. Hunc in suo cursu edidit primum Halæ Magdeburgicæ anno 1713, atque in recentioribus

editionibus plurimum auxit. Hujusmodi Algebra ubique pervagabatur, quæ in hanc scientiam incumbere, eâ utebatur. Quoniam vero Wolffius non nisi prima elementa tradenda curavit, & post illum inventa plurima in Diariis, Academiis, aliisque peraratis libellis pererrabant, Cajetana Maria Agnesia necessitate atque utilitate Italæ Juventutis commota, difficillimum opus aggressa est, ut inventa omnia simul colligeret, ac dilucidâ methodo explanaret. Enimvero opus felicissime perfecit, ac duobus doctissima Volumina Institutionum analyticarum anno 1748 typis mandavit. Vix credas quanto plausu hujusmodi librum exceperit Italia, cujus operam in modum Analyticos studium percerevit. Longiore oratione id operis haud commendabo, quæ meas omnino laudes longe præstare existimem.

Quum porro hic liber difficillime inveniretur, nec quovis præterio a studiosis emi possit, quumque quindecim annorum spatio plurima, plurimique facienda inventa huc illuc dispersa reperiantur, novum quoddam opus, quod & facilius possit acquiri, & recentiorum inventa complecteretur, nitideque expleatur, cœpit exorari. Vincentius Riccarus Soc. Jesu diu efflagitabatur, ut hujusmodi opus omnibus sane utilissimum aggrederetur. Ipse vero quia magnis distinebatur occupationibus, quæ plurimum temporis illi furabatur, rum quia nonnulla opera perficere maxime diseupiebat, novum semper onus detrectavit. Quum vero in dies petitiones urgerent, tandem respondit, se solum id operis minime posse aggrederi; si quis tamen idoneus vir auxilium ferret, aliorum voluntari libentissime morem gesturum. Hieronymus Saladinus Congregationis Coelestinorum Monachus, qui sub ipso Riccaro Algebrae cursum jam pridem perfecerat quique in veterum Analyti peculiari quadam politer industria, ultro sese obtulit. Una igitur opus susceptum est: primum modo Volumen in lucem prodit; alterum verò omni studio, & alacritate typis evulgabitur.

Libri porro labor sic inter duos Scriptores erat dispersitus. Totius operis methodum Riccarus disposuit; conscribenda vero capita amicæ divisa sunt. Quæ magis subobscura, magisque erant difficilia, Riccarus magno studio clara, percipiente reddidit facilia; quin etiam antequam in lucem proferret, ea Adolescentibus quibusdam suis auditoribus addiscenda tradidit, atque experientiâ comperit, ea perquamfacillime percipi, ac penetrari. Cætera vero Saladinus collegit, explicavit, ac multum de suo addidit. Is scripta deferrebat amico socio, quibus perpenis, atque approbatis, illud tantum addebat, quod necessaria operis connexio postulabat. Scilicet, vero si lector identidem muratum cernat, plurimos hunc librum latine reddidisse sciat.

In

In hoc primo Volumine amicus Lector facillime cognoscat, nihil deesse ex iis, quæ in primo Agnesiæ volumine perleguntur, si nonnullæ methodi de ducendis tangentibus ad curvas demantur, quæ in altero Volumine reperientur. Multa vero, multumque necessaria in nostro Volumine inveniet, quæ in Agnesiæ desiderantur. Enimvero nihil dicam de nonnullis doctrinis breviori, ac faciliori methodo explanatis, nihil de serie problematum, quæ ad instruendum plurimum valent, tum ob diversimodas rationes, quibus solvuntur, tum ob recondita artificia, quæ adhibita fuerunt. Dicam tantum de additionibus, quas in hisce novis Institutionibus inveniet. Hæ sunt potiores: Methodus ad invenendam solutionem problematum semideterminatorum; Principia, & usus calculi sinuum, & cosinum tam circularium, quam hyperbolicorum; Demonstrationes proprietatum sectionum conicarum deductæ ex æquatione generali linearum secundi ordinis; Resolutio æquationum, quæ formulam Cardanicæ similem admittunt; Constructio geometrica harum formularum; Methodus ad dignoscendos in quavis æquatione factores racionales primi, & secundi gradus; Demonstratio utilissimi theorematis Ruggerii Cortesii; Solutio objectionis haud contemnendæ, qua methodum construendi æquationes per interfectionem curvarum oppugnavit Clarissimus Rollius; Methodus determinandi curvas, quibus convenit propticas dependens a duobus, vel pluribus punctis interfectionis; Methodus inveniendi terminos generales, & summæ serierum; Methodus determinandi infinitos curvarum ramos, eorumque genera; Methodus determinandi contactus, oscula, eorumque genera; puncta singularia, conjugata, multiplicia, inflexiones, cuspidis, quibus curvæ præditæ sunt. Hisce additionibus facile speramus, hæc nostras Institutiones perfectas fore, omnibusque inventis recentioribus exornatas. Non ignoramus, in hujusmodi libris non multum post temporis aliquid deesse: studio enim doctissimorum hominum sæpe fit, ut modo methodi faciliotes reddantur, modo augeantur, novæ modo theoriæ feliciter repetantur. De progressu tamen Analyseos adeo solliciti sumus, ut nostro huic Libro hujusmodi infortunium quamcivissime exoptemus.

INDEX CAPITUM

LIBER PRIMUS

De Algorithmo, & de Æquationibus primi, & secundi gradus.

Caput primum.	<i>Algorismus quantitatum integrarum.</i>	Pag. 1
Caput secundum.	<i>Quantitatum fractarum algorismus.</i>	10
Caput tertium.	<i>Quantitatum radicalium algorismus.</i>	17
Caput quartum.	<i>De resolutione æquationum primi gradus.</i>	28
Caput quintum.	<i>De resolutione æquationum secundi gradus.</i>	34
Caput sextum.	<i>De resolutione problematum arithmetico- rum, quæ determinata sunt.</i>	45
Caput septimum.	<i>De resolutione problematum semideterminatorum.</i>	55
Caput octavum.	<i>De constructione problematum geometricorum primi, & secundi gradus.</i>	66
	<i>Accedunt figurarum tabulæ duæ.</i>	
Caput nonum.	<i>Problematum aliquo- rum geometricorum primi, & secundi gradus solutio exhibetur.</i>	77
	<i>Adjungenda figurarum tabulæ quinque.</i>	
Caput Decimum.	<i>Principia calculi finium, & cofinium, ejusque usus.</i>	98
	<i>Caput sequuntur figurarum tabulæ duæ.</i>	

LIBER SECUNDUS

De Lineis seu Locis secundi gradus, & de Æquationibus tertii gradus, & quarti.

Caput primum.	<i>De variis linearum secundi gradus speciebus, ac peculiariter de Parabola.</i>	Pag. 117
	<i>Accedit figurarum tabulæ unica.</i>	
Caput secundum.	<i>De Ellipsi.</i>	125
	<i>Adjungenda est una tabulæ figurarum.</i>	
Caput tertium.	<i>De Hyperbola.</i>	136
	<i>Unicam habet figurarum tabulam.</i>	
Caput quartum.	<i>De generalibus quibusdam linearum secundi ordinis proprietatibus, quæ ex earum æquatione eruntur.</i>	152
	<i>Capitis hujus figuræ in una tabulæ continentur.</i>	
Caput quintum.	<i>De descriptione linearum secundi gradus.</i>	155
	<i>Accedunt figurarum tabulæ duæ.</i>	

Caput sextum. *De locis geometricis secundis gradus:*
Adjuncta est figurarum tabula una. 172

Caput septimum. *Resolvuntur nonnulla problemata secundis gradus indeterminata.* 172

Dua sunt figurarum tabula.

Caput octavum. *De transformatione aequationum tertii, & quarti gradus.* 187

Caput nonum. *De constructione aequationum tertii, & quarti gradus per intersectionem conicarum sectionum.* 191

Accedit figurarum tabula una.

Caput decimum. *Methodus capitis superioris construendi aequationes tertii, & quarti gradus per intersectionem conicarum sectionum omni difficultate liberatur.* 201

Sequitur una tabula figurarum.

Caput undecimum. *De resolutione analytica aequationum tertii, & quarti gradus.* 208

Adjuncta est una tabula figurarum.

Caput duodecimum. *Per sinus, & cosinus circulares, & hyperbolicos construuntur formulae, quae inventae sunt in resolutione aequationum tertii gradus.* 216

Sequitur unica tabula figurarum.

Caput decimum tertium. *Aliquot tertii, & quarti gradus problemata resolvuntur.* 229

Capitis figura tribus tabulis continentur.

LIBER TERTIUS

De locis tertii, & superiorum graduum, & de aequationibus excedentibus gradum quartum.

Caput primum. *De formatione aequationum.* Pag. 242
Duas tabulas analyticas caput exposcit.

Caput secundum. *De transformatione aequationum, & earumdem reductione per factores racionales.* 247

Caput tertium. *De resolutione aequationum per factores quoscumque.* 261
Adjuncta est unica figurarum tabula.

Caput quartum. *De serierum terminis, ac summis generali ut.* 287

Caput quintum. *In quo exhibetur formula generalis earum aequationum, quae radicem habent cardanica similem, ejusque ope formulae aliquot in irrationia realia resolvuntur, & Costeganum theorema demonstratur.* 308

Unicam figurarum tabulam caput exposcit.

Caput sextum. *De Parabolarum, & hyperbolarum familia, & de illis, quae paraboloides vocantur.* 314

Una sequitur tabula figurarum.

Caput septimum. *De curvis excedentibus gradum secundum, quae per instrumenta delineantur.* 318

Ad-

Adjungenda sunt tabula figurarum tres.

Caput octavum.	<i>De curvarum ramis in infinitum excurrentibus, & de asymptotis.</i>	349
	<i>Caput postulat unam tabulam figurarum.</i>	
Caput nonum.	<i>De contactibus, atque osculis.</i>	341
	<i>Adjungitur figurarum tabula unica.</i>	
Caput decimum.	<i>De figuris linearum curvarum in spatio finito.</i>	356
	<i>Duas figurarum tabulas caput requirit.</i>	
Caput undecimum.	<i>De resolutione, & constructione aequationum per intersectiones curvarum.</i>	362
	<i>Una sequitur tabula figurarum.</i>	
Caput duodecimum.	<i>Superiorum graduum problemata aliquot sum determinata, sum indeterminata solvuntur.</i>	368
	<i>Adjunguntur figurarum tabulae duae.</i>	
Caput decimum tertium.	<i>De inventionibus curvarum ex datis proprietatibus linearum, quae a pluribus sectionis punctis definiuntur.</i>	381
	<i>Indiget Caput figurarum tabula unica.</i>	

LIBER PRIMUS

DE ALGORITHMO, ET DE ÆQUATIONIBUS

PRIMI ET SECUNDI GRADUS.

CAPUT PRIMUM

Algorithmus Quantitatum Integrarum.

Quantitates integræ aliæ simplices vocantur, aliæ compositæ; Ex sunt quæ unico termino continentur, hæ quæ pluribus. Nos hic de simplicibus prius, de compositis deinde agemus.

1. Additio quantitatum simplicium hoc signo $+$ fit, quod apud Analyticos Scriptores idem significat ac *plus*; Quare si quantitatem a quantitati b addere velimus, hoc modo scribimus $b + a$, vel $a + b$, quod significat a plus b , vel, quod idem est, b plus a , quæ summa vocatur.

2. Si quantitates addendæ eadem littera exprimentur, veluti si quantitas a quantitati a addi debeat, scribere possumus $a + a$, sed melius, quia brevius scribimus $2a$; quod idem dictum existiment tirones, si quantitates a plures quam duæ sint, ad summam enim earum omnium habendam satis erit ipsi a numerum, præponere, qui, quot vicibus accipiat ipsa quantitas, ostendat. Hic porro numerus *Coefficiens* appellatur, cujus est in allato exemplo indicare, ita se habere 2 ad a , ut 2 ad unitatem; hinc eujusdemque quantitatis, quæ nullum habeat coefficientem expressum, coefficientis est unitas. Quod si quantitates, quæ addi debent, eadem littera exprimentur, & coefficientes habeant præpositos, tunc facta coefficientium summa juxta vulgaris arithmetice regulas, eam communi litteræ præponemus; ut si $2a$ addere velimus $3a$, erit summa $5a$.

3. Subtractio quantitatum simplicium fit hæc horizontali lineola $-$, quæ significat minus, præponiturque subtrahendæ quantitati. Si a velis a b subtrahere, scribe $b - a$, quod valet b minus a . Si quantitates eadem littera exprimentur, sufficit si coefficientis a coefficiente subtrahas, & si quid superest, communi litteræ præponas. Si ergo de $5a$ velis detrabere $3a$, quoniam de 5 subducto 3 remanet 2 , patet reliquum esse $2a$. Manifestum est, quod si subtrahenda quantitas minor illa fuerit, unde subtrahi debet, differentia erit positiva, hoc est *nihil* major, si æqualis, differentia erit nulla, hoc est *nihil* æqualis, si eandem major, differentia erit negativa, hoc est *nihil* minor. Nihilum autem vocari solet zero, & exprimitur hæc nota 0 .

4. Ut autem harum quantitatum, quæ negativæ appellantur, rectam sibi ideam comparent tirones, diligenter animadvertant, eas licet minores quam zero, non ideo habendas esse veluti absurdas, aut impossibiles, sunt enim veræ & reales æque, ac positivæ. Nam sicuti quantitatum positivarum est, veros, & reales supra zero excelsus, indicare, ita negativarum est a zero veros, & reales defectus exhibere. Igitur sive sit $0 + b$, sive $0 - b$, erit quantitas b in utroque casu realis. In eo positum est omne discrimen, quod quantitas b negativa in-

casu secundo intelligi debeat ferri in partes omnino ab iis averfas, in quas tendit in primo, facto inde initio, ubi quantitas æquatur zero: hinc si $0 \rightarrow b$ montis altitudinem quamdam indicet supra horizontem, $0 - b$ vallem indicaret tantundem infra ipsum depressam; ac si in primo casu b iter significaret Bononia Romam versus, in secundo æquale iter Bononia Mutinam versus ostenderet.

5. Ex his descendit negativarum quantitatum additionem signo fieri oportere; nam si signo $+$ uteremur, ipsæ e negativis transirent ad positivas; igitur si $-a$ addi debeat $-b$, scribendum erit $-a - b$, vel quod idem est $-b - a$; si sit addenda quantitas $-a$ quantitati $-a$ summa erit $-2a$ &c. Descendit secundo quantitatum negativarum subtractionem fieri debere signo $+$: si enim contrario signo uteremur, non subtractio, sed additio juxta superius dicta haberetur. Sit igitur subtrahenda quantitas $-a$ de $-b$, erit differentia $-b + a$; si quantitas eadem littera exprimitur, satis erit si subtrahantur coefficientes; ita si $-2a$ subtrahere debeas de $-5a$, reliquum erit $-3a$. Hic etiam animadvertere juverit, negativam fore differentiam, si cum subtrahis $-a$ de $-b$, a minor quam b fuerit, differentiam fore nullam, si $-a$ æquet $-b$; si vero $-a$ excedat $-b$, differentiam fore positivam, quod ad ea declaranda, que de quantitativibus negativis dicta sunt, plurimum valet.

6. Patet etiam quomodo positivis quantitativibus negativæ, aut negativis positivæ vel addi debeant, vel subtrahi, nempe scribendas esse aliam post aliam eodem ipso, quo prædictæ sunt signo, quum de additione est sermo; si vero de subtractione agatur, mutato subtrahendarum signo. Notandum hic, quantitatem quamlibet vel solam, vel ante alias positivam, quæ nullum habeat præpositum signum, eam positivo signo affectam esse intelligendam. Si quantitates, de quibus loquimur, eadem exprimentur littera, ad summam habendam satis erit subducere coefficientes, & reliquo signum illius apponere, quæ major est. Ergo summa $5a - 2a$ erit $3a$; summa vero $2a - 5a$ erit $-3a$; summa $2a - 2a$ erit zero. Ad habendam vero differentiam satis est addere coefficientes, & summam afficere eo signo, quo prædicta est quantitas, de qua fit subtractio: Ita si detrahas $-3a$ de $5a$, reliquum seu differentia erit $8a$; si detrahas $-2a$ de $2a$, erit differentia $4a$ &c. Contra si $5a$ detrahas de $-3a$, reliquetur $-8a$, si $2a$ ex $-2a$, reliquum erit $-4a$. Facillime hæc percipit is, qui ea teneat, quæ numero 4. exposuimus. Si enim quis interroget, quantum viator, qui hinc profectus Mutinam versus tria milliaria confecerit, distet ab eo, qui hinc pariter Romam versus ad quintum pervenerit lapidem, nonne statim respondeas, illum distare passuum octo millibus? Recte quidem. Ergo nulli dubium esse potest, quin $-3a$ ab $5a$ distet $8a$, quæ distantia ipsarum erit quantitatum differentia.

7. Quantitatum simplicium multiplicatio fit sola litterarum conjunctione, nullo inter ipsas interposito signo; quare si velimus a per b multiplicare, scribimus ab . Quantitates, quæ invicem multiplicantur, dicuntur *factores*, id autem, quod ex multiplicatione oritur, *factum* seu *productum* appellatur. Sicuti vero, quæ multiplicari debent quantitates, vel ambæ positivæ sunt, vel ambæ negativæ, vel earum altera positiva, altera negativa; ideo in signis producto apponendis hanc sequimur rationem, ut si quantitates eodem afficiantur signo vel positivo, vel negativo, productum signum positivum apponamus, negativum vero si contra. Hinc si multiplicemus $+a$ per $+b$, vel $-a$ per $-b$, erit in utroque casu productum $+ab$; si contra multiplicemus $-a$ per $+b$, seu $+a$ per $-b$, erit productum $-ab$.

8. Hu-

8. Hujus rei in promptu est ratio. Quoniam multiplicator nihil aliud ostendit, nisi quoties multiplicanda quantitas sit accipienda, jam si hæc positiva sit, & ille pariter positivus, erit quoque productum, ut patet, positivum, eoque majus, quo multiplicator ipse major erit; & minus, quo minor; ergo si multiplicator sit zero, erit zero etiam productum; ergo si magis decrescat multiplicator, & fiat minor quam zero, hoc est negativus, etiam productum magis decrescat necesse est, fiatque minus quam zero, seu negativum. En igitur quomodo sit manifestum, productum positivæ quantitatis per negativam multiplicatæ, esse negativum. Suppone modo quantitatem negativam per positivam multiplicari oportere. Jam ex demonstratis erit productum negativum, & eo minus in hoc ordine, hoc est tanto minus quam zero, quanto ipse multiplicator crescit, seu major est, & quanto multiplicator fiet minor, tanto productum erit minus in ordine negativorum; hoc est tanto propius accedet ad zero; ita ut crescat semper productum, si decrescat multiplicator: ergo quum hic est zero, productum erit zero: ergo, si magis etiam multiplicator decrescat, nempe si negativus fiat, crescat magis productum, adeoque erit majus quam zero, ac consequenter positivum; quantitas igitur negativa per negativam multiplicata productum dabit positivum. Hinc patet regula numero præcedenti assignata.

9. Si quantitates invicem multiplicandæ plures essent quam duæ, eodem prioris modo se res habet. Duas enim prius multiplicabis, deinde harum productum per tertiam, & sic deinceps. Quærat ex. gr. productum trium quantitatum $a, -b, c$; duarum $a, -b$ erit $-ab$, si hoc per c multiplices, habes $-abc$ productum quaesitum. Si quantitates coefficientibus præditæ sint, eorum productum productum quantitarum est præfigendum, iisdem quoad signa manentibus, quæ jam tradidimus. Igitur productum quantitatis $-3a$ in $9b$ ductæ erit $-27ab$, productum $4a$ in $3b$ erit $12ab$. Animadvertant etiam, qui hæc legunt, idem esse, & eandem exhibere quantitatem ab & ba ; nam locorum diversitas, quæ in vulgari arithmetica tantum potest in numerorum valoribus immutandis, in algebra vim habet omnino nullam.

10. Quum quantitates, quæ multiplicantur, duæ sunt & æquales, iisdemque signis affectæ, ex. gr. si multiplicetur a per a , productum aa secunda dicitur ipsius a potestas, seu potentia, seu dignitas, seu quadratum, idque nihil aliud significat, nisi, quod ea quantitas per se ipsam fuerit multiplicata; ipsa vero a tantum dicitur prima ejusdem a potestas. Si quantitates tres fuerint, productum aaa vocatur potestas tertia, sive cubus; $aaaa$ potestas quarta, seu quadrato-quadratum, & sic in infinitum; non utimur tamen eo scribendi modo utpote nimis incommodo, præsertim si valde crescat potestas; sed hunc potius usurpamus, a^2, a^3, a^4, a^n ita ut a^2 sit idem ac aa , a^4 idem ac $aaaa$, a^n vero eandem ac potestas quæcumque per ipsum n expressa. Hi porro numeri litteræ superimpositi vocantur exponentes, ea de causa; quod aliquam ipsius quantitatis exponunt, seu indicant potestatem. Magnum igitur inter coefficientem atque exponentem intercedit discrimen; atque inde longe aliud est $2a$, quam a^2 ; nam si a sit ex. gr. 4 , $2a$ erit 8 , at a^2 , nempe a quadratum æquale erit 16 .

11. Cum de quantitatis ejusdem potestatibus agitur, ut eas invicem multiplices, summam exponentium appones litteræ communi tamquam exponens, & potestas inde orta erit productum, quod quærebatur; omnino id planum est; nam

$$A^2.$$

$$si^2.$$

Si a^2 per a^3 velis multiplicare, nonne productum erit $aaaaa$? atqui hoc ex num. super. idem est atque a^5 , & hujus potestatis exponens 5 est summa exponentium 2 & 3, ergo &c. Patet hinc etiam ratio elevandi datam quantitatem ad quamlibet potestatem; scilicet toties sumendus erit exponens, quoties novæ potestatis index postulat, ad quam ipsa quantitas est elevanda, seu quod idem est, exponens propositæ quantitatis per novum indicem est multiplicandus, rite servatis, quæ ad signa pertinent. Ex. gr. vis b^2 elevare ad potestatem tertiam; ergo ex tradita regula ter erit sumendus, seu per 3 multiplicandus exponens 2, & scribendum b^6 , quæ erit ipsius b^2 potestas tertia; ita etiam quantitatis a^3 potestas secunda, seu quadratum erit a^6 , potestas tertia a^9 , ita denique si a^m ad potestatem n velis perducere, fiet a^{mn} , ipsius a^m potestas n^{sima} . Valent hæc eadem, quum agitur de producto ex duorum, vel plurium factorum multiplicatione orto, quale esset ex. gr. a^2b^3 ; Si enim velimus ipsius potestatem aliquam, sufficere per quælibet potestatis indicem singularum litterarum exponentes multiplicare. Ergo potestas illius secunda erit a^2b^6 , & generatim $a^m b^n$ ad potestatem p elatum erit $a^{mp} b^{np}$. Verum sæpe juvabit indicare tantum operationem, non perficere, apposita supra lineola, cui adjungitur index potestatis. Ita \overline{ab} indicat ab elevatum ad potestatem n , quod idem est ac $a^n b^n$, & $\overline{a^2b^3}$ est a^2b^3 elevatum ad potestatem m , seu $a^{2m} b^{3m}$.

12. Ad divisionem quantitatum simplicium quod attinet, quoniam divisio multiplicationi est contraria, & illud, quod per hanc erat effectum, per illam destruitur, sequitur divisionem fieri, si ex dividenda quantitate divisorem ejicias; quo facto reliquum *quotiens* appellatur seu *quotus*, qui per divisorem multiplicatus dividendam quantitatem restituet. Regula igitur pro signis, hæc, quem diximus, quoto præfigendis ab ea non differt, quam in multiplicatione tradidimus; nempe signa eadem positivum, diversa negativum signum pro quotiente exhibebunt. Hinc quoniam quantitas ab est productum ex a in b , si eam per a divides, erit b quotus, qui per a iterum multiplicatus ipsam ab restituit; ita pariter quantitas $-abc$ divisa per $-ab$ dabit quotum c , divisa per c dabit quotum $-ab$. Quoniam vero quantitates omnes possunt intelligi per unitatem multiplicatæ, hinc est, quod si quantitas aliqua sit per se ipsam dividenda, ut si a dividere debeas per a , quotus erit unitas. Si quantitas habeat coefficientes, præter ea, quæ dicta sunt, quantitatis dividendæ coefficientes per divisoris coefficientem dividere oportet, adeoque si divides $6a$ per $-2a$, erit quotus -3 .

13. At ea esse potest quantitas dividenda, ut in illa litteræ divisoris, aut nullæ, aut saltem non omnes reperiantur; quemadmodum si a dividi oporteat per b . Hinc enascuntur fractiones, & eo prorsus modo indicatur divisio, quo in arithmetica; idest lineola horizontalis ducitur, supra quam scribitur quantitas dividenda, infra divisor propriis utriusque retentis signis; igitur $\frac{a}{b}$ indicabit a divisam

divisam per b , eritque ipsa fractio quotus ex divisione proveniens. Quantitas supra transversam lineolam posita dicitur *numerator*, quæ infra est, *denominator*. Ita si $3ab$ dividas per $-c$ erit quotus $\frac{3ab}{-c}$, quod idem erit etiam $\frac{-3ab}{c}$: nam fractionis valor, sive quotus ipse in utroque casu erit negativus.

Eadem ratione si dividas $-5ab$ per $-3cd$, erit quotus $\frac{-5ab}{-3cd}$ sive $\frac{5ab}{3cd}$ in utroque casu positivus. Quidam fractionem indicant interpositis inter numeratorem, & denominatorem duobus punctis. Ita $a : b$ indicat numeratorem a dividi a denominatore b . Nos plerumque primum modum sequimur. Si autem aliquæ in dividenda quantitate litteræ reperiuntur, quæ etiam in divisore sint, illis tunc ejectis, ea qua dictum est methodo, quod superest fractionis more scribendum: quapropter divisio ab per xb , erit quotus $\frac{a}{x}$. Ratio ex fractionum regulis deducitur, quibus docemur nihil fractionis valorem immutari, si per eandem quantitatem tum numerator, tum denominator dividatur; quod ipsum in arithmetica satis constat. At rei hujus ratio ultima ex eo pendet, quod cum divisor in quotum ductus æquare debeat productum dividendæ quantitatis in unitatem, necessario esse debeat divisor ad dividendam quantitatem, ut unitas ad quotum: idest in casu allato xb ad ab , ut unitas ad $\frac{ab}{xb}$; sed ratio xb ad ab est eadem, ac ratio x ad a , ut novimus ex proportionum regulis; ergo quam proportionem unitas habebit ad $\frac{ab}{xb}$, eandem habebit ad $\frac{a}{x}$. Ergo hæc duæ quantitates erunt prorsus æquales: quod ratiocinii genus ad alios quoscumque casus extendi, manifestum est.

14. In dividenda vero alicujus litteræ potestate per aliam ejusdem potestatem, sufficit hujus exponentem ab illius exponente detrahere, ut quotum habeas, idest si fuerit dividendum a^4 per a^2 , erit quotus a^{4-2} , seu a^2 : nam sicuti exponentium additione potestates multiplicantur (num. 11.), ita eorum subtractione dividantur necesse est. Hinc si divisoris exponent minor sit quam exponens dividendi, quoti exponent erit positivus, si æqualis, quotus habebit exponentem 0, si denique major habebit quotus exponentem negativum; Unde si a^4 dividas per a^3 , quotus erit a^1 ; si per a^4 , quotus erit a^0 ; si per a^6 quotus erit a^{-2} seu $\frac{1}{a^2}$. Etenim quotum ex a^4 divisa per a^2 scimus esse $\frac{aaaa}{aa}$ seu a^2 ; quotum ex a^4 divisa per a^4 esse $\frac{aaaa}{aaaa}$ seu 1; quotum denique ex a^4 divisa per a^6 esse $\frac{aaaa}{aaaaaa}$ seu $\frac{1}{a^2}$; Unde patet ratio, quare a^0 æquet unitatem, & idem sint $\frac{1}{a^1}$, ac a^{-1} . Hæc quantitates, quæ exponentes habent negativos, potestates negativæ vocantur, semperque indicant fractionem, cujus numerator est unitas, denominator vero ipsa potestas positiva: sic a^{-2} , a^{-3} , a^{-4} idem sunt

sunt profus ac $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}$.

15. Hæc quoad quantitates simplices. Quantitatum compositarum algorithmus nullo negotio ex simplicium algorithmo profluit. Ut earum summam habeas, facis erit, si eas unam post aliam scribas retentis earum signis; ut habeas residuum, vel earum differentiam, si pariter unam post aliam scribas, mutatis signis earum, quæ subtrahendæ erunt. In summandis tamen, & in subtrahendis quantitatibus, eæ, quæ eadem littera exprimuntur, in unam simplicem quantitatem rediguntur, uti num. 2, & 3 monuimus. Ex his quantitatibus $a+b-c$, $3a-d+c$ summa erit $4a+b-d$, quantitarum $6x+9y$, $10x-3y$ summa erit $16x+6y$, quantitarum $ab-2ac+z^2$, $-cb+2ac+z^2$ summa erit $2z^2$. Si vero ex $4x+3b$ subtrahas $a+y$ erit residuum $4x+3b-a-y$. Si de $x+b$ subtrahas $-a-b$ erit residuum $x+2b+a$. Si ex $ab+c^2$ subtrahas $-ab+c^2$ erit residuum $2ab$.

16. Quum quantitates addendæ sunt, vel subtrahendæ, usus docuit Analystas, eas omnes, quæ eodem termino constant, in verticali columna scribere. Ita enim uno velut intuitu facile additio vel subtractio peragitur. Exempla rem efficiunt clarissimam. Sint addendæ quantitates A, B, C, ita terminos dispone, ut identici faciant columnam verticalem, quod factum vides. His ita positus nihil facilins quam efficere summam D.

$$A. \quad a^3 - 3a^2x + 4ax^2 - 2x^3$$

$$B. \quad 2a^3 - a^2x - 2ax^2 + x^3$$

$$C. \quad -a^3 \quad + 2ax^2 + 2x^3 + b^3$$

$$D. \quad 2a^3 - 4a^2x + 4ax^2 + x^3 + b^3$$

Similiter si ex A sit deducenda B, hujus terminos terminis illius similibus suppono, & nullo negotio differentiam C invenio.

$$A. \quad 3a^5 - 2a^2b^3 + 4a^4b + a^4y$$

$$B. \quad a^5 - 3a^2b^3 + 3a^4b + b^4y$$

$$C. \quad 2a^5 + a^2b^3 + a^4b + a^4y - b^4y$$

17. Quantitatum compositarum multiplicatio fit multiplicando singulos unius factoris terminos per singulos alterius, & horum omnium productorum summam quæsitum productum dabit. Sit $a+b-c$ quantitas multiplicanda per y ; per hanc igitur, tribus illis terminis juxta regulas simplicium quantitarum successive multiplicatis, habebimus productum $ay+by-cy$. Multiplicari debeat $a+b-c$ per $y-a$: productum xy multiplicato per singulos terminos $a+b-c$ erit $ay+by-cy$, si eosdem ducas in $-a$, habemus $-a^2-ab+ac$. Summa igitur duorum productorum $ay+by-cy-a^2-ab+ac$ erit productum quæsitum. Quum duæ quantitates invicem multiplicandæ sunt, altera sub altera scribitur, tum inferioris termini singuli ducuntur in terminos superioris; produ-

cta

ita vero scribuntur infra lineolam horizontalem, ea habita cura, ut siqui termini similes proveniant, ii in verticali columna constituantur, quo facilius colligi in summam possint. Exemplum. Sit multiplicanda A per B; ductisque singulis terminis B in singulos A, oritur C, cujus termini similes, ut monuimus, in verticali columna sunt positi, qua cura adhibita facile eorum summam D conficio.

$$A. a^3 + 2a^2x - a^2y + 3axy$$

$$B. 2a^2 - ax + ay - 2xy$$

$$C. \begin{array}{r} 2a^5 + 4a^4x - 2a^4y + 4a^3xy - 2a^3x^2 - 2a^2xy - a^3y^2 + 2a^2xy^2 - 4ax^2y \\ - a^4x + a^4y + a^3xy \quad - 4a^2xy \quad + 2a^2xy^2 \\ + 2a^3xy \\ - 2a^3xy \end{array}$$

$$D. 2a^7 + 3a^4x - a^4y + 5a^3xy - 2a^3x^2 - 6a^2xy - a^3y^2 + 4a^2xy^2 - 4ax^2y$$

18. Non abs re fuerit aliquo hic exemplo ea magis ostendere, quæ num. 7. & 8. dicta sunt; nempe signorum diversitatem exhibere in multiplicatione productum negativum; signa vero eadem positivum. Sit itaque multiplicandum $2a - a$ per $3a - 2a$ quod cum idem sit, ac multiplicare a per a constat productum esse debere a^2 : atqui hoc fieri nequit, nisi his stantibus, quæ de signis demonstravimus: multiplicentur enim propositi factores, & signa omittantur in terminis omnibus, primo excepto, sine ulla controversia positivo. Habebimus productum $6a^3 + 4a^3 + 3a^3 + 2a^3$. Jam vero, cum primus terminus $6a^3$ sextuplus sit producti a^3 , aliqui procul dubio ex terminis, qui $6a^3$ subsequuntur, negativi esse debebunt, at nunquam fiet, ut productum illud æquet a^3 , nisi medii duo termini negativi sint, & quartus positivus hoc modo $6a^3 - 4a^3 - 3a^3 + 2a^3$, duo autem termini medii productum sunt earum quantitatum, quæ contraria habent signa; extremi vero productum earum, quæ signa habent eadem; ergo etiam hinc patet, certam esse regulam signorum alibi statutam.

19. Cum multiplicationem non facere volumus, sed tantum indicare, tunc supra factorum quemlibet transversam lineam ducimus, interque ipsos ponimus vel punctum, vel signum X: ita $a+b$, $c-d$ seu $a+b$ X $c-d$ significat quantitatem $a+b$ per quantitatem $c-d$ multiplicatam. Earundem quantitatum, quum volumus indicare potestates, lineola eodem modo pariter ducta supra ipsas, post illam exponentem ponimus; ita $\overline{a+b}^2$ significat quantitatem $a+b$ per se ipsam multiplicatam, seu ejusdem potestatem secundam, seu quadratum; quod ne quæso tirones idem putent esse ac $a^2 + b^2$; longe enim est aliud quadratum integræ quantitatis, aliud summa quadratorum partium ejusdem, quod in numeris etiam videre est: sic etiam $\overline{a+b}^3$ bis in se ductam, seu illius cubum, seu

seu potestatem tertiam &c.; & $\overline{a+b}$ indicat $a+b$ per se multiplicatam tot vicibus, quot exprimuntur per $n-1$, seu ipsius potestatem n .

20. Cum agitur de divisione, duplex est casus; vel enim divisor quantitas composita & ipse est compositus, vel simplex; in hoc secundo casu sufficit per divisorem singulis quantitatibus compositis terminos dividere; Unde si $ab+cb-db$ dividere oporteat per b , erit quotus $a+c-d$, & omnia eo peragentur modo, quo num. 12.; hinc eadem quantitas $ab+cb-db$ per x divisa dat pro quotu $\frac{ab+cb-db}{x}$: quantitas $ab+bc-cd$ divisa per b dabit $\frac{ab+bc-cd}{b}$,

vel $a+c-\frac{cd}{b}$ quotum partim integrum, partim fractum; quotus denique $cab+ dab$ quantitatis divisum per abx erit $\frac{c+d}{x}$; quae omnia ex simplicium regulis satis patent.

21. At si etiam divisor fuerit compositus, tunc hac methodo rem conficiamus. Quantitatem utramque dividendam scilicet, & eam, per quam dividendum est, secundum aliquam litteram, pro ut magis expedit, ordinamus; quod fit, quum potestatem maximam illius litterae scribimus tamquam primum terminum, deinde potestatem proximam minorem in termino secundo, & sic deinceps: ita quantitas $y^3+xy^2+x^2y+x^3$ dicitur ordinata secundum litteram y ; si vero eandem ordinare velimus secundum x , scribendum erit $x^2+x^2y+xy^2+y^3$. Ita rebus dispositis per primum divisoris terminum primum dividendae quantitatis terminum dividimus, & quotientem seorsim scribimus, per quem deinde integrum divisorem multiplicamus, & quod inde oritur productum e dividendo subtrahimus. Subtractione facta primum residui terminum per primum divisoris terminum pariter dividimus, ejus divisionis quotum juxta quotum antea habitum scribimus, eo signo affectum, quo gaudet, per eumque divisore multiplicato, & subtrahendo productum iterum dividimus, & hac lege procedimus usque dum nihil dividendum superfit; summa omnium quotorum partialium erit quotus totalis.

22. Dividere oporteat quantitatem $ba-db-da+a^2$, quam scribimus in A , per $b+a$, quam scribo in B ; ordinetur utraque formula ex. gr. per a , erit prima $a^2+ba-da-db$, quam scribo in C , altera, quam scribo in E , erit $a+b$. Dividatur modo primus terminus quantitatis, quae est in C nempe a^2 , per primum terminum divisoris nempe per a , & quotus a scribatur in D ; Deinde per hunc multiplicetur divisor, qui est in E , & productum a^2+ba subtrahatur de quantitate posita in C , erit residuum $a^2+ba-da-db-a^2-ba$, idest, quoniam quatuor termini a^2+ba-a^2-ba invicem eliduntur, $-da-db$, quod residuum, jam per se secundum a ordinatum, scribatur in M , & illius primus terminus $-da$ per a primum divisoris terminum dividatur; provenit quotus $-d$, quem in D juxta primum quotum ponimus, & per $-d$ multiplicato iterum divisore, & producto $-da-db$ subtracto de quantitate M , residuum erit $-da-db+da+db$, hoc est zero, adeoque erit quantitas D , idest $a-d$ quotus totalis; & revera si hanc per divisorem multiplicemus, restituitur integra quantitas A .

A.

A. $ba - db - da + a^2$, B. $b + a$

C. $aa + ba - da - db$, E. $a + b$

$-aa - ba$

D. $a - d$

$$\begin{array}{r} M. -da - db \\ + da + db \\ \hline 0 \end{array}$$

23. Sit dividenda formula in A posita per eam, quæ est in B . Utraque ordinata est per x : igitur divide $5x^4$ per $5x^2$, & scribe in D quatum x^2 ; per x^2 multiplica divisorem, erit productum $5x^4 + x^3a - x^2ab$, quod subtrahere de quantitate A , & habebis residuum primum, quod est in C : primum ejus terminum $-15x^3a$ divide per $5x^2$, & quatum $-3ax$ scribe pariter in D , perque ipsam multiplica iterum divisorem B , & productum $-15x^3a - 3x^2a^2 + 3x^2ab$ subtrahere de quantitate C , erit E residuum secundum. Divide hujus secundi residui terminum primum $-5x^2ab$ per $5x^2$, & quatum $-ab$ scribe in D , & tertio multiplica divisorem per ipsum $-ab$, & productum $-5x^2ab - xa^2b + a^2b^2$ subtrahere de quantitate E ; quoniam residuum tertium est zero, absoluta erit divisio, cujus totalis quotiens est ipsa quantitas $x^2 - 3ax - ab$ posita in D .

A. $5x^4 - 14x^3a - 6x^2ab - 3x^2a^2 + 2xa^2b + a^2b^2$, | B. $5x^2 + xa - ab$
 $-5x^4 - x^3a + x^2ab$

C. $-15x^3a - 5x^2ab - 3x^2a^2 + 2xa^2b + a^2b^2$ | D. $x^2 - 3ax - ab$
 $+15x^3a \quad +3x^2a^2 - 3x^2ab$

E. $-5x^2ab - xa^2b + a^2b^2$
 $+5x^2ab + xa^2b - a^2b^2$
 $\quad 0 \quad 0 \quad 0$

24. Esto tertium exemplum formula $9x^3 - y^2 + ab$ dividenda per $3x - y$, diviso termino $9x^3$ per $3x$ habemus quatum $3x$, per quem rite multiplicato divisore, & subtracto producto, primum residuum est $3xy - y^2 + ab$, & diviso $3xy$ per $3x$, & per quatum y iterum multiplicato divisore, & subtractione facta, erit alterum residuum ab

Quantitas dividenda $9x^3 - y^2 + ab$, Divisor $3x - y$

Primum residuum $3xy - y^2 + ab$ Quotiens $3x + y$

Residuum alterum ab

B

Sed

Sed quoniam residuum illud ab nullo modo potest per $3x-y$ dividi, patet perfectam divisionem haberi non posse, quare quotus integer erit $3x+y$ una cum fractione $\frac{ab}{3x-y}$. In hoc, & similibus exemplis erit igitur quotus ex integris compositus, & fractis. Scribi etiam poterat quotiens unius tantum fractionis modo $\frac{9x^2-y^2+ab}{3x-y}$, vel ut alii faciunt $9x^2-y^2+ab:3x-y$, vel $(9x^2-y^2+ab):(3x-y)$ quæ omnia primam quantitatem ianuunt per sequentem divisam.

CAPUT SECUNDUM

Quantitatum Fractarum Algorithmus.

Mirabuntur fortasse aliqui quum viderint, nos in tradendo fractionum algorithmo a multiplicatione & divisione initium facere methodi oblitos, quam & alii in analyticis rebus sequuti sunt, nosque ipsi sequuti sumus capite precedenti. At quum hi animadverterint, veram methodum postulare, ut a simplicioribus ad ea, quæ minus simplicia sunt, gradus fiat, & in fractionibus simpliciores longe esse multiplicationem & divisionem, quam summam & subtractionem, non erit cur nobis succenseat.

1. Unde oriantur fractiones jam supra docuimus Cap. 1. Num. 13., nunc illud est in memoriam revocandum, quod in proportione geometrica docemur, nempe exponentem rationis, quam habet antecedens ad consequens, nihil esse aliud quam fractionem, cujus numerator est antecedens, consequens denominator; ita exponens rationis a ad b erit fractio $\frac{a}{b}$. Scimus etiam quod si a , & b per eandem quantitatem multiplicentur aut dividantur, non ideo immutatur eorum ratio: atqui per multiplicationem aut divisionem ejusmodi exponentis numerator & denominator multiplicentur aut dividuntur; ergo per hoc quod numerator & denominator cujuscumque fractionis per eandem quantitatem aut multiplicentur aut dividantur, non immutatur fractio; ergo $\frac{a}{b}$, $\frac{ac}{bc}$, $\frac{ad}{bd}$ sunt fractiones æquales.

2. Patet, fractionem æquare unitatem, si numerator denominatorem æquet; superare, si numerator denominatorem superet; deficere vero ab unitate, cum numerator denominatore minor est.

3. Jam vero ut multiplicemus fractionem ex. gr. $\frac{a}{b}$ per quantitatem integram c , sufficit si per c numeratorem multiplices, idest si $\frac{ac}{b}$ scribas; nam $\frac{a}{b}$ in c nihil aliud est, quam productum ex a in c divisum per b ; hinc si fractionis multiplicator denominatori esset æqualis, tunc productum erit quantitas integra, quæ numeratoris locum obtinebat; ita $\frac{a}{b}$ in b dabit $\frac{ab}{b}$ idest a .

4. Quum

4. Quum vero divisio e regione multiplicationi opponatur, ideo si fractio ex. gr. $\frac{a}{b}$ dividenda sit per c , non numeratorem, sed denominatorem per c multiplicabimus, & erit quotus $\frac{a}{bc}$. Nam quum fractio, multiplicato per eandem quantitatem numeratore & denominatore, non immutetur, discimus multiplicationem numeratoris esse quid directe contrarium multiplicationi denominatoris. Ergo quum eadem oppositio sit inter multiplicationem & divisionem, oritur per multiplicationem denominatoris divisio, sicuti ex multiplicatione numeratoris orta est multiplicatio.

5. Quod si ipsam quantitatem integram c per fractionem puta $\frac{a}{b}$ dividere velis, tunc nova exurgit fractio, cujus numerator est c ; denominator vero $\frac{a}{b}$. Multiplica per b hujus novæ fractionis numeratorem & denominatorem; fiet igitur ille cb , hic autem a (num. 1.) ergo quotiens quæsitus erit $\frac{cb}{a}$. Unde oritur regula universalis, quæ docet, tunc dividi quantitatem integram per fractam, quum integra quantitas ducitur in fractionis denominatorem, productumque per numeratorem dividitur.

6. Si fractio per fractionem sit dividenda ex. gr. $\frac{a}{b}$ per $\frac{y}{x}$, tunc habemus fractionem novam, cujus numerator est $\frac{a}{b}$, denominator $\frac{x}{y}$: multiplica utrumque per bx , erit numerator ax denominator by , ergo quotus noster erit $\frac{ax}{by}$. Unde regula universalis est, tunc fractionem per fractionem dividi, quum numerator dividendæ ducitur in denominatorem dividendæ, & denominator illius in hujus numeratorem. Quæ demonstratio iis etiam accommodari potest, quæ de divisione quantitatis integræ per fractionem dicta sunt paulo ante, quælibet enim integra quantitas haberi potest tamquam fractio, cujus ipsa est numerator, denominator unitas.

7. Sicuti autem hæc operatio directe opposita est illi, qua quis numeratorem per numeratorem, & denominatorem per denominatorem multiplicaret, hinc est quod hac via fractionem per fractionis multiplicationem obtinebimus: Ergo $\frac{a}{b}$ in $\frac{y}{x}$ dabit productum $\frac{ay}{bx}$.

8. Quæ hætenus diximus, quamvis simplicium quantitatum exemplis earumque possibilium sint declarata, valere tamen in quibuscumque quantitatis & fractionibus patet ex vi demonstrationum, quæ universales omnino sunt; hinc fractio $\frac{a+b}{c-d}$ æquat $\frac{ax+bx}{cx-dx}$, $\frac{yab-cab}{2xab}$ æquat $\frac{y-c}{2x}$, & $\frac{ab-ac}{-xb+xc}$ æquat

$\frac{a}{-x}$ seu $\frac{-a}{x}$. Pariter a in $\frac{a-x}{c+d}$ dabit $\frac{a^2-ax}{c+d}$, & $\frac{a-x}{c-d}$ divisa per a erit $\frac{a-x}{a-c+d}$, & a divisa per $\frac{x+y}{x}$ erit $\frac{ax}{x+y}$. Ita $\frac{x+y}{a-x}$ in $\frac{x-y}{a+x}$ dat productum $\frac{x^2-y^2}{a^2-x^2}$. Demum $\frac{x+z}{c}$ divisa per $\frac{-d^2}{x+z}$ dabit quotum $\frac{x+z}{-cd^2}$, seu

$$\text{scu } \frac{x^2 + 1xz + z^2}{-cd^2}$$

9. Antequam veniamus ad summam vel subtractionem fractionum a fractionibus vel ab integris quantitibus, regula tradenda est, qua ipse fractiones, & integre quantitates in fractiones mutari possint ejusdem denominatoris, qua tradita nulla superest difficultas. Ur quantitas a in fractionem vertatur, quæ habeat denominatorem communem cum data fractione $\frac{x}{y}$, ipsa quantitas a multiplicetur & dividatur per illius fractionis denominatorem, nempe per y , fietque $\frac{ay}{y}$. Dux pariter fractiones ad eandem denominationem reducuntur simili ratione. Sint $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{y}$, multiplica numeratorem, & denominatorem unius per alterius denominatorem, & vice versa; fiet igitur prima $\frac{ay}{by}$, altera $\frac{bx}{by}$, quarum est communis denominator by .

10. Nulla major est difficultas si fractiones ad eundem denominatorem reducendæ plures sint quam duæ ex. gr. $\frac{3a}{2b}$, $\frac{8a+5c}{a-c}$, $\frac{y}{x}$, possunt enim reduci prius duæ ex. gr. $\frac{3a}{2b}$, $\frac{y}{x}$, quæ in has mutabuntur $\frac{3ax}{2bx}$, $\frac{2by}{2bx}$.

Deinde ad eundem denominatorem reducuntur $\frac{2by}{2bx}$, & tertia $\frac{8a+5c}{a-c}$, erunt $\frac{2bya-2byc}{2bx \cdot a-2bx \cdot c}$, $\frac{36abx+10bcx}{26ax-2bcx}$ ad quem denominatorem perveniet etiam

fractio $\frac{3ax}{2bx}$, si per $a-c$ multiplicetur & dividatur, fietque $\frac{3ax-3acx}{2abx-2bcx}$.

Ex his exemplis eruitur regula universalis. Tunc fractiones quotquot sint ad eandem denominationem rediguntur, si denominator communis fiat productum omnium denominatorum, & quisque numerator multiplicetur per productum reliquorum denominatorum dempto peculiari fractionis, cujus multiplicatur numerator.

11. Sint ad eandem denominationem reducendæ fractiones tres $\frac{c}{a+b}$, $\frac{y^2}{a-b}$, $\frac{x+z}{u}$; quare productum trium denominatorum erit illud a^2u-b^2u , hic ergo erit communis denominator; multiplica nunc c per productum $a-b \cdot u$ nempe $au-bu$, fiet fractio prima $\frac{cau-cbu}{a^2u-b^2u}$, multiplica y^2 per $au+bu$, erit altera fractio $\frac{y^2au+y^2bu}{a^2u-b^2u}$, multiplica $x+z$ per a^2-b^2 , erit denique fractio tertia $\frac{a^2x+a^2z-b^2x-b^2z}{a^2u-b^2u}$, & ita tres datæ fractiones, quarum valor idem est qui antea, ad eundem denominatorem perductæ sunt.

12. Nitidius procedit res, cum denominator fractionis alicujus est factor denominatorum

nominatoris alteras, ut contingit in duabus $\frac{a}{b}$, $\frac{c^x}{y^b}$, ubi b factor est denominatoris y^b ; tunc enim altero factore y adhibito, & per illum tota fractione $\frac{a}{b}$ multiplicata habemus intentum.

13. Cum fractiones ad eundem denominatorem scimus reducere, tunc nullo negotio fiet earum summa, & subtractio. Si quæzatur summa fractionum $\frac{c}{b}$, $\frac{x}{a-b}$, $\frac{z+d}{u}$, reducantur ad eundem denominatorem, & in has mutantur; $\frac{cau-cbu}{bau-cbu}$, $\frac{x^2u}{x^2bu}$, $\frac{zab+dab-zb^2-db^2}{bau-b^2u}$, deinde fiat omnium; $\frac{bau-b^2u}{bau-b^2u}$, $\frac{bau-b^2u}{bau-b^2u}$, $\frac{bau-b^2u}{bau-b^2u}$ numeratorem summa, ex cap. præc., eique communis denominator linea inferiorposita supponatur, erit ita summa, quam quærebamus,

$\frac{cau-cbu+bxu+zab+dab-zb^2-db^2}{bau-b^2u}$. Subtrahi debeat fractio $\frac{c}{b}$ de $\frac{x+z}{a+u}$. Reductæ ad eundem denominatorem erit prima $\frac{ac+uc}{ba+bu}$, altera $\frac{bx+bz}{bu+bu^2}$; nunc si primæ numerator a numeratore alterius subtrahatur, & residuo subtribatur communis divisor, facta erit subtractio. Erit igitur $\frac{bx+bz-ac-cu}{ba+bu}$.

14. Superest ut de fractionibus ad simpliciorum formam reducendis agamus, quod sane non levis momenti est æstimandum. Diximus initio hujus capituli fractionis valorem integrum manere, si per eandem quantitatem cum numerator, tum denominator dividatur. Si quando accidit, ut per communem quantitatem dividit uterque possit, peracta divisione fractio in aliam vertetur eisdem quidem valoris, sed terminis simplicioribus; ex. gr. si fractionis $\frac{a^h}{c^b}$ numerator, & denominator dividatur per b , ea vertitur in $\frac{a}{c}$, quæ simplicior est. Quo autem major erit quantitas, per quam fractio ita dividitur, eo evadet simplicior, ita ut si divisor sit maximus, fractio ad minimos terminos redigetur; ita fractionis $\frac{abn+cbn}{xbn}$ numerator & denominator dividi possunt per n adeoque simpliciter erit fractio $\frac{a^h+cb}{x}$; at hujus quoque numerator & denominator sunt per b divisibiles, ergo simplicior erit fractio $\frac{a^h+c}{x}$; quam fractionis formam initio habuisses, si datam fractionem non per n sed per bn divisisses, qui divisor bn cum in casu maximus sit, $\frac{a^h+c}{x}$ erit maxime simplex fractionis forma.

15. Non tamen primo potest intuitu cognosci, quinam sit maximus quantum divisor, quamvis revera formulæ sint divisibiles; sed antequam de hoc agamus, sit hujusmodi Lemma. Si duæ quantitates A major, & B minor fiat exacte divisibiles per quantitatem P , dico divisa A per B , si quod superest residuum C , illud etiam fore exacte divisibile per P .

$$\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \\ P & \end{array}$$

Demon-

Demonstratio. Quotiens ex divisione A per B fit m : ergo $mB + C$ æquabit A: ergo cum A dividi possit exacte per P, etiam $mB + C$ per eandem P exacte dividi poterit; sed etiam B exacte dividitur per P atque adeo etiam mB : ergo per P necesse est dividatur exacte residuum C. Quod &c.

16. Corollarium primum. Quoniam B & C exacte dividi possunt per P, si B per C dividatur ita ut residuum sit D, sequitur ex superiore demonstratione etiam D esse exacte divisibile per P. Pariter dividi exacte poterit per P residuum E, quod superest facta divisione C per D; & ita porro usque dum ad residuum veniamus, quod sit zero.

17. Corollarium secundum. Duo hic possunt accidere; etenim vel ultimum residuum quantitati P est æquale vel majus; nam minus esse nunquam poterit, quum per P residua omnia exacte dividantur. In primo casu erit P maximus communis divisor quantitatum A, B; quandoquidem major quantitas exacte residua omnia dividere non potest, quum ultimum non possit. In casu altero erit quidem P divisor communis, quum ultimum residuum exacte dividat, sed non erit maximus, nam ipsæ quantitates A, B dividi possent per residuum illud ultimum.

18. Scolium. Divisimus hic B per C, C per D, quia supposuimus residua successive decrescere. Cæterum si quando accidat, ut aliquod residuum ex. gr. D majus eiset quam C, tunc eiset facienda divisio D per C, & residuum æque divisibile eiset per P, ut ex lemmate constat.

19. Hoc lemmate praxi continetur, qua maximus duarum quantitatum divisor invenitur, quæ antea sine demonstratione exhiberi consueverat. Quærat communis divisor formularum A, B quæ secundum litteram x sint ordinatæ,

$A. -x^3 + ax^2 - c^2x + ac^2$	$B. -x^2 + \overline{a-y}x + ay,$	Quoti $\frac{x}{x}$
$M. -x^3 + ax^2 - yx^2 + ayx$	$Q. -x^2 + ax$	$\frac{-y}{x}$
$C. yx^2 + c^2 + ay. -x + ac^2$	$E. -yx + ay$	$\frac{c^2 + y^2}{c^2 + y^2}$
$N. yx^2 - ayx + y^2x - ay^2$	$P. -x + a$	$\frac{t}{t}$
$D. c^2 + y^2. -x + ac^2 + ay^2$	$0 \quad 0$	$\frac{c^2 + y^2}{c^2 + y^2}$

Divide primum terminum formulæ A per primum formulæ B, quoniam in illo x majorem obtinet potestatem, & quoti x productum in divisorem B, nempe quantitatem M subtrahere de A, residuum erit C. Hoc residuum C divide eodem modo per B, & ab illo subtrahere quantitatem N, quæ est productum ex B in quotum $-y$, sic habebis alterum residuum D. Nunc quoniam in hoc residuo minor est x dignitas, quam in B, ideo inverti ordinem, & B divide per D, atque

inde subtrahere Q productum ex D in quotum $\frac{x}{c^2 + y^2}$, tertium residuum erit E,

quo diviso per y , reperitur enim in terminis omnibus, habes quantitatem P. Hanc pariter divide per D, & ex ea subtrahere productum ex D in quotum $\frac{1}{c^2 + y^2}$ hoc

est K, residuum erit zero; igitur quantitas P erit communis divisor, quem postulabas. Ratio patet ex Lemmate jam demonstrato; sed ut magis rem teneas, sic argumentemur. Si P diviso per D residuum est zero: ergo P exacte dividit D:
ergo

ergo pariter exacte dividet D ductum in $\frac{x}{c^2+y^2}$ hoc est quantitatem Q ; Et quo-

niam P dividit eodem modo E , exacte dividet etiam $Q+E$ id est B : ergo etiam B ductum in y seu N ; ergo etiam $N+D$ seu C exacte per P divideretur; sed pariter B in x id est M exacte per P dividitur; ergo etiam $M+C$, quod idem est ac A ; ergo & A , & B exacte dividuntur per P , adeoque P communis est earum formularum divisor; sed & maximus sit oportet; nulla enim alia quantitas perfecte residuum postremum divideret, id quod communis divisionis naturam postulare jam vidimus.

20. Reperiendus nunc sit communis divisor formularum Q, P , quæ secundum b sunt ordinatæ.

$$\begin{array}{l} Q. ab^2 - b^2 f + ax^2 - fx^2 \\ C. -cab + cfb + ax^2 - fx^2 \\ D. ax^2 - fx^2 + c^2 a - c^2 f \end{array} \quad P. ab - bf + ca - cf \Big| \begin{array}{l} b \\ -c \end{array}$$

Si Q per P dividatur, erit primum residuum C , quo pariter diviso per P , prodit residuum alterum D , quod non ultra potest per P dividi ordinatum secundum b . Non ideo tamen inferi debet quantitates Q, P nullum habere communem diviso-rem; nam si per litteras a vel f ordinentur, communis earum divisor $a-f$ invenitur. Ratio autem est, quia ut divisor communis reperiatur, necesse est formulas secundum aliquam divisoris litteram ordinari, quod ex hoc ipso exemplo satis inferitur; & quoniam nescimus, quæ litteræ in divisore contineantur, ideo antequam nullum hujusmodi esse pronunciemus, formulæ secundum litteras omnes erunt ordinandæ, quo facto si divisor communis non prodeat, tunc nullum revera esse constabit.

21. Quamvis quantitas aliqua ex. gr. c dividi non possit exacte per aliam $a+b$ & scribere cogamur $\frac{c}{a+b}$, ut quotum ex divisione indicemus, tamen in his etiam quantitatis habere possunt locum regulæ, quæ de divisione sunt traditæ. Igitur divisa c per a , quotus est $\frac{c}{a}$, hujus productum in divisorem subtrahere ut docuimus de c , erit residuum $\frac{-cb}{a}$, quod iterum per a divisum dat quotum $\frac{-cb}{a^2}$, hic in divisorem ductus dat productum $\frac{-cb}{a} \frac{-cb}{a^2}$, quod de more subtrahere ex $\frac{-cb}{a}$, habebisque residuum $\frac{cb^2}{a^2}$, quod si pariter divides per a , erit quotus $\frac{cb^2}{a^3}$, & sic deinceps operatione methodo eadem producta ibit divisio in infinitum & quotus integer fractionis $\frac{c}{a+b}$, æqualis erit seriei infinitis terminis constanti $\frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2} + \frac{cb^2}{a^3} - \frac{cb^3}{a^4} + \frac{cb^4}{a^5}$ &c.

22. Nunc si a & b æquales quantitates essent, fractio nota $\frac{c}{a+b}$ evaderet

ret $\frac{c}{2a}$, series vero in hanc mutaretur $\frac{c}{a} - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} + \frac{c}{a}$ &c.; ejus si termini vel duo, vel quatuor, vel quolibet numero pares in summam colligantur, erit ea zero æqualis; at si fiat summa terminorum vel unius, vel trium, vel quorumcumque liberit numero imparium, initio a primo factò, erit summa $\frac{c}{a}$; quæ per se clarissima nemini dubium creare possunt. Jam si utramque summam comparemus cum vero valore $\frac{c}{2a}$, statim cognoscimus, parium summam seu zero ab eo deficere per $\frac{c}{2a}$; summam vero imparium nempe $\frac{c}{a}$, eadem quantitate illum excedere, & ita rem se haberet quæcumque accipiat vel parium; vel imparium terminorum summa. Hac de causa dicitur hæc series parallela.

23. Quod si fingamus b majorem esse quam a , tunc seriei nostræ termini successive crescant necesse est, cum sequens terminus nihil aliud sit quam terminus antecessens ductus in $\frac{b}{a}$, quæ quantitas in hac hypotesi erit unitate major; ergo tum summa parium terminorum, tum summa imparium magis ac magis semper recedet a vero fractionis valore, illa quidem per defectum, hæc per excessum. Hujusmodi series divergens appellatur.

24. Si tertio supponamus b minorem quam a , termini successive decrescant, adeoque summx, de quibus dictum est, quo plures terminos colligent, eo ad fractionis valorem accedent magis, cujus accessus causa series convergens dicitur.

25. Series igitur tum parallela tum divergens nunquam aptæ erunt valorem fractionis neque verum, neque vero proximum exhibere, at egregie id prestabit convergens, eoque exactius, quo pluribus terminis summa conflabit; ita enim adeo accedet summa terminorum parium ad quæsitum valorem, ut ab illo per minimam quantitatem deficiat, & contra ita accedet summa terminorum imparium, ut illum minima quantitate superet, & utraque quantitas tum defectus tum excessus tuto contemni possit. Illud est etiam animadvertendum, quod quo majorem rationem a habet ad b , eo etiam magis termini successive decrescant; ideoque pauciores termini requirentur, ut proximus fractionis valor obtineatur.

26. Si in fractione esset b quantitas negativa, hoc est si esset $\frac{c}{a-b}$, tunc termini seriei omnes positivo signo afficerentur, quemadmodum ex operatione constare poterit, & hoc casu quælibet terminorum summa a vero valore semper deficeret, sed quo plures sumerentur termini, eo magis ad illum accederet.

27. Quamvis autem fractio, quam in seriem redegitur, numeratorem habeat simplicem c & denominatorem binomium $a+b$, non ideo tamen hæc methodus ad hujusmodi tantum fractiones extenditur, sed æque omnes complectitur. Ratio hujus est, quia numerator quilibet ad unicum terminum, quilibet denominator ad binomium perducitur nullo negotio potest. Sit enim fractio $\frac{c+d-e}{a+b+x+z}$, si ponamus numeratorem $c+d-e$ æqualem esse quantitati n , & $a+b+x+z$ æqualem quantitati m , fractio in hanc vertitur $\frac{n}{m}$. Quæ eandem omnino formam habet ac illa, de qua supra loquuti sumus; hac igitur tradita methodo in seriem redacta, & substitutis deinde valoribus m & n , habebimus seriem fractioni $\frac{c+d-e}{a+b+x+z}$ respondentem.

CAPUT TERTIUM.

Quantitatum radicalium algorithmus.

Quid sint, & quomodo orientur alicujus quantitatis potestates, dictum est supra Cap. I. num. 10. Nunc illud est animadvertendum, quod quantitas, ex qua oritur potestas, positiva esse potest, vel negativa. Si primum, patet potestatem quamlibet fore quantitatem positivam, veluti a^2, a^3, a^{-2}, a^{-3} , quæ sunt a positivæ quantitatis potestates, & ratio est, quia in hisce potestatibus efficiendis semper positivum ducitur in positivum. At si alterum accidat, tunc distinguendæ sunt potestates pares, nempe quarum exponents est numerus par, ab imparibus, quarum est exponents numerus impar; nam primæ semper exhibebunt quantitatem positivam, quum in illis negativum semper ducatur in negativum, reliquæ vero dabunt quantitatem negativam, quia in illis semper quantitas negativa per positivam multiplicatur; igitur quantitatis $-a$ potestas secunda a^2 erit quantitas positiva, quia oritur ex $-a \cdot -a$, at potestas tertia, quæ oritur ex $a^2 \cdot -a$, erit quantitas negativa idest $-a^3$. Ex hoc sequitur, quamlibet potestatem parem n quantitatis cujuslibet $a + b$ æque oriri posse ex $-a - b$, adeoque $\overline{a + b^n}$, ($\overline{-a - b^n}$ eandem positivam quantitatem significare; impossibile igitur omnino erit, quantitatem aliquam reperire vel positivam, vel negativam, cujus potestas par sit quantitas negativa; ex quo facile est inferre, quantitatem ver. gr. $-a^2$ nullius quantitatis esse potestatem, sed tantum productum ex $-a \cdot a$.

2. Adverte, ad designandam potestatem n quantitatis negativæ $-a - b$ usos nos fuisse lunula $($, & scripsisse $(\overline{-a - b^n})$. Hoc signum introducimus ad tollendam æquivocationem, quæ illo non adhibito facile oriri posset. Etenim $-a^n$ duo posset significare, nempe aut potestatem n quantitatis a signo $-$ afficiendam, aut $-a$ elevandam esse ad potestatem n ; quæ duo cum admodum sint diversa, necesse est ita scribendo distinguere, ut contundi non possint. Morem hunc itaque tenemus, cum lunulam non usurpamus, intelligimus quantitatem positivam a esse ad indicatam potestatem elevandam, & potestati signum illud præfigendum, quod scriptum legitur; ita $+a^n$, vel a^n est a elata ad potestatem n , quæ potestas afficitur signo $+$, & $-a^n$ eadem est a ad eandem elata potestatem, quæ potestas signo $-$ afficitur. Scribimus autem lunulam quoties quantitates negativæ ad potestatem sunt elevandæ; quo in casu signum $-$, quod est post lunulam, afficit ipsam quantitatem elevandam, signum vero, quod est ante lunulam respicit ejus quantitatis potestatem. Ita $+(\overline{-a^n})$ indicabit potestati n quantitatis $-a$ præfigendum esse signum $+$; contra $-(\overline{-a^n})$ potestati eidem præponi debere signum $-$. Hoc autem facimus vel potestates simplices sint, vel binomiz &c.; quare $+(\overline{-a - b^n})$ indicabit potestatem n quantitatis $a - b$ signo $+$ afficiendam, con-

tra $-(a-b)^n$ eidem proponendam signum $-$. At $+(a-b)^n$ ostendet $-a-b$ effereendam ad potestatem n , cui dandum signum $+$, contra eidem proponendam signum $-$, si scribas $-(a-b)^n$.

3. Quum itaque potestates dispares, si exhibeant quantitates negativas, a quantitatibus negativis ortum ducant, & si positivas, a positivis, ideo ut. subtrahamus $(-a-b)^3$ de c^3 , manifestum est nos posse scribere $c^3 + a + b^3$; nam cum quantitas $-a-b$ ad tertiam potestatem producta, ex dictis, habeat terminos omnes negativos, bi, quum subtrahantur, positivi efficiantur necesse est; ergo idem erit subtrahere $(-a-b)^3$, ac addere $a + b^3$. Eadem sermo de causa si de c^3 velimus subtrahere $a + b^3$, scribere possumus $c^3 + (-a-b)^3$, quod factis patet. At non eadem methodo uti possumus, quum agitur de paribus potestatibus subtrahendis; neque enim si detrahenda sit potestas $a + b^3$, vel $(-a-b)^2$ de c^2 , fas erit scribere $c^2 + (-a-b)^2$ in primo casu, aut $c^2 + a + b^2$ in secundo: nam licet mutantur signa quantitatis, unde potestas par oritur, non ideo, ut ostensum est, immutatur ipsius potestatis quantitas, quæ semper eadem perseverat, & cum iisdem signis; quapropter $c^2 + a + b^2$, $c^2 + (-a-b)^2$ sunt una, eademque quantitas. De subtractione tantum sermo fuit, quia in additione, quum signa mutari non debeant, nullum erroris habetur periculum.

4. Sicuti quælibet quantitas ad quancumque dignitatem evehi potest, ita quælibet quantitas potest esse dignitas, vel potestas quæcumque relate ad diversas quantitates: ita a^6 (Num. 10. c. 1.) est potestas sexta relate ad a , potestas tertia seu cubus relate ad a^2 , potestas secunda seu quadratum relate ad a^3 , & potestas prima ipsius a . Quantitas vero illa, cujus respectu quantitas aliqua dicitur esse potestas, vocatur ejus potestatis radix, & quidem eo nomine quo vocatur potestas. Exemplo res sit clazior. Diximus a^6 esse quadratum, vel secundam potestatem relate ad a^3 ; ita erit a^3 radix quadrata seu secunda relate ad a^6 ; pariter a^2 erit ipsius a^6 radix tertia, seu cubica, quia a^6 est cubus, seu potestas tertia quantitatis a^2 ; sic a erit radix sexta a^6 ; & in genere dicitur radix n quantitas quæcumque respectu alterius, quæ illius sit potestas n .

5. Occurrit hic statim per se, operationes directe contrarias esse, quantitate ad potestatem erigere, & ejus radices extrahere. Ut igitur has inveniamus, methodo utamur necesse erit omnino illi contraria, qua illas obtinimus; quapropter, sicuti in quantitate ad aliquam potestatem erigenda (Cap. 1. num. 11.) exponentem quantitatis per novæ potestatis exponentem multiplicavimus, ita per radiceis indicem, seu exponentem oportebit illum dividere, ut quæsitam potestatis radicem habeamus: igitur sicuti ut inveniremus quantitates a potestatem sextam fecimus $a^{1.6}$ seu a^6 , ita si agatur de extrahenda ex a^6 radice sexta fiet $a^{\frac{6}{6}}$ id est a^1 seu a , quæ est ejus potestatis radix sexta; pariter ut extraha-

trahamus ex a^6 radicem tertiam, scribemus a^2 , seu $a^{\frac{2}{3}}$, ut extrahamus secundam $a^{\frac{4}{3}}$ seu $a^{\frac{2}{3}}$, & sic de cæteris.

6. Quoad signa radicibus præfigenda, animadvertendum est quantitatem, ex qua radix educitur, positivam esse posse; & negativam. Si primum, tunc vel radicis index impar est, vel par; si impar sit, positivo signo affici debet radix, si par, tunc radicis valor non unus erit, sed duplex alter positivus, negativus alter; patent omnia ex num. 5; hinc ad ambas radices indicandas utimur utroque

signo \pm , ita radix secunda potestatis a^2 erit $\pm a$, quo modo indicatur duplicem esse radicem nempe a , & $-a$. Si vero, qui est casus alter, quantitas, ex qua radix extrahi debet, fuerit negativa, iterum vel radicis index est impar, vel par: si impar, radix erit negativa, si par radix erit impossibilis, & imaginaria; talis esset radix secunda quantitatis $-a^2$, quæ neque $-a$, neque a potest esse, ut supra ostendimus.

7. Ex methodo, qua radices inquirimus, ex divisione scilicet exponentium potestatis per radicis quæritæ indices, discimus quantitatis radicalis exponentem esse quotum ex ea divisione ortum. Ita radix tertia $\sqrt[3]{a+b^6}$, quàm sit $\sqrt[3]{a+b^2}$, id est $a+b^2$, habet exponentem 2 quotum ex divisione 6 per 3. At quotus iste sæpissime numerus integer esse non potest; ergo tunc quantitatis radicalis exponentens fractus sit oportet; ita accidit, si ex. gr. queramus radicem secundam

$\sqrt{a+b^3}$; hæc enim nullo alio modo exprimi potest nisi hoc $\sqrt{a+b^{\frac{3}{2}}}$. Scimus igitur quid sint potestates exponente fracto affectæ, quæ etiam potestates imperfectæ appellantur; ex nil aliud sunt nisi radices. Juxta hæc $a^{\frac{1}{2}}$ indicabit radicem

tertiam potestatis a^3 , & in genere $\sqrt[n]{b+c^m}$ indicabit radicem n quantitatis $b+c$ erectæ ad potestatem m .

8. Ad hæc radices, seu imperfectas potestates indicandas hoc etiam utimur signo $\sqrt{\quad}$, quod signum radicale appellatur. Sub quo scribitur quantitas unde radix erat extrahenda, supra vero radicis indicem, quam extrahere volebamus; unde $\sqrt[3]{a+b^3}$ idem est ac $\sqrt[3]{a+b^3}$, $\sqrt[4]{a^4}$ idem ac a , $\sqrt[n]{b+c^m}$ idem

ac $\sqrt[n]{b+c^m}$. In exemplo primo omittere poteram exponentem 3, quia jam usus obtinuit, ut ubicumque reperitur signum radicale sine exponente, subintelligatur exponens 2. Nil prohibet, quominus hisce duobus modis indicemus etiam radices impossibiles & imaginarias, qualis esset radix quadrata $-a^2$, aut radix

n (posito n numero pari) potestatis $-a^n$, nil prohibet, inquam, quominus eas ita scribamus $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[n]{-a^n}$. At si has imaginarias radices velimus per exponentes fractos exprimere, artificio opus est, ne in æquivocas formulas incidamus. Sit extrahenda radix quadrata quantitatis $-a^2$, si scribamus $-a^{\frac{2}{2}}$ in-

certum erit utrum hæc formula indicet $-a$, vel secundam radicem quantitatis $-a^2$; quare ad confusionem vitandam duplici utemur lunula ita $(-(a^2)^{\frac{1}{2}}$, aut spectata $-a^2$ tamquam producta ex $a^2 \cdot -1$, tum radix hoc modo extrahenda $\pm a^{\frac{1}{2}}$. ($-1^{\frac{1}{2}}$, aut $\pm a \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}$. Idem de radice n pari quantitatis $-a^m$ dicendum est; itaque scribemus $\pm (-(a^m)^{\frac{1}{n}})$, seu $\pm a^m (-1)^{\frac{1}{n}}$.

9. Quum ex supra dictis Num. 9. Cap. 2. sciamus fractiones ad eandem denominationem reducere, quin earum valor immutetur, sciemus etiam reducere ad exponentes ejusdem denominationis quascumque potestates. Etenim quum exponentes, vel fractiones sint vel numeri integri, qui in cujuscunque denominatoris fractionibus nullo negotio resolvuntur, iisdem profus regulis, quæ pro fractionibus traditæ sunt, rem conficiemus. Sint reducendæ ad eundem denominatorem

$\sqrt[3]{\frac{a+b^2}{3}}$, $\sqrt{x+y}$, seu $\sqrt[6]{\frac{a+b^2}{3}}$, $\sqrt[6]{x+y^2}$; nil aliud agendum, quam reducere fractiones $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{2}$, quæ quum, juxta regulas traditas, vertantur in $\frac{4}{6}$ & $\frac{3}{6}$, erunt radices nostræ $\sqrt[6]{\frac{a+b^2}{3}}$ seu $\sqrt[6]{\frac{a+b^2}{3}}$, $\sqrt[6]{x+y^2}$ seu $\sqrt[6]{x+y^2}$ ad eandem denominationem, & indicem deductæ, quin ulla in ipsarum valore sit facta immutatio. Hinc discimus etiam regulam expeditissimam redigendi radices ad eundem indicem, quæ ex radicalibus signis indicantur: nempe productum indicum erit index communis, & exponents quantitatis, quæ sub altero signorum est, du-

cendus erit in alterius indicem; sic $\sqrt{x^m}$ & $\sqrt{y^n}$ vertentur in has $\sqrt{x^{mn}}$, & $\sqrt{y^{mn}}$. Si radices plures essent quam duæ, duabus ad eundem indicem prius deductis reliquis deinde aggrediemur, quemadmodum de fractionibus Num. 10. Cap. 2. dictum est.

10. Si vero radicalis alicujus index sit perfectus alterius divisor, ut esset in his $\sqrt[3]{\frac{a+b^2}{3}}$, $\sqrt[6]{\frac{a+y^2}{3}}$, tunc satis erit multiplicare indicem 2 per 3 quotum ex divisione majoris indicis per minorem, & quantitatem sub signo positam ad potestatem erigere per quotum illum 3 indicatam; erunt igitur radicales $\sqrt[6]{\frac{a+b^2}{3}}$, $\sqrt[6]{\frac{a+y^2}{3}}$, quæ habent indicem omnino eundem. Patet hoc si radices alio, quem diximus, modo scribantur; tunc hanc formulam habebunt $\frac{a+b^2}{3}$, $\frac{a+y^2}{3}$; redige exponentes ad eundem denominatorem, quod obtines multiplicando per 3 numeratorem, & denominatorem fractionis $\frac{3}{2}$; sient $\frac{a+b^2}{6}$, $\frac{a+y^2}{6}$, quæ si scribantur cum radicali signo, dant easdem, quas antea invenimus radices.

11. Ut summam radicam habeamus, ipsæ alia post aliam scribantur cum suis signis; ut habeamus differentiam mutantur earum signa, quæ subtrahendæ sunt, quemad-

quemadmodum in aliis quantitatibus factum est. Duo hic animadvertere oportet, primum est nos hic loqui de signis non quæ sub signo radicali posita sunt, sed de iis quæ illud afficiunt; alterum est terminos similes ad eundem esse reducendos. En exempla.

$$\begin{array}{l} \text{Summandæ} \quad \sqrt[3]{ab} + c \\ \text{fiat} \quad - 2\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{abc} \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad c - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{abc}$$

$$\begin{array}{l} \text{Summandæ} \quad 3\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{abc} \\ \text{fiat} \quad - 4\sqrt[3]{ab} + 2\sqrt[3]{abc} \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad -\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{abc}$$

$$\text{Summandæ} \quad a + b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{fiat} \quad a + b^{\frac{1}{3}} - c^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{Summa} \quad a + a + b^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Hinc subtrahi} \quad \sqrt[3]{xy} + c$$

$$\text{debeat} \quad \sqrt[3]{cx} + y$$

$$\text{Differentia} \quad \sqrt[3]{xy} + c - \sqrt[3]{cx} - y$$

$$\text{Hinc subtrahi} \quad 4\sqrt[3]{ac} - 3\sqrt[3]{acb}$$

$$\text{debeat} \quad 2\sqrt[3]{ac} + 3\sqrt[3]{acb}$$

$$\text{Differentia} \quad 2\sqrt[3]{ac} - 6\sqrt[3]{acb}$$

$$\text{Hinc subtrahi} \quad -\frac{1}{2} (x+y)^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{debeat} \quad - (x+y)^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4} z^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Differentia} \quad \frac{1}{2} (x+y)^{\frac{1}{3}} + \frac{7}{4} z^{\frac{1}{2}}$$

12. Radices si potestatum more fiat expressæ, eodem plane modo multiplicentur, ac reliquæ potestates Cap. 1. Num. 11.; igitur $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}$ sive $ab^{\frac{2}{3}}$ erit productum ex $a^{\frac{1}{2}}$ in $b^{\frac{2}{3}}$; $a^{\frac{2}{3}}$ in $a^{\frac{1}{3}}$ dabit $a^{\frac{1}{3}}$ idest a ; $x^{\frac{1}{2}}$ in $y^{\frac{1}{2}}$ dabit productum $x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ seu $xy^{\frac{1}{2}}$, sed $x^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{2}}$ sunt idem ac \sqrt{x} , \sqrt{y} , & earum productum $xy^{\frac{1}{2}}$ idem

idem ac $\sqrt[n]{x^m y}$; ergo hinc discimus, radices expressas per signum radicale, si ejsdem sint indicis, tunc multiplicari, quum retento indice eodem inter se quantitates multiplicentur, & earum productum signo subjicitur; si radices coefficientes habeant, ij quoque sunt inter se multiplicandi: ita productum radicum.

$a \sqrt[n]{x}$, $2 \sqrt[n]{y}$ erit a $2 \sqrt[n]{x^m y}$; $5 \sqrt{a}$ in $4 \sqrt{b}$ dabit $20 \sqrt{ab}$. Diligenter notan-

dum est, productum ex $\pm \sqrt{b}$ in $\pm \sqrt{b}$ esse $\pm \sqrt{b^2}$ id est $\pm b$ cum signo duplici, quod, quum de radicibus agitur, nullo modo est prætermittendum. Diximus supra si radices ejsdem sint indicis; nam si non essent tunc prius ad eundem essent reducendæ, ut docuimus Num. 9., quod etiam dictum intellige, quando radices per exponentes fractos, & litteras eadem exhibentur; tunc enim ad eundem denominatorem exponentes redigere oporteret, ut summa eorum haberi posset.

13. Quum $\sqrt[n]{x}$ in $\sqrt[n]{x}$ det $\sqrt[n]{x^2}$, quod erit ejus radices $\sqrt[n]{x}$ quadratum, & $\sqrt[n]{x^2}$ in $\sqrt[n]{x}$ det $\sqrt[n]{x^3}$, qui est ejsdem radices cubus &c. sequitur nil aliud requiri ad radicem erigendam ad potestatem quamcumque m , quam erigere

ad dictam potestatem m quantitatem sub signo radicali positam; ita $\sqrt[n]{x}$ ad

potestatem m erecta erit $\sqrt[n]{x^m}$; & sicuti $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{x^m}$ æquivalent his $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{\frac{m}{n}}$, patet multiplicandum esse exponentem fractum per m , ut radicem sub hac forma ad potestatem m perducamus. Idem omnino dicendum est, quæcumque sit ista potestas m seu integra, seu fracta. Si radices præditæ sint coefficientibus, ipsi

quoque ad potestatem erigendi erunt, ad quas radices perducuntur; ergo $a \sqrt[n]{y}$ seu $a y^{\frac{1}{n}}$ erecta ad potestatem m erit $a^m \sqrt[n]{y^m}$, seu $a^m y^{\frac{m}{n}}$, quod etiam hoc modo indicatur $a y^{\frac{1}{n}}$.

14. Ut quantitas radicalis ad potestatem attollatur, cujus exponentis sit ipfius radices index, sufficit ejicere signum radicale: ita $\sqrt[n]{x}$ erecta ad potestatem n est x . Id etiam fiet, si quando accidat, ut ex multiplicatione ad ejusmodi potestatem perveniat; ita $\sqrt[6]{a^2}$ in $\sqrt[6]{a^4}$ dat $\sqrt[6]{a^6}$ id est a^1 , quod idem est ac a . At hic attente signa sunt consideranda, ut errorem omnem vitemus. Itaque ut regulam certam habeas, illud animadverte, quod alibi monuimus, id est quamlibet quantitatem intelligi multiplicatam in unitatem, quæ unitas eo signo afficiatur, quo ipsa quantitas; ergo $\sqrt[n]{a+b}$ considerabitur tamquam $1 \cdot \sqrt[n]{a+b}$, & $-\sqrt[n]{a+b}$ tanquam $-1 \cdot \sqrt[n]{a+b}$; quare productum ex $\sqrt[n]{a+b}$ in $-\sqrt[n]{a+b}$ idem erit ac productum $1 \cdot \sqrt[n]{a+b}$ in $-1 \cdot \sqrt[n]{a+b}$, quod est $-1 \cdot a+b$, id est $-a-b$.

15. Contraria methodo uti oportet, quum de radicibus dividendis agitur. Vel ergo radices exhibentur cum exponentibus, & tunc fit earum divisio, quemadmodum fit divisio potestatum integralium; vel exprimentur per signum radicale, & tunc

& tunc si radices ejsdem sint indicis, dividitur quantitas existens sub signo in radice dividenda per eam, quæ est sub signo in dividente, & coefficientis illius, si addit per hujus coefficientem; si vero habeant indices diversos, vel ad eundem reducuntur, vel indicatur divisio more reliquarum fractionum. Ex his descendit $a^{\frac{1}{2}}$ divisam per $a^{\frac{1}{2}}$ dare quotientem $a^{\frac{1}{2}}$, sive $a^{\frac{1}{2}}$;

$a^{\frac{1}{2}}$ per $b^{\frac{1}{2}}$ dare quantitatem $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$ sive $a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{b \times^{\frac{1}{2}}}$ per $a \times^{\frac{1}{2}}$ sive $b^{-\frac{1}{2}} \times^{\frac{1}{2}}$ per $a \times^{\frac{1}{2}}$ quotientem $\frac{a}{b}$; quotientem ex divisione $ab \sqrt[3]{xy}$ per $-b \sqrt[3]{x}$ esse $-a \sqrt[3]{y}$; ex

$a^2 \sqrt[3]{cd}$ per $a^2 \sqrt[3]{g}$ esse $\frac{\sqrt[3]{cd}}{\sqrt[3]{g}}$; ex $\sqrt[3]{a}$ per $y \sqrt[3]{b}$ esse $\frac{x}{y} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; ex $x \sqrt[3]{a}$ per $y \sqrt[3]{a}$ esse $\frac{x}{y}$; denique $a \sqrt[3]{b}$ divisam per $x \sqrt[3]{b}$ dare quotum $\frac{a \sqrt[3]{b}}{x \sqrt[3]{b}}$ & c. Quom-

niam $\sqrt[3]{bx^n + cx^n}$ æquivaleret producto $\sqrt[3]{b+c} \cdot \sqrt[3]{x^n}$, & $\sqrt[3]{x^n}$ est x , erit $\sqrt[3]{bx^n + cx^n}$ æqualis $x \sqrt[3]{b+c}$; hinc quoties quantitas existens sub signo radicali erit multiplicata per potestatem, cujus exponents radice indicis sit æqualis, poterit quantitas per eam dividi, & quoto sub signo relicto scribere extra ipsum loco coefficientis radicem potestatis, quin valor immutetur: & vice versa poterit quantitas sub signo multiplicari per eam, quæ locum obtinet coefficientis, dummodo hæc ad potestatem prius erigatur, quæ per radice indicem innuitur: adeoque $x \sqrt[3]{b+c}$ idem erit ac $\sqrt[3]{bx^n + cx^n}$.

16. Ut e quantitibus radicalibus extrahamus radices, methodus erit illæ contrariæ, quæ usi sumus, ut eas ad potestates reduceremus. Igitur necesse erit radicem extrahere quantitatis existentis sub signo; quare radix quadrata $\sqrt[4]{a^4}$ erit $\sqrt[4]{a^4}$; radix tertia, seu cubica $\sqrt[3]{a^3}$ erit $\sqrt[3]{a^3}$, quam scribi etiam posse $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$ satis ex supra dictis inferitur; quæ scribendi forma significat radicem tertiam radice secundæ quantitatis a . Vocantur hi radicales radicalium, & cum ipsis eodem modo agitur, atque cum aliis hæctenus egimus. Si vero radices tamquam potestates exprimaantur per fractos exponentes, erunt exponentes ipsi per indicem extrahendæ radice dividendi; sic radix secunda $\sqrt[2]{a+b^{\frac{1}{2}}}$ erit $a+b^{\frac{1}{2}}$ &

in genere radix m quantitatis $x-y^{\frac{1}{n}}$ erit $x-y^{\frac{1}{nm}}$. Ad summam patet ex traditis regulis, in multiplicandis, dividendis, erigendis ad potestatem quamcumque potestatis exponentis fracti, earumque radicibus extrahendis, eadem habere locum, quæ potestatis integris inserviunt.

17. Multiplicatio quantitatum radicalium compositarum eodem fit modo, quo integralium; idest quisque terminus factoris unius per alterius singulos terminos multiplicatur. Subjicimus exemplum.

Facto-

$$\begin{array}{r} \text{Facto- } 3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} - 4d \\ \text{res } -3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} \\ \hline -gab - 6a\sqrt{bc} + 12d\sqrt{ab} + 4ac - 8d\sqrt{ac} \\ + 6a\sqrt{bc} \end{array}$$

$$\text{Productum } -gab + 12d\sqrt{ab} + 4ac - 8d\sqrt{ac}$$

Idem exemplum proponitur adhibitis non signis radicalibus sed exponentibus fractis.

$$\begin{array}{r} \text{Facto- } 3 \cdot \overline{ab^{\frac{1}{2}}} + 2 \cdot \overline{ac^{\frac{1}{2}}} - 4d \\ \text{res } -3 \cdot \overline{ab^{\frac{1}{2}}} + 2 \cdot \overline{ac^{\frac{1}{2}}} \\ \hline -gab - 6a \cdot \overline{bc^{\frac{1}{2}}} + 12d \cdot \overline{ab^{\frac{1}{2}}} + 4ac - 8d \cdot \overline{ac^{\frac{1}{2}}} \\ + 6a \cdot \overline{ab^{\frac{1}{2}}} \end{array}$$

$$\text{Productum } -gab + 12d \cdot \overline{ab^{\frac{1}{2}}} + 4ac - 8d \cdot \overline{ac^{\frac{1}{2}}}$$

18. Regulas pariter divisionis quantitatum compositarum sequitur divisio radicalium compositarum. En exemplum.

	Dividendum	Divisor
	$-gab + 4ac + 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$	$-3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac}$
Productum 1. subtractum	$gab - 6a\sqrt{ac}$	Quoti partiales
Primum residuum	$0 - 6a\sqrt{bc} + 4ac + 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$	$3\sqrt{ab}$
Productum 2. subtractum	$6a\sqrt{bc} - 4ac$	$2\sqrt{ac}$
Secundum residuum	$0 \quad 0 \quad 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$	$-4d$
Productum 3. subtractum	$-12d\sqrt{ab} + 8d\sqrt{ac}$	Quotus totalis
	$0 \quad 0$	$3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} - 4d$

quod ita se habere constat exemplo superiore.

19. Etsi num. 6. diximus, radices quascunque pares quantitatis, quæ negativa sit, impossibiles omnino esse & imaginarias; nihilominus ex quoque summantur, subtrahuntur, multiplicantur & dividuntur eodem modo, quo reliquæ, reales & veræ. Sic summa duarum $\sqrt{-a^2}$, $-3\sqrt{-a^2}$ erit $-2\sqrt{-a^2}$; summa $-\sqrt{-x^2}$, $\sqrt{-y^2}$ erit $-\sqrt{-x^2} + \sqrt{-y^2}$; summa $b + \sqrt{-a^2}$, $b - \sqrt{-a^2}$ erit $2b$. Si subtrahamus $\sqrt{-a^2}$ de $-3\sqrt{-a^2}$ est differentia $-4\sqrt{-a^2}$; si subtrahamus $b + \sqrt{-x^2}$ de $c + \sqrt{-x^2}$ differentia est $c - b$. Radices $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-c}$ multiplicentur, ut dictum est, eo modo quo radices reliquæ num. 12: at facillime hic in errorem incidimus in signis producto præfigendis; cui errori ut aditum præcludamus, scribantur factores ita $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{c}$; quod fieri posse constat ex num. 8. Multiplicentur modo; erit productum $-1 \cdot \sqrt{bc}$ seu $-\sqrt{bc}$. Nisi hanc adhibuissimus curam, fuisset productum \sqrt{bc} , quod fortasse

tasse aliquis positivum existimasset, quum re vera sit negativum. Nam $\sqrt{-a}$ in $\sqrt{-a}$ nonne dat $-\sqrt{a^2}$ seu $-a$ productum negativum? minime vero $\sqrt{a^2}$ seu a . Patet quia radix quadrata in se ipsam ducta id in producto dare debet, cujus est radix; rem ita se habere in hoc exemplo cognitu est facile, quia quantitates, quæ multiplicantur, identicæ sunt; at ubi sunt quantitates diversæ, veluti illæ, quas posuimus antea $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$, quorum productum eodem pacto negativum esse debere scimus, ut errorem vitemus ad illam factorum resolutionem confugimus. Ut $\sqrt{-bc}$ per $\sqrt{-c}$ dividas, quare quotum $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{bc}$ divisum per $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{c}$, erit ille $1 \cdot \sqrt{b}$ seu \sqrt{b} . Hæc de imaginariis dicta sufficiant.

20. Methodum hic tantum proponimus, qua radices quadratæ & cubicæ quantitatum compositarum extrahantur; de reliquis alibi erit sermo, ubi generalem pro illarum extractione regulam assignabimus. Radicis quadratæ extrahendæ ratio innotescit ex methodo, qua ad quadratum ipsæ quantitates eriguntur. Fiat quadratum binomii $a+x$ seu $-a-x$; in utroque casu illud erit $a^2+2ax+xx$; ergo binomii quadratum complectitur simul quadrata duorum terminorum suæ radicis, & insuper duplum rectangulum ex ipsis terminis.

21. Et quum quodlibet polynomium $b-c+d$, &c. tanquam binomium accipi possit, cujus primus terminus sit b , secundus sit $-c+d$ &c. patet quomodo polynomium quodcumque ad quadratum erigatur. Nempe accipitur quadratum primi termini b , cui addatur duplex productum ex b in secundum terminum, & hujus secundi termini quadratum. Quare quadratum polynomii $b-c+d$ erit $b^2-2bc+2bd+cc-2cd+dd$.

22. Hoc posito extrahi debeat radix quadrata quantitatis $a^2+2ax+xx$; Considera hoc tanquam binomii alicujus quadratum, & primo extrahere radicem de a^2 ; ea est $\pm a$, quam habe tanquam primum binomii terminum, & ejus quadratum subtrahere de quantitate proposita; residuum erit $2ax+xx$, in quo, ut constet ex numero superiori, quadratum alterius termini contineri debet simul cum producto ex $2a$ termino invento per illum laveniendum multiplicato. Ut igitur terminum hunc secundum invenias, divide, quem potes, residui terminum per $\pm 2a$, in casu quotiens est $\pm x$, cujus producto in $\pm 2a$, & ejus quadrato x^2 subtracto, quoniam nil superest, erit exacta radix quadrata propositæ quantitatis $\pm a \pm x$.

23. Sit extrahenda radix quadrata quantitatis $b^2-2bc+c^2+2d$. $b^2-2bc+c^2+2d$. Hæc ordinetur secundum aliquam litteram ex. gr. c , & fiat $c^2-2bc+c^2+2bd+b^2+dd$. Radix primi termini est $\pm c$: subtracto hujus quadrato, & diviso primo residui termino per $\pm 2c$ est quotus $\mp b \mp d$; si detrahamus, ut supra docuimus, hujus quoti productum in $\pm 2c$, & præterea ejus quadratum, videmus nil superesse; ergo radix quaesita est $\pm c \mp b \mp d$; & revera utriusque trinomii $c-b-d$, $-c+b+d$ quadratum est quantitas proposita.

24. Si autem quantitas, cujus radix postulatur, non fineret, ut hac via posset educi, quemadmodum id non pateretur a^2+x^2 , vel $b^2+2ax+xx$, in quibus

bus, dum radicem investigamus, semper novi exurgunt termini, tunc indicium est, radicem perfecte haberi non posse; quapropter utimur signo radicali, ut radicem indicemus, scribimusque $\pm \sqrt{a^2 + x^2}$, $\pm \sqrt{b^2 + 2ax + x^2}$ cum signo duplici positivo & negativo, quando sermo est de radicibus indicis parvis, inter quas est quadrata.

25. Antequam radices cubicas extrahamus, juvat animadvertere quinam sit binomii cubus. Sit binomium $a+x$; ejus cubus erit $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$; igitur cubus binomii complectitur cubos utriusque termini, & præterea productum quadrati primi termini ter accepti in secundum, & quadrati secundi pariter ter accepti in primum; quumque polynomium quodcumque pro binomio haberi possit, hæc habebuntur in eujuscunque polynomii cubo. Quærat igitur radix cubica quantitatis $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$, quæ per a ex. gr. sit ordinata. Suppono hunc esse cubum binomii: extracta radice cubica primi termini, quæ est a , hanc considero tamquam primum binomii terminum; & subtracto deinde cubo hujus termini, ut alterum habeam, quem scio reperiri in cubo multiplicatum per triplum quadrati termini primi, divido primum terminum residui $3a^2x + 3ax^2 + x^3$ per $3a^2$ triplum quadrati termini jam inventi: quotiens est x ; hujus quadratum nempe x^2 ductum in $3a$, id est $3ax^2$, & ipsius x cubus x^3 ex supra traditis de residuo subtrahi debet; & quoniam subtractione facta nihil superest, dico $a+x$ esse quantitatis propositæ radicem cubicam.

26. Exemplum aliud: esto quantitas

$$\begin{aligned} x^3 + 6ax^2 + 12a^2x + 8a^3 + 12a^2b + 6b^2a + b^3 \\ + 3bx^2 + 12abx \\ + 3b^2x \end{aligned}$$

ordinata secundum x ; ejusque radix cubica sit extrahenda. Quæro radicem cubicam primi termini; ea est x , cujus cubum subtraho, & primum residui terminum $6a + 3b$. x^2 divido per $3x^2$; quotientis $2a + b$ productum in $3x^2$, & $3 \cdot 2x + b^2 \cdot x$, & $2a + b^3$ subtraho; quoniam nullum est residuum, $x + 2a + b$ erit perfecta radix cubica, quæ fuit quærenda. Si hac methodo perfectæ radices cubicæ non reperiuntur, tunc illæ exacte extrahi nulla arte poterunt. Id accidit in plurimis quantitibus ex. gr. $a^3 + x^3$, $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + b^3$. Tunc ut radices tertias indicemus, utimur radicali signo, ut in quadratis fecimus, & scribimus $\sqrt[3]{a^3 + x^3}$, $\sqrt[3]{x^3 + 3a^2x + 3a^2x + b^3}$.

27. Diximus supra, quantitatis $x^2 + a^2$ perfectam radicem quadratam extrahi non posse; at, quamvis id verum sit, possumus tamen radicem quadratam talem inde educere, quæ ad perfectam (etsi eam nunquam attingamus) magis semper magisque accedat. Id obtinebimus, si producta operatione nostra habeamus radicem expressam per seriei convergentem infinitis constantem terminis. Etenim quamvis infinitæ seriei summa haberi non possit, atque adeo in casu haberi non possit perfectus radicis valor; tamen tot terminorum summa effici poterit, ut defectus vel excessus minimus prorsus sit, & tuto contemnendus.

28. Ut res melius pateat. Sit quantitas $x^2 + a^2$, cujus radicem quadratam posuimus. Hanc de more fingo esse quadratum binomii, & extraho radicem primi termini, scilicet x , quæ mihi est primus terminus quæstii binomii & seriei infinitæ, de qua supra, & hujus quadratum subtraho: deinde per $2x$ divido residuum,

quotiens est $\frac{a^2}{2x}$, qui erit terminus alter seriei & binomii: igitur, num. 20, subtraho de residuo a^2 quotientis hujus productum in $2x$, & ejus quadratum; erit

residuum secundum $\frac{-a^4}{4x^2}$. Hoc residuum facit, ne duo termini inventi $x + \frac{a^2}{2x}$

sint perfecta radix nostræ quantitatis; at nunc $x + \frac{a^2}{2x}$, cujus jam quadratum subtrahitur, fingatur esse primus binomii terminus, & producta operatione, quarum

secundum. Divido igitur residuum per $2x$, quotiens $\frac{-a^4}{8x^3}$ erit tertius seriei terminus; subtraho ejus productum in duplum primi termini binomii, nempe

in $2x + \frac{a^2}{x}$, & ejus quadratum; & habeo residuum tertium $\frac{a^6}{8x^4} - \frac{a^6}{64x^6}$. Hujus

residui gratia considero nunc tamquam primum terminum binomii quantitatem $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3}$, & iterum divido primum residui terminum per $2x$, & quotien-

tem $\frac{a^6}{16x^5}$ quartum seriei terminum duco in duplum primi termini, & efficio e-

jus quadratum, & hæc omnia subtraho de residuo, & iterum residui novum terminum per $2x$ divido, & sic in infinitum novi semper termini reperientur seriei

infinitæ $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5}$ &c. Series hæc ut convergens sit, necesse est

ut terminus x^2 quantitatis propositæ sit major quam a^2 ; tunc enim termini seriei successive minores fient. Perducta in seriem radice quadrata binomii alicujus $a^2 + x^2$, eadem methodo obtinetur series exprimens radicem similem polynomii

cujuscunque, quod ut sæpius diximus tanquam binomium haberi potest.

29. Eodem pacto licet perfecta radix cubica extrahi non possit de quantitate $x^3 + a^3$, ea tamen obtineri potest proxime per seriem convergentem operatione producta. Extrahitur radix cubica primi termini, idest x ; subtrahito ejus cubo,

residuum a^3 dividitur per $3x^2$ triplum quadrati ejusdem; quotiens $\frac{a^3}{3x^2}$ erit

secundus seriei terminus, ejus productum in triplum quadrati primi termini x , una cum triplo quadrati ejus in eundem terminum primum, & cubo ipsius subtrahere oportet de residuo a^3 ; subtractione hac habita residuum alterum est

$\frac{-a^6}{3x^3} - \frac{-a^9}{27x^6}$. Nunc quantitas $x + \frac{a^3}{3x^2}$ consideranda est tanquam primus binomii terminus, cujus cubum jam subtraximus. Procedamus igitur, & per $3x^3$ dividamus primum residui terminum; erit quotus $\frac{-a^6}{9x^3}$ tertius seriei terminus:

hunc per triplum quadrati primi termini, nempe per $3x + \frac{a^3}{3x^2}$ multiplicemus; & insuper triplum quadrati ejus ducamus in $x + \frac{a^3}{3x^2}$, & facta quotientis cubo hæc omnia subtrahamus de residuo illo; habebimus ita residuum tertium, cujus primum terminum eadem ratione dividamus per $3x^3$, & quotiens erit quartus seriei terminus; & sic eadem operatione repetita in infinitum terminos quotlibet inveniemus in serie $x + \frac{a^3}{3x^2} - \frac{a^6}{9x^3}$ &c. quæ series si convergens sit, id est si x^3 sit major quam a^3 , ad numerum aliquem terminorum deveniemus, quorum summa adeo proxime ad quæsitæ radicis valorem accedat, ut ea sine erroris periculo pro radice vera accipi possit. Et quoniam polynomia quæcunque pro binomiis haberi possunt, patet ratio, qua radices cubicæ polynomiorum per series queant obtineri. Hæc sunt, quæ modo de radicum extractione e quantitibus compositis tradenda erant. Cæterum alibi generalem methodum ostendemus, qua radix quælibet ex hujusmodi quantitibus extrahi possit, & tunc expeditior etiam patebit via ad quadratas & cubicæ, de quibus hic egimus, extrahendas.

CAPUT QUARTUM.

De resolutione æquationum primi gradus.

1. **R**atio æqualitatis, quæ inter duas quantitates intercedit, æquatio dicitur, & signo = indicatur, quod signum æqualitatis appellamus: ita $ax + bx = c^2$ significat quantitatem $ax + bx$ æqualem esse quantitati c^2 . Quantitas, quæ ante signum est, dicitur primum æquationis membrum, ea, quæ est post signum, dicitur membrum alterum, & homogeneum comparationis. Litteris alphabeti primis indicari solent quantitates cognitæ, incognitæ postremis; sic $ax + bx = c^2$ indicat quadratam notum c^2 producto incognitæ x in cognitam $a + b$ æquari.

2. Si quantitas $ax + bx$ non æqualis esset, sed major, quam c^2 , hoc modo id exprimeretur $ax + bx > c^2$; si vero esset minor ita, $ax + bx < c^2$. Hæc scribendi forma $a:b::x:y$ ostendit quantitates illas esse in proportionem geometricam,

trica, nempe ita geometricæ se habere a ad b , quemadmodum x se habet ad y ; seu geometricam rationem a ad b eandem esse ac rationem x ad y ; quæ quidem ratio duobus illis punctis etiam hac de causa indicatur, quia & plures illis utuntur tamquam divisionis signo, & rationem duarum quantitatum nihil aliud esse jam scimus, quam antecedentem divisum per consequentem. Hic juvat animadvertere, quantitatem quamlibet finitam divisam per o ut $\frac{a}{o}$ esse quantitatem in-

finitam, est enim o ad a , ut 1 , ad infinitum. Infinitum autem hoc signo ∞ solet exprimi. Si ratio a ad b major sit ratione x ad y , scribimus $a:b > x:y$; si vero minor $a:b < x:y$. Cum tres ex. gr. a, x, y , vel plures quantitates proportionem habent continuam, eam indicamus ita $a::x::y$; aliqui utuntur etiam hoc signo $\div:: a::x::y$, quod idem significat, id est a esse ad x quemadmodum eadem x ad y .

3. Iisdem signis, quibus proportio geometrica, indicantur etiam aliarum proportionum arithmetica, harmonica &c., sed tunc semper additur illius proportionis nomen, de qua agitur; quod nisi fiat, intellige sermonem esse de geometrica. Quoties proportio habetur, semper haberi potest æquatio; namque in proportione geometrica, ut notum est, productum extremorum æquat productum mediorum, aut si proportio continua sit, quadratum termini intermedii; unde si sit

$$a:b::x:y, \text{ erit } ay = bx, \text{ \& si } a::x::y, \text{ erit } ay = x^2.$$

4. In arithmetica vero proportionem summæ extremorum æquat mediorum summam, vel duplum termini medii, si sit continua; ita si arithmetice sit $a:b::x:y$ erit $a+y = b+x$, vel posita $a::x::y$, erit $a+y = 2x$.

5. Proportio harmonica in geometricam resolvitur, namque tunc tres quantitates in harmonica proportionem esse dicuntur; cum prima ad tertiam ita geometricæ se habet, ut differentia inter primam, & secundam est ad differentiam inter secundam, & tertiam; quapropter si harmonice sit $a::x::y$, erit geometricæ $a:y::a-x:x-y$, vel $a:y::x-a:y-x$, adeoque æquatio erit $ay - xy = ax - ay$, vel $yx - ay = ay - ax$, quæ eadem est ac alia signis mutatis.

6. Equationes, quæ unam tantum habent incognitam, dicuntur *determinatae*; talis esset $ax + b = c^2$, in qua x tantum est quantitas ignota. *Indeterminata* vocantur illæ, quæ incognitas plures continent. Ejusmodi esset æquatio $2xy + cy = abc + a^2$, in qua duæ sunt quantitates incognitæ x, y . De his alibi agemus. Æquatio appellatur *primi gradus*, vel *simplex*, vel *linearis*, quum incognita primam dimensionem, vel potestatem non excedit, uti esset $x + c = a$, $a^2x + b^3 = c^3$. Dicitur *secundi gradus*, *quadrata*, *plana*, quum in æquatione maxima potestas incognitæ est quadratum. *Tertii gradus*, *solida*, vel *cubica* æquatio est, in qua incognita reperitur eversa ad dimensionem tertiam, & in genere dicitur æquatio gradus n , si in ipsa incognita ad potestatem n ascendat.

7. Ideo præcipue æquationes instituuntur, ut incognitæ quantitatis valor inveniatur. Si enim operationum auxilio ita utramque æquationis partem (salva tamen æqualitate) versare possimus, ut in una sola supersit incognita quantitas, in altera tantum cognitæ quantitates habeantur, tunc incognitæ valor est inventus; quod vocatur *æquationem resolvere*; valor inventus dicitur *æquationis radix*, quæ modo est positiva, modo negativa, modo imaginaria, prout diversæ fuerint circumstantiæ.

8. Dixi-

8. Diximus, eas debere esse operationes, quæ æqualitatem non turbent: hæc autem erunt, utrique membro addere, vel demere partes æquales, vel quantitatem eandem, verbi gratia si posita æquatione $ax + cx = b^2$ addas utrique parti quantitatem f^2 , potest fore $ax + cx + f^2 = b^2 + f^2$, vel $ax + cx - f^2 = b^2 - f^2$, si illam subtrahas. Est pariter manifestum, esse æqualitatem omnino salvam, si membrum utrumque æquationis per eandem quantitatem, vel per quantitates æquales multiplices, vel dividas. Igitur si vera sit æquatio,

quam supra attulimus, erit etiam $fax + fcx = fb^2$; $\frac{ax + cx}{f} = \frac{b^2}{f}$. Neque

æqualitas amittitur, si duo æquationis membra ad eandem potestatem n attolantur, vel si eorum quæcunque radix n extrahatur; patet enim, quantitatum æqualium potestates inter se æquales esse debere, sicuti & æqualium potestatum

radices; ergo erit $\sqrt{ax + cx} = b^{2n}$, & $\sqrt{ax + cx} = 1^{2n}$. Possimus etiam loco unius quantitatis aliam substituere, quæ illi sit æqualis; ita data æquatione

$ax + cx = b^2$, si sciam esse $c = \frac{n}{m}x$, nemo non videt futurum $ax + \frac{n}{m}x = b^2$,

& si habeatur $x = a + b$, & sit $b = c + d$ erit $x = a + c + d$. Hac operatione læpissime utuntur Analystæ, ut infra videbimus.

9. Hæc ferme operationes sunt, quarum ope ad æquationum solutionem venimus. Omnis in eo posita res est, ut ea inter cæteras operatio eligatur, quæ ad intentum finem maxime conducatur, quod quidem non adeo facile est existimandum; sæpe non minimam habet difficultatem, eoque majorem, quo major est gradus æquationis solvendæ. Ideo nihil intentatum reliquerunt Analystæ, ut hanc difficultatem minuerent, certasque methodos traderent, quibus propositum finem atque remur. Ut hos addiscamus, incipere oportet ab æquationibus primi gradus, ab iis scilicet, in quibus incognita dimensionem primam non excedit.

10. In his æquationibus, ut incognitæ valorem inveniamus, primo curandum est, ut termini omnes, qui incognitam ipsam continent ex una signi æqualitatis parte reperiantur, ex altera vero reliqui omnes, qui illa carent, hoc facillime obtinebitur transferendo, cum opus fuerit, terminos ex una parte ad aliam signis mutatis; quod idem esse atque demere, vel addere quantitatem eandem utrique æquationis membro, ex algorithmo satis constare potest. Hoc posito si incognita vel sit multiplicata, vel divisa per aliquam quantitatem, per eam tota æquatio erit vel dividenda, vel multiplicanda: ita procul dubio efficiemus, ut unum membrum solum habeat incognitam, alterum quantitates notas, quæ incognitæ valorem ostendent. Exempla aliquot afferamus.

11. Resolvere oporteat æquationem $x - b + c = a$. Juxta ea, quæ modo diximus, necesse erit deducere a primo membro quantitatem $-b + c$, ut incognita sola remaneat; ut fiet æqualitas, eandem oportebit subtrahere etiam de secundo; erit igitur $x - b + c + b - c$ id est $x = a + b - c$, quod idem habuissimus transferendo ex altera parte $-b + c$ signis mutatis.

12. Sit æquatio $ax + bc = mx + na$. Transfer mx in primum membrum, bc in secundum signis mutatis, habebis $ax - mx = na - bc$, in qua

æquatione termini continentes incognitam ex una signi parte omnes reperiantur. Nunc quoniam x reperitur ducta in $a - m$, per hanc quantitatem dividè æquationem totam, erit $x = \frac{na - bc}{a - m}$. Sit æquatio $\frac{x}{b} - \frac{d}{m} = \frac{a}{c}$; translato termino $-\frac{d}{m}$ fit $\frac{x}{b} = \frac{a}{c} + \frac{d}{m}$, & æquatione hac multiplicata per b fit $x = \frac{ab}{c} + \frac{db}{m}$.

13. Proponatur æquatio $\frac{ay}{c} - b = \frac{dy}{f} + \frac{mn}{g}$, in qua incognita est y . Æquationem a divisoribus libera, successive per omnes facta multiplicatione. Multiplica primum per c , ut habeas $ay - bc = \frac{cdy}{f} + \frac{mnc}{g}$; tum per f , ut fit $afy - bcf = cdy + \frac{mncf}{g}$; demum per g , ut oriatur $afgy - bcfg = cdyg + mncf$. Jam vero translatis de more terminis, erit $afgy - cdyg = bcfg + mncf$, seu $y \cdot \frac{afg - cdg}{afg - cdg} = \frac{bcfg + mncf}{afg - cdg}$. Quare facta divisione per $afg - cdg$ erit $y = \frac{bcfg + mncf}{afg - cdg}$. Sit æquatio $\frac{a}{x} - \frac{m}{n} = \frac{c}{b}$. Multiplicetur per x , n , b , ut omnes divisores arceantur, & fiet $abn - bm^2 = cnx$, sive $abn = cnx + bm^2$, sive $\frac{abn}{cn + bm} = x$.

14. Hoc pacto valor incognitæ reperitur in æquationibus, quæ unam habent incognitam dictam ideo solitariam. Quod si æquatio plures incognitas complectatur, tunc dumodo quot incognitas tot etiam æquationes habeamus, methodis, quas tradidimus id assequemur, ut eam ad præcedentium formam reducamus. Prima methodus postulat, ut assumpta qualibet ex datis æquationibus, in illa incognitas omnes veluti cognititas consideremus una dempta, cujus valorem expressum per cognititas, aliasque incognitas juxta regulas supra traditas inquiramus. Hic valor in reliquis æquationibus loco suæ incognitæ substitutus efficit, ut incognitarum numerus, & æquationum unitate minuitur; quare hæc eadem operatione respectu aliarum incognitarum, quoties opus fuerit, repetita, ad æquationem tandem pervenimus, quæ unam dumtaxat continebit incognitam, quamque jam solvere didicimus.

15. Datz sint duæ æquationes $ax + by = a^2$, $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$, quæ duas habent incognitas x , y , quarum valor inquiritur. In prima æquatione tractemus ex. gr. y tanquam notam; erit igitur $x = \frac{a^2 - by}{a}$; Si hunc valorem loco x in secunda æquatione substituamus, habemus æquationem $\frac{ay}{c} = b - \frac{f}{a} \cdot \frac{a^2 - by}{a} = b - \frac{fa^2 + fby}{a^2}$, in qua incognita una y est in prima dimensione; ergo ejus solutio num. 13. dat $y = \frac{bc a^2 - fca^2}{a^3 - fcb}$; quo pacto notam habemus y . Hac autem habita nullius negotii res est scire etiam x ; nam si valorem y substitui-

Substituamus in æquatione $x = \frac{a^2 - by}{a}$ erit $x = -\frac{b^2ca + bfc a}{a^3 - fcb} + a$, seu termini ad eandem denominationem productis, $x = \frac{a^4 - b^2ca}{a^3 - fcb}$. Sicuti in pri-

ma ex datis æquationibus y ut cognitam consideravimus, x ut incognitam; ita poteramus eodem modo supponere x cognitam, y incognitam, ejusque valorem in secundam transferre; imo neque necessarium fuit a prima potius, quam a secunda æquatione operationis initium facere, quod ratio, & experientia factis possunt ostendere.

16. Si tres fuerint incognitæ, & tres æquationes, ex. gr. $x + y = b + z$, $y + z = d$, $x + z = c$ ut valores x , y , z obtineas in prima æquatione ex. gr. quære valorem z , suppositis x , y cognitis; erit $z = x + y - b$; hic loco z substitutus in reliquis æquationibus dabit, $2y + x - b = d$, $2x + y - b = c$; in secunda pone valorem x , quem prima exhibet, & invenies $y = 2d + c - b$.

17. Si quatuor fuerint æquationes, & quatuor incognitæ, imo si multo plures, longior quidem erit operatio, sed non diversa methodus, quæ est procul dubio universalis, & nullis terminis circumscribitur.

18. Alia methodus eaque non inelegans est, quærere in omnibus datis æquationibus unius incognitæ valores expressos per cognitæ simul, & incognitæ reliquas, ex iisque novas instituire æquationes, quæ una certe carebant incognitiâ. Si ex his novis æquationibus alterius incognitæ valor investigetur, ex his iterum aliæ poterunt exurgere æquationes, quæ duobus incognitis carebant; quare patet repetita iterum atque iterum, si necesse fuerit, operatione eo nos perventuros, ut unicam incognitam in æquatione habeamus.

19. Sint tres æquationes $x + z + y = b$, $x - z - y = c$, $x + z - y = a$; ex omnibus quære valorem incognitæ x , habes $x = b - z - y$ ex prima; $x = c + z + y$ ex secunda; $x = a - z + y$ ex tertia. At cum hi omnes sint ejusdem x valores, nonne inter se æquales esse debent? Ergo poterunt ex iis æquationes fieri, quæ tres in casu esse possunt, nempe $b - z - y = c + z + y$, $b - z - y = a - z + y$, $c + z + y = a - z + y$, in quibus deest incognita x ; ex his æquationibus duas quascumque elige, tot nempe, quot supersunt incognitæ, quarum ope quære duos valores ex. gr. incognitæ z ; patet æquationem ex his duobus valoribus ortam nullam habituram incognitam præter y ; ergo hoc pacto ad æquationem pervenies, cujus solutionem jam nosti.

20. Hoc autem in peculiari exemplo nota, non posse te ex æquationibus $b - z - y = a + y - z$ habere valorem z , neque valorem y ex $c + z + y = a - z + y$; nam terminos transferendo in prima evanescit z , & notus fit valor y , nempe $y = \frac{b-a}{2}$, in altera evanescit y , & determinatur valor $z = \frac{a-c}{2}$.

quare $x = \frac{b+c}{2}$ invenitur substitutis cognitis y , z valoribus, vel in aliqua datarum æquationum, vel in aliquo ex valoribus ipsius x , quin alia æquatione sit opus. Si tot quidem æquationes haberemus, quot incognitæ, verum non omnes incognitæ essent in singulis æquationibus, tunc expeditior aliquanto erit operatio, sed methodus eadem.

21. Tertiam methodum nunc tradimus, quæ sane nullo modo est præmittenda, quoniam universalis est, licet primo intuitu non ea esse videatur, & nos illa sæpissime utemur. Utilis est hæc methodus primo; quum dux sunt incognitæ, & dux æquationes, in quibus termini eandem incognitam continententes identici sint, & termini, qui continent unamquamque incognitam, & signa in utraque æquatione, qui vero aliam, contraria. Si hæc habeantur, summa æquationum usam incognitam determinabit, differentia determinabit secundam.

Æquationes $ax + by = c^2$, $ax - by = n^2$ habent propositas condiciones; sunt enim identici termini, qui continent unamquamque incognitam, & signa sunt eadem relate ad terminos continententes x , diversa relate ad terminos continententes y . Jam vero si fiat æquationum summa, habemus $2ax = c^2 + n^2$, ergo nota erit $x = \frac{c^2 + n^2}{2a}$; si vero sumatur earundem differentia, ea est

$2by = c^2 - n^2$, ergo nota erit $y = \frac{c^2 - n^2}{2b}$; Hinc habemus duas quantitates statim notas fieri, si earum summam, & differentiam cognoscamus; quod bene tenendum est, nam hujus theorematum frequentissimus erit usus.

22. At censere debet methodum non valere, si desit identitas terminorum? nequaquam; nam semper identicos habere terminos possumus quoad unam incognitam. Si per quantitatem eam multiplicantem in secunda æquatione multiplices primam, & secundam per quantitatem eam multiplicantem in prima.

Sint $ax + by = c^2$, $nx - my = n^2$, in quibus nulla incognitarum habeat terminos identicos. Multiplicata jam primam æquationem per m , secundam per b , fient $m ax + m by = mc^2$, $bnx - mby = bn^2$, in quibus identici sunt termini continententes y ; nunc si haram summam facias, habes $m ax - nbx = mc^2$

$+ bn^2$, ergo $x = \frac{mc^2 + bn^2}{ma - bn}$; adeoque nota est x . Quod si velis aliam y , fac eodem modo, ut evadant identici termini continententes x , quod præstabis, si primam æquationem ducas in n , & secundam in a ; ita erunt $nax + nby = nc^2$, $nax - amy = an^2$, earumque differentia $nby + amy = nc^2 - an^2$; ergo erit nota $y = \frac{nc^2 - an^2}{nb + am}$.

23. Quod si præter identitatem terminorum desit etiam conditio, quam in signis postulavimus num. 21, hoc est si termini ejusdem incognitæ in utraque æquatione habeant signa vel eadem, vel contraria, quemadmodum esset in his æquationibus $ax + by = c^2$, $nx + my = n^2$; tunc pariter dabit methodus valorem incognitarum, si per num. præcedentem reducantur termini ad identitatem, & non summa, & subtractio deinde æquationum fiat, sed duplex subtractio in casu signorum eorundem, duplex vero summa in casu contrariorum; hoc enim pacto alia incognitarum successive eliminabitur, in quo vis tota hujus methodi sita est.

24. Extenditur hæc methodus ad tres etiam incognitas, & æquationes, imo

ad quemcumque incognitarum, & æquationum numerum, sed operatio longior evadit, ac molesta. Sint $3x + 2y - z = 7a$, $2x - y + 3z = 5a$, $x + y - z = 2a$; Si primæ multiplicatæ per 3 addatur secunda oritur quarta æquatio $11x + 5y = 26a$, in qua z non est; si deinde a prima tertiam subtrahamus; erit $2x + y = 5a$ quinta æquatio, in qua pariter z deest. Jam vero postremo hæc duæ æquationes per num. præcedentem solvantur.

25. Hanc præstantissimam methodum difficiliori etiam exemplo juverit illustrare. Sint igitur tres æquationes:

$$1. \quad ax - by + cz = ac$$

$$2. \quad cx + ay - bz = bc$$

$$3. \quad -bx + cy + az = ab$$

Primæ multiplicatæ per b addatur secunda multiplicata per c , habetur quarta.

$$4. \quad ab + c^2 \cdot x + ac - b^2 \cdot y = acb + bc^2.$$

Deinde secundæ multiplicatæ per a addatur tertia multiplicata per b , oritur quinta.

$$5. \quad ac - b^2 \cdot x + a^2 + bc \cdot y = abc + ab^2.$$

E quarta ducta in $a^2 + bc$ demum quintam ductam in $ac - bb$; erit æquatio sexta.

$$6. \quad a^2 + bc \cdot ab + c^2 - (ac - b^2 \cdot x = a^2 + bc \cdot acb + bc^2 - (ac - bb \cdot abc + ab^2;$$

$$\text{ex qua habes valorem } x = \frac{a^2 + bc \cdot acb + bc^2 - (ac - b^2 \cdot abc + ab^2}{a^2 + bc \cdot ab + c^2 - (ac - b^2}$$

tur methodus facta universalis, quæ antea angustis conclusa finibus videbatur.

CAPUT QUINTUM

De resolutione æquationum secundi gradus.

EA, quæ ad solvendas primi gradus æquationes spectant, satis esse non possunt, ubi agatur de solvendis æquationibus gradus secundi; iis nempe, in quibus incognita ad potestatem secundam affurgit: quapropter ad alia confugere necesse est.

1. In posterum, nisi aliter peculiaris ferat occasio, æquationes proponemus cum zero comparatas, id est terminis omnibus in unam partem translatis, ita ut ex alia tantum superfit zero. Pariter terminus exhibens maximam incognitæ potestatem neque multiplicatus erit, neque divisus per quantitatem ullam; quum omnes æquationes, si tales non sint, nullo negotio ejusmodi fieri possint, reliquis terminis divisus, vel multiplicatis per quantitatem, quæ maximam incognitæ potestatem vel multiplicat, vel dividit. Hæc maxima incognitæ potestas erit semper primus æquationis terminus, secundus erit summa terminorum, in quibus est potestas incognitæ proxime minor, & ita deinceps, donec ultimus terminus summam contineat terminorum, qui noti sunt.

2. His

2. His præmissis distinguere oportet puras æquationes & incompletas, & completas & affectis; primæ continent solam quadraticam potestatem incognitæ, ut esset $a x^2 + b x^2 - a b = 0$; aliæ præter secundam continent etiam dimensionem primam, ut æquatio $x^2 + a x - b b = 0$. Priorum solutio postulat,

ut in unam partem transferantur termini continentes quadratum incognitæ, in alia vero reliqui omnes remaneant, atque ita multiplicare, vel dividere æquationem, ut solum in uno membro habeamus quadratum supradictum positivum; quo factò omnes hujusmodi æquationes hæc generali formula exprimi poterunt

$x^2 = a A$, in qua x^2 est quadratum, a est quantitas nota positiva quæcunque, A vero quantitas positiva, vel negativa peculiaribus circumstantiis determinanda. Nunc si ex utraque parte radicem quadratam extrahamus est $x = \pm \sqrt{a A}$, adeoque soluta æquatio. Consideremus jam æquationem $a x^2 - b x^2 - c n^2 = 0$,

translato termino $c n^2$, & facta divisione per $a - b$ est $x^2 = \frac{c n^2}{a - b}$, & extra-

cta radice $x = \pm \sqrt{\frac{c n^2}{a - b}}$. Si comparatio fieret inter æquationem $x^2 = \frac{c n^2}{a - b}$;

& formulam generalem $x^2 = a A$, esset $a A = \frac{c n^2}{a - b}$, & quoniam a in primo membro, ut monuimus, ad arbitrium sumi potest, si eam supponamus $= n$, erit

$n A = \frac{c n^2}{a - b}$; adeoque $A = \frac{c n}{a - b}$. Si supposuissimus $a = c$ tunc patet futuram

fuisse $A = \frac{n}{a - b}$; En igitur quid sibi velit illud, quod diximus, nempe in:

formula illa generali a esse quantitatem notam ad arbitrium sumendam, & A quantitatem ex variis casibus determinandam. Revocare hic oportet in mentem, quod etiam demonstratum est in algorithmo radicalium num. 6. valorem $\sqrt{a A}$ duplicem esse, id est positivum, & negativum; quare præpositæ æquationis radix duplex erit, nempe $x = +\sqrt{a A}$, $x = -\sqrt{a A}$.

3. Quam radicem generalis æquationis extraximus, fieri debuisset $\pm x = \pm \sqrt{a A}$, unde quatuor haberi potuissent combinationes $x = +\sqrt{a A}$, $-x = -\sqrt{a A}$, $x = -\sqrt{a A}$, $-x = +\sqrt{a A}$; sed quoniam primæ duæ non sunt inter se diversæ, si enim unius mutantur signa, (quod fieri potest salva æqualitate) eadem est ac altera, & id ipsum de duabus aliis dici potest; ideo duæ tantum sunt diversæ combinationes, id est $x = +\sqrt{a A}$, $x = -\sqrt{a A}$, seu $x = \pm \sqrt{a A}$.

4. Si duo incognitæ valores in partem, in qua ipsa est, transferantur, oriuntur statim duæ æquationes zero æquales $x - \sqrt{a A} = 0$, $x + \sqrt{a A} = 0$, qui factores appellanter æquationis secundi gradus propositæ, quia æquationem illam restituunt, si inter se multiplicentur, eorum enim productum est x^2

$+ \sqrt{a A} \cdot x - a A = 0$ id est $x^2 - a A = 0$. Hinc tamquam corollarium in-

fertur, summam valorum incognitæ $-\sqrt{aA} + \sqrt{aA}$ esse quantitatem multiplicantem incognitam ipsam in secundo termino, quæ cum in casu sit zero, secundus terminus evanescat oportet. Infertur terminum æquationis ultimum æquare productum valorum incognitæ.

5. Si in æquatione $xx = aA$ quantitas A esset negativa, idest si esset $x = -aA$, tunc duo valores incognitæ $x = \sqrt{-aA}$, $x = -\sqrt{-aA}$ essent imaginarii Cap. 3. num. 6., & terminis translatis $x - \sqrt{-aA} = 0$, $x + \sqrt{-aA} = 0$ factores imaginarii, qui inter se multiplicati dant productum $x^2 + \sqrt{-aA} \cdot x + aA = 0$, seu $x^2 = -aA$, quæ est æquatio proposita. Hinc habemus quantitates reales posse ex summa, vel ex producto imaginariarum consurgere.

6. Hac methodo possunt æquationes puræ quæcunque graduum superiorum ad inferiorem gradum redigi, si earum exponens possit per 2 exacte dividi; sit æquatio sexti gradus $x^6 - a^3A = 0$, transfer terminum cognitum, ut sit $x^6 = a^3A$; extrahe radicem quadratam, habes $x^3 = \pm \sqrt{a^3A}$ æquationem tertii gradus. Sit $x^4 - a^3A = 0$, fac $x^4 = a^3A$, & extracta radice quadrata $x^2 = \pm \sqrt{a^3A}$; radicem quadratam iterum extrahe, & erit $x = \pm \sqrt{\pm \sqrt{a^3A}}$ æquatio primi gradus. Quatuor valores x in ea sunt, $+\sqrt{+\sqrt{a^3A}}$, $+\sqrt{-\sqrt{a^3A}}$, $-\sqrt{+\sqrt{a^3A}}$, $-\sqrt{-\sqrt{a^3A}}$ ex varia signorum combinatione, ut facile cognosci potest. Nunc considerandum est, quod si a^3A sit quantitas positiva, primus & tertius nempe ij, in quibus signum radicale secundum afficiatur signo $+$, erunt reales, contra secundus, & quartus imaginarii; si vero a^3A sit quantitas negativa, tunc valores omnes erunt imaginarii. Quoad hanc partem res est omnino manifesta: quoad aliam vero tyronum gratia sic potest clarius ostendi. Nonne $\sqrt{+\sqrt{a^4}}$ idem est ac $\sqrt{a^2}$? ergo si radicale signum secundum habuisset signum $-$, esset $\sqrt{-a^2}$ quantitas imaginaria; ideo enim in primo casu provenit $\sqrt{a^2}$, quia radicale secundum intelligitur multiplicatum per unitatem positivam; at in secundo casu intelligitur multiplicatum per unitatem negativam; ergo esse debet $\sqrt{-a^2}$. Nunc si rem accomodes æquationi nostræ patebit, cur in secunda, & quarta combinatione valor sit imaginarius, licet quantitas sit positiva a^3A .

7. Sit denique $x^8 = a^7A$; ergo $x^4 = \pm \sqrt{a^7A}$, & $x^2 = \pm \sqrt{\pm \sqrt{a^7A}}$, & $x = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\pm \sqrt{a^7A}}}$, ubi octo sunt radices æquationis, seu valores x , qui posita a^7A quantitate positiva, duo sunt reales, reliqui imaginarii, ut ex signorum combinatione uniusquisque potest facile conicere; posita eadem negativa, omnes sunt imaginarii.

8. Nunc

8. Nunc ad æquationes secundi gradus completas transeamus. Hæ omnes hac generali formula possunt exprimi $x^2 + Ax + aB = 0$, in qua cum x^2 sit quadratum x , Ax duplum producti $\frac{A}{2} \cdot x$, erit $x + \frac{A}{2}$ radix quadratæ quantitatis $x^2 + Ax + aB$, si aB esset quadratum quantitatis $\frac{AA}{4}$; at cum non sit, ideo diversa erit quantitas $x^2 + Ax + aB$ a quadrato $x^2 + Ax + \frac{AA}{4}$, sed differentia omnis erit in ultimis terminis cognitis; quare posito quadrato $x^2 + Ax + \frac{AA}{4} = z^2$, erit $x^2 + Ax = z^2 - \frac{AA}{4}$, hoc est termini duo incogniti æquationis nostræ æquales termino unâ incognito, & alteri cognito; hisigitur in æquatione generali pro illis substitutis, habebimus $z^2 - \frac{AA}{4} + aB = 0$, quæ æquatio ad genus pertinet incompletarum, de quibus jam egimus.

9. Solvenda sit æquatio $y^2 - cy - n^2 = 0$. Accipe dimidium coefficientis secundi termini, id est $\frac{-c+b}{2}$, cui in formula generali respondet $\frac{A}{2}$, dimidio hoc incognitæ addito, fac $y - \frac{c+b}{2} = z$ & elevato utroque membro ad quadratum $y^2 - cy + \left(\frac{-c+b}{2}\right)^2 = z^2$, seu $y^2 - cy + \frac{b-c}{4} = z^2$. Unde erit $y^2 - cy + \frac{b-c}{4} = z^2 - \frac{b-c}{4}$, & pro primo hujus membro, altero furrugato in æquatione nostrâ, habes eam $z^2 - \frac{b-c}{4} - n^2 + cm = 0$. Ergo erit $z^2 = \frac{b-c}{4} + n^2 - cm$; adeoque $z = \pm \sqrt{\frac{b-c}{4} + n^2 - cm}$; atqui initio factum est $y - \frac{c+b}{2} = z$, ergo erit tandem $y = \frac{c+b}{2} \pm \sqrt{\frac{b-c}{4} + n^2 - cm}$; adeoque soluta æquatio.

10. Methodus tamen communior est hæc. Formulæ generali $x^2 + Ax = -aB$ addatur in parte utraque $\frac{AA}{4}$, id est quadratum dimidii coefficientis termini secundi, quo fiet, ut primum membrum æquationis sit quadratum perfectum: erit igitur $x^2 + Ax + \frac{AA}{4} = \frac{AA}{4} - aB$. Nunc si extrahatur radix quadratæ,

habemus $x + \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, & $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, quod idem ex superiori methodo descendit.

11. Habeamus nunc æquationem $x^3 - nx + n^2 = 0$, erit $x^3 - nx = -n^2$,
 $-cx$ &

& addito quadrato dimidii coefficientis $-n-c$, $x^2 - nx + \frac{n+c}{4} = -n^2$
 $+ \frac{n+c}{4}$, & radice extracta erit $x - \frac{n+c}{4} = \pm \sqrt{-n^2 + \frac{n+c}{4}}$; deni-
 que $x = + \frac{n+c}{4} \pm \sqrt{-n^2 + \frac{n+c}{4}}$; hoc est facta actualiter potestate
 $n+c$, quæ est $n^2 + 2cn + c^2$, erit $x = \frac{n+c}{2} \pm \sqrt{-3n^2 + 2cn + c^2}$.

12. Solent etiam æquationes solvi, earum comparatione facta cum formula
 generali, per quam eæ quantitates determinantur A, B , quæ indeterminatæ as-
 sumptæ fuerant. Sit æquatio $x^2 + bx - nb = 0$; hac comparata cum formu-
 la $x^2 + Ax + aB = 0$ habemus $Ax = b+c$. x , $aB = bc - nb$; ergo A
 $= b+c$, & $B = \frac{bc - nb}{a}$, & quoniam a ad arbitrium accipi potest, si faciam
 $a = b$, erit $B = c - n$; ita determinatis valoribus A, a, B , si eos in radice æ-
 quationis generalis $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$ ipsarum loco substituamus,
 habebimus $x = \frac{-b-c}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 2bc + c^2 + 4bn}{4}}$, quod solitis operati-
 bus æque inventum esset.

13. Nunc ad æquationis æcomenicæ radices $-\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$,
 $-\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$ revertentes, atque iis translatis in partem incogni-
 tæ, ut æquationis factores habeamus $x + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, $x + \frac{A}{2} +$
 $\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, facile cognoscimus terminorum cognitorum summam, hoc est
 radicem, signis mutatis, esse A , qui est coefficientis secundi termini æquationis no-
 stræ $x^2 + Ax + aB = 0$, eorum vero productum aB esse tertium ejusdem formu-
 læ terminum. Quæ autem hæc sit proprietas quædam universalis, juvat hic in e-
 jus principia diligenter inquirere, ut alibi deinde & illam extendere commodius
 accidat, & in proximum usum deducere.

14. Sint duo quicunque factores $x+a$, $x+b$; multiplicentur inter se; erit
 productum $x^2 + bx + ax + ab$. Si hujus producti naturam consideres, statim depre-
 hendis, summam extremorum terminorum a, b esse coefficientem termini secundi
 in producto, & ultimum ab esse eorum productum. Quotiescunque igitur duas
 habeas quantitates, quæ simul additæ secundi termini producti alicujus exhibeant
 coefficientem, & invicem multiplicatæ dent ultimum illius terminum, statim am-
 bos producti factores obtinuisti, si earum utramque ea quantitate augeas per quam
 pro-

productum fuerat ordinatum; sic in allato exemplo, quia a , & b simul sumptæ dant coefficientem termini secundi, & invicem ductæ dant tertium terminum, recte inferes, illius formulæ factores esse a , & b auctos quantitate x , per quam formula est ordinata, nempe esse $x+a$, $x+b$. Id autem verum est, quicumque, ut initio dixi, sint factores, quodcumque productum, seu hoc, sive illi omnes, seu eorum alter zero æqualis sit, aut cuilibet quantitati.

15. Si vero alter factorum $x+a$, $x+b$, vel ambo essent æquales zero (quod alterum non accidit nisi a , & b sint æquales) tunc etiam ex his ortum productum esset zero; quod patet, quia quantitas per zero multiplicata, vel zero per zero semper zero esse debet: haberemus igitur æquationem secundi gra-

dis $x^2 + ax + ab = 0$, in qua æquatione ea omnia, quæ supra dicta sunt ve-

rificantur. Imo ea verificari debent in æquationibus quibuscumque, quum nihil aliud sit æquatio nisi productum, quod est æquale zero, quia unum, aut omnes factores sunt zero. Igitur in æquatione $x^2 + ax + ab = 0$ necessario unus

saltem ex factoribus $x+a$, $x+b$, quicumque tandem sit, zero æquabitur, per quem valor x obtinetur; unde insertur illum esse valorem x , qui loco x positus in æquatione efficit, ut termini omnes elidantur, & illum esse æquationis factorem, per quem perfecte dividi æquatio poterit.

16. At quamvis, uti diximus, ex eo quod æquatio sit æqualis zero, rectissime sequatur aliquem factorum zero æqualem esse, non tamen erui potest quanam sit hujusmodi factor; etenim si quum canonicæ æquationis factores sint

$x + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} + aB}$, $x + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} + aB}$ eorum alter erit zero,

at quoniam ille sit, hæcenus ignotum est. Hujus autem rei ratio manifesti est hæc, quia æquatio duas (idem dicendum si plures quam duas) exhibens diversas radices, seu incognitæ valores diversos, indifferentis quidem est de se, & potest per alterutrum verificari; at eodem tempore per utrumque verificari impossibile est omnino, & absurdum. Ergo uno incognitæ valore determinato, si hic ex eadem incognita subtrahatur, factorem dabit æqualem zero, at subtractio altero fiet secundus factor necessario major, vel minor. Est igitur manifestum nescire nos, qui factor zero æquetur, si solam æquationem spectemus, adeoque nescire per quam ex inventis radicibus æquatio verificetur. Quod si quæras, quid tandem illud sit, quod hanc veluti æquationis indifferentiam tollat, vel valorem incognitæ potius hunc, quam illum determinet, id ex casuum peculiarium circumstantiis pendere dicimus, ex iis nempe, quas secum trahunt peculiaria problemata, quæque in Analysis introduci non possunt; sed hæc clarius etiam ex problematum solutione suo loco patebunt.

17. Methodi, quæ his æquationibus secundi gradus inserviant, valent etiam ad alias quascumque solvendas, vel ad interiorum graduum reducendas, dummodo in iis hæc tria habeantur, primo ut incognita non nisi in duobus terminis reperiat, deinde ut illius exponens utrobique sit numerus par, tertia, ut exponens

illius in uno termino sit duplus exponentis in alio. Sit $x^4 + aAx^2 + a^2B = 0$, quarti gradus æquatio, in qua requisitæ adsunt conditiones; Transfer terminum cognitum, & adde utrique parti quadratum dimidii coefficientis secundi termini

erit $x^4 + aAx^2 + \frac{a^2AA}{4} = \frac{a^2AA}{4} - a^3B$, extracta radice quadrata

$$x^2 + \frac{aA}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2AA}{4} - a^3B}, \text{ adeoque } x^2 = -\frac{aA}{2} \pm a \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$$

& radice iterum extracta $x = \pm \sqrt{-\frac{aA}{2} \pm a \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}}$.

18. Si alia methodo-uti voluiffemus, faciendum erat $x^2 + \frac{Aa}{2} = z^2$, unde effec quadrando $x^4 + aAx^2 + \frac{a^2AA}{4} = z^4$, & $x^4 + aAx^2 = z^4 - \frac{a^2AA}{4}$, &

secundo hoc membro in æquatione substituto, erit $z^4 = \frac{a^2AA}{4} - a^3B$, a-

adeoque $z^2 = \pm a \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, & revocato valore z^2 , $x^2 + \frac{aA}{2}$

$$= \pm a \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}, \text{ denique } x = \pm \sqrt{-\frac{aA}{2} \pm a \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}}, \text{ ut supra.}$$

19. Sit $x^6 + a^2Ax^3 + a^3B = 0$, erit $x^6 + a^2Ax^3 + \frac{a^4AA}{4} = \frac{a^4AA}{4} - a^3B$,

$x^3 + \frac{a^2A}{2} = \pm a \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, æquatione e gradu sexto ad tertium producta.

20. Neque hic alia methodus est prætermittenda, quæ ad ea intelligenda, quæ in solutione æquationum superiorum tradituri sumus, plurimum iuvat. Hanc

æquationi generali simpliciffimæ $x^3 + aA = 0$ applicemus. Fiat $A = \pm 2C - B$,

& quantitas C fit positiva, B ad libitum vel positiva, vel negativa; erit igitur

$x^3 \pm 2aC - aB = 0$; nunc incognita x in duas inæquales partes scindatur, fitque

$x = m + n$, & quadrando $x^3 = m^3 + 2mn + n^3$; translatis terminis

$x^3 - 2mn - m^3 = 0$. Hanc æquationem fingamus identicam æquationi $x^3 \pm 2aC$

$- aB = 0$, ita ut terminus termino æqualis fit; hoc supposito erit $\pm 2aC = -2mn$,

& $aB = m^3 + n^3$; ex prima harum æquationum habemus $a^2C^3 = m^3n^3$, adeoque

$n^3 = \frac{a^2C^3}{m^3}$, & substituto valore n^3 in alia æquatione $aB = m^3 + n^3$, fiet

illa $aB = m^3 + \frac{a^2C^3}{m^3}$, & $m^4 - aBm^2 = -a^2C^3$; ergo $m^4 - aBm^2$

$+ \frac{a^2B^2}{4} = \frac{a^2B^2}{4} - a^2C^3$; denique $m^2 = \frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{B^2}{4} - C^3}$, &

$m =$

$$m = \pm \sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$$

21. Eodem pacto ex æquatione, quam primo consideravimus, descendit etiam $m^2 = \frac{a^2 C^2}{n^2}$, quo valore m^2 substituto in secunda, est $aB = n^2 + \frac{a^2 C^2}{n^2}$, & $n^4 - aBn^2 = -a^2 C^2$, adeoque $n^4 - aBn^2 + \frac{a^2 BB}{4} = \frac{a^2 B^2}{4} - a^2 C^2$, $n^2 = \frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}$, & $n = \pm \sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$.

22. Duo sunt valores m , & n , ut ex signis positis ante primam radicem colligitur; ergo quatuor erunt combinationes valorem x exprimentes; nempe valores m valores n

$$1. \sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} + \sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$$

$$2. - \sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} - \sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$$

$$3. \sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} - \sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$$

$$4. - \sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} + \sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$$

Ut ex his quatuor valoribus sciamus, quinam sint ii duo, qui æquationi nostræ $x^2 \pm 2aC - aB = 0$ intersunt; adverte productum $mn = \mp aC$, ergo pro signo superiore ii valores m, n erunt conjungendi, quorum producta dant $-aC$; pro signo autem inferiore, illi, quorum producta præbent $+aC$. Hoc criterio usurpato videbimus valores primæ, & secundæ combinationis æquationi $x^2 - 2aC - aB = 0$ intersere, reliquos vero æquationi $x^2 + 2aC - aB = 0$. Hinc ut proprie magis loquamur, cum hæc solutio quatuor det valores x , erit

solutio æquationis quarti gradus ortæ ex duabus secundis in se ductis $x^2 - 2aC - aB$.

$x^2 + 2aC - aB = 0$, id est $x^4 - 2aBx^2 - 4a^2 C^2 + a^2 B^2 = 0$. At sicuti hæc in duas secundis resolvi potest, ideo de his agentes, congruum erat hujus solutionis usum indicare. Resolutio autem æquationis per ea, quæ nuper dicta sunt, hoc modo obtinetur. Transfer in partem alteram terminum $4a^2 C^2$, habebis $x^4 - 2aBx^2 + a^2 B^2 = 4a^2 C^2$; extrahere radicem modo, oritur $x^2 - aB = \pm 2aC$, seu $x^2 \pm 2aC - aB = 0$.

23. Si forte poneretur $C^2 > \frac{BB}{4}$, tunc $\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}$ esset imaginaria; sed non ideo

ideo dicendum esset, omnes imaginarios esse quatuor \times valores. Nam hoc etiam posito primi duo reales sunt. Sufficiet id demonstrare de primo. Sit igitur

$$\times = \sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} + \sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}, \text{ \& quadrando}$$

$$\times^2 = \frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2} + 2 \sqrt{\frac{a^2 B^2}{4} - \frac{a^2 B^2}{4} + a^2 C^2} + \frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2},$$

hoc est $\times^2 = aB + 2aC$, & $\times = \pm \sqrt{aB + 2aC}$; ergo valor ille primus \times , licet facta $C > \frac{B}{2}$, sub imaginarii forma appareat, revera imaginarius non est,

sed reali quantitati $\sqrt{aB + 2aC}$ æqualis, quod ostendit imaginaria omnia se mutuo elisisse. Reliqui duo valores \times in eadem hypothefi $C > \frac{B}{2}$ sunt imaginarii; eadem enim operatione facta invenitur $\times = \sqrt{aB - 2aC}$ in utroque casu.

24. Adnota formulas tertia, & quarta combinationis reales fieri, si dividantur, vel multiplicentur per $\sqrt{-1}$; satis erit hoc demonstrare de formula

$$\sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} - \sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} \text{ divisa per } \sqrt{-1}; \text{ Hæc autem ita divisa fit } = \times; \text{ ergo quadrando erit}$$

$$\times^2 = \frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2} - 2 \sqrt{\frac{a^2 B^2}{4} - \frac{a^2 B^2}{4} + a^2 C^2} + \frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2} = \frac{aB - 2aC}{-1}$$

adeoque $\times^2 = 2aC - aB$, & radice extracta $\times = \pm \sqrt{2aC - aB}$ quantitati reali in hypothefi $C > \frac{B}{2}$; idem accidisset, si non divisio, sed multiplicatio per $\sqrt{-1}$ facta fuisset. Hic tamen ita inventus valor differt a tertio illo, quem quatuor nostræ combinationes ferunt; id tantum animadvertendum duximus, ut pateret, quæ ratione per imaginarium $\sqrt{-1}$ expressiones quadraticæ imaginariæ in reales mutari possint, quod scivisse aliquando juvabit.

25. Si post inventum valorem $m = \pm \sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$ illum in æquatione $nm = -aC$ substituissimus, inventa esset $n =$

$$\pm \sqrt{\frac{aB}{2} + a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$$

& secundi membri numeratoris, & denominatoris multiplicato per $\sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$

ferit $n = \pm \sqrt{\frac{aB}{2} - a \sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$, ut supra.

26. Videtur hic esse locus ostendendi, qua methodo fieri possit habitis duabus æquationibus, ut una incognita quamvis ad quadratum elevata sine extractione radicum evanescat. Methodus ita generaliter demonstrabitur. Sint duæ

secundi gradus æquationes $y^2 + Ay + B = 0$, $y^2 + Cy + D = 0$; quantitates A , B , C , D sunt determinatæ per cognitæ, & incognitam aliam; una æquatio ex alia subtrahatur ex. gr. prima ex secunda, ut sit $C - A$. $y + D - B = 0$, vel $y + \frac{D - B}{C - A} = 0$, & posita $\frac{D - B}{C - A} = E$, $y + E = 0$; hæc multiplicetur per y , erit $y^2 + Ey = 0$, quæ subtracta e prima dat $A - E$. $y + B = 0$, & $y + B = 0$, & facta $\frac{B}{A - E} = F$, $y + F = 0$; si hæc ab $y + E = 0$ subducas, fiet tandem $E - F = b$. In qua y non habetur.

27. Proponantur modo ex. gr. duæ æquationes $y^2 + 2xy + 2ax - a^2 + by + x - b^2 = 0$, $y^2 + 2xy - ay + by + bx - b^2 = 0$, in quibus duæ sunt incognitæ x , y , & earum una eliminari oporteat, quin radix extrahatur. Subtrahæ secundam e prima, habes $2ax + ay - a^2 = 0$, & facta divisione per y , $y + 2x - a = 0$; in qua æquatione y habet dimensionem linearem; multiplica eam per y , ut sit $y^2 + 2xy - ay = 0$, & hæc subtrahæ de secundæ datarum æquationum; erit $by + bx - b^2 = 0$, & $y + x - b = 0$, æquatio alia habens y in prima dimensione; istam nunc si subtrahas ab inventa prius $y + 2x - a = 0$, fiet tandem $x - a + b = 0$, in qua deest y , quod erat propositum.

28. Vis methodi nullo modo requirebat, ut primam potius de altera, quam secundam de prima subtraheremus, neque ut secunda subtractio ex hac potius, quam ex illa fieret; juvabit tamen plurimum, ut finalis æquatio simplicior obtineatur & expeditior, his potius uti subtractionibus, quam illis, at certa nequit assignari regula; quare prudentis erit Analytici eas in peculiaribus casibus eligere, quæ aptiores esse videbuntur: eadem de causa juvat potius hæc, quam illam incognitam eliminandam suscipere; si enim in æquatione supra posita non y , sed x voluissimus eliminare, implicatior fuisset operatio; sed aliud hujus rei afferamus exemplum.

29. Sint æquationes duæ $y^2 - xy + x^2 = 0$, $y^2 - cx + c^2 = 0$, & velimus eliminare y ; e prima secunda detracta habemus $x^2 - xy + cx - c^2 = 0$, & divisione facta per x , mutatisque omnium terminorum signis, erit $y - x - c + \frac{c^2}{x} = 0$, ubi y in prima est dimensione; æquatio ista ducta in y erit $y^2 - xy - cy + \frac{c^2 y}{x} = 0$, quam a prima subtrahimus, & habemus $x^2 + \frac{cx y - c^2 y}{x} = 0$, adeoque $y + \frac{x^2}{cx - c^2} = 0$, æquatio secunda, in qua y unam obtinet dimen-

tionem; hanc igitur si ab alia prius inventa detrahamus, y evanescet omnino,

erit $\frac{-x^3 - cx + c^2}{x} - \frac{-x^3}{cx - c^2} = 0$, seu $x^4 + cx^3 - 2c^2x + c^4 = 0$, quæ est

quarti gradus æquatio.

30. Si incognita eliminanda in una ex datis æquationibus ad primam tantum potestatem elevata esset, sicuti accidit in æquationibus ex. gr. $x^2 - y^2 - c^2 = 0$, $xy - a^2 = 0$, patet secundam esse per eam incognitam multiplicandam, quam ejicere volumus, nisi enim in utraque æquatione habeant termini illius incognitæ potestatem eandem, numquam per subtractionem elidi poterunt, in quo tota methodi vis consistit.

31. Hujus artificii naturam diligenter consideranti facile patebit, illud non in æquationibus secundi gradus tantum, sed in superioribus valere, dummodo incognita eliminanda ad æqualem assurgat potestatem; quod semper obtineri posse ex numero præcedenti potest inferri; sufficit multiplicare æquationem, in qua minor est incognitæ potestas per talem ipsius potestatem, quæ sit differentia maximorum incognitæ exponentium: ita in his $x^5 + y^2x^3 - a^5 = 0$, $x^3 + xy - y^2 = 0$, habebis x ad eandem maximam potestatem in utraque elevatam, si secundam per x^3 multiplices, cujus x^3 exponentis est differentia 5, a maximorum x exponentium in propositis æquationibus.

32. Sint igitur cujuscunque gradus sed ejusdem æquationes duæ I. $y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} \dots D = 0$; II. $y^m + Ly^{m-1} + My^{m-2} \dots R = 0$: Subtrahatur secunda e prima erit $\frac{A-L}{A-L}y^{m-1} + \frac{B-M}{A-L}y^{m-2} \dots D-R = 0$, & $y^{m-1} + \frac{B-M}{A-L}y^{m-2} \dots \frac{D-R}{A-L} = 0$; & ut expeditius agamus factio coefficiente secundi termini = P , & ultimo termino = Q , erit III. $y^{m-1} + Py^{m-2} \dots Q = 0$, in qua æquatione y est in gradu unitate inferiori respectu æquationum, quæ fuerunt propositæ. Hæc multiplicetur per y , ut sit $y^m + Py^{m-1} \dots Qy = 0$, quæ si de prima subtrahatur, prodibit $\frac{A-P}{A-P}y^{m-1} + By^{m-2} \dots Qy + D = 0$, seu $y^{m-1} + \frac{B}{A-P}y^{m-2} \dots \frac{Q}{A-P}y + \frac{D}{A-P} = 0$, & factio coefficiente secundi termini = S , penultimi = T , & ultimo termino = U , erit IV. $y^{m-1} + Sy^{m-2} \dots Ty + U = 0$, æquatio alia, in qua pariter y est in gradu unitate inferiori, quam si subtrahamus de tertia, habemus hanc aliam $\frac{P-S}{P-S}y^{m-2} \dots -Ty + Q - U = 0$, ubi gradus y duabus dimensionibus est imminutus. Hæc satis, superque sunt, ut methodus appareat, qua operationem ita producere possimus, ut y tandem evanescat.

33. Si plures essent æquationes v. gr. tres, pariter incognitæ tres, harum unam prius eliminabimus applicantes hanc methodum duabus æquationibus, puta primæ, & secundæ; eandem deinde incognitam eliminabimus combinatione alia adhibita ex. gr. primæ æquationis cum tertia. Hæc via duas obtinebimus æqua-

æquationes, in quibus una ex tribus propositis incognitis desiderabitur; quarum ope aliam incognitam ejiciemus, & denique ad unius incognitæ æquationem perveniemus.

CAPUT SEXTUM.

De resolutione Problematum Arithmeticoꝝ, quæ determinatâ sunt.

1. **P**roblema nihil est aliud, quam propositio, in qua ex quantitatibus aliis quibus notis nonnullæ ignotæ quantitates investigandæ proponuntur. Ita problema est, datis duobus numeris, eorum ex. ca. summam vel differentiam vel productum &c. postulare. Cum vero quantitates ignotæ detectæ sunt, & determinatæ, tunc problema dicitur resolutum.

2. Triplex est problematum genus, alia sunt determinata, alia indeterminata, alia pluraquam determinata. Antequam horum problematum naturam explicemus, illud in memoriam revocare oportet, nimirum ignotas quantitates tamquam cognitâs spectari, & extremis alphabeti litteris exprimi, notas vero reliquis. His præmissis, ex problematis conditionibus, & ex relationibus, quas incognitæ habent ad cognitâs, æquationes constituendæ sunt, quarum numerus si æqualis fuerit numero incognitarum, tunc problema dicitur determinatum, & per regulas sibi præ traditas ad æquationem deveniemus, quæ contineat unam incognitam. Si æquatio, quæ sese offert, primi aut alterius gradus fuerit, valorem incognitæ inveniemus, & solutionem problematis exhibebimus.

3. Problema determinatum hoc est: invenire duos numeros quorum summa sit 6, & differentia 2. Vocentur numeri quaesiti x , y ; ergo ex conditionibus allatis habebimus $x + y = 6$, & $x - y = 2$. Addamus primæ æquationi secundam, erit $2x = 8$. & $x = \frac{8}{2} = 4$; e prima deinde alteram subtrahamus, erit $2y = 6 - 2 = 4$; & $y = \frac{4}{2} = 2$; ergo duo quaesiti numeri sunt 4, & 2. Et revera $4 + 2 = 6$, $4 - 2 = 2$, ut conditiones problematis postulant.

4. Si vero conditionibus problematis omnibus rite observatis æquationum numerus minor est numero incognitarum, tunc problema dicitur indeterminatum, quia nunquam fiet, ut ad æquationem veniamus, quæ unam tantum habeat incognitam. Idcirco ut hujusmodi problemata solvantur, in ultima æquatione opus est ad arbitrium unam vel plures determinare incognitas, ut in æquatione illa una incognita supersit. Hoc est problema indeterminatum: Quaeruntur duo numeri quorum summa sit 6. Vocatis his numeris x , y , quacunque utamur indolis, nullam aliam obtinebimus æquationem præter hanc $x + y = 6$; ut igitur solvasur problema, supponamus x æqualem numero cuilibet ex. gr. 5; tunc erit $5 + y = 6$, adeoque $y = 6 - 5 = 1$, solutumque erit problema; cujus manifestum est infinitas esse solutiones, tot nempe, quot valores x ad arbitrium sumi possunt. At si problemati huic alia adderetur conditio, nempe ut numeri positivi esse debeant, & integri, patet multo minorem fore numeram solutionum, quinque enim essent dumtaxat; hoc in casu problema dicitur semideterminatum.

5. Si denique numerus æquationum major sit, quam numerus incognitarum; problema vocatur plusquam determinatum, cujus solutio plerumque est impossibilis; hujusmodi esset querere duos numeros x, y , quorum summa sit 6 ; secundo e primo subtrahendo, differentia 2 , & invicem multiplicatis productum 15 . Ex tribus his conditionibus tres oriuntur æquationes $x+y=6$, $x-y=2$, $xy=15$, quæ impossibilem reddunt solutionem, quia primæ duæ pugnant cum tertiâ; ex primis enim, ut supra vidimus, est $x=4$, $y=2$, quorum productum æquale est 8 . Si tertiâ conditio esset, ut productum fuisset $xy=8$, tunc solutio problematis, possibilis quidem fuisset, sed casu, quia tertiâ conditio addita fuisset, quæ jam necessario ex præcedentibus sequebatur, adeoque erat superflua. Superfluas conditiones hujusmodi in proposito problemate certo reperiri cognoscimus, quotiescunque identicam æquationem habeamus, id est, cum termini unus membri eidem sunt ac termini alterius; uti accidit in casu nostro, si tant positus tribus illis æquationibus $x+y=6$, $x-y=2$, $xy=8$, habemus ex primis duabus $x=4$, $y=2$, quæ valores in tertiâ substituti dant $8=8$ æquationem identicam. Ratio autem patet, quia sicuti diversæ expressiones non possunt haberi nisi ex conditionibus diversis; ita expressiones identicæ ex identicis conditionibus descendunt necesse est; propterea si conditiones, ex quibus hæc oriuntur, diversæ videntur, differentia hæc erit apparens tantum, non verâ.

6. Ex his æquationis identitate discimus etiam cognoscere theoremata, quæ problematum specie sæpe proponuntur; nam si inclusis conditionibus omnibus identicam æquationem incurramus, indicium id erit manifestum, quantitates quascunque ejus generis, de quibus sermo est, præditis esse conditionibus requisitis. Clarius id fiet ex mplo. In serie numerorum naturalium $1, 2, 3, &c.$ quatuor quaruntur numeri successivi, qui tales sint, ut extremorum summa æquet summam mediorum. Si ut hi numeri x, y, z, u . Ex natura seriei habemus $x+1=y$, $y+1=z$, $z+1=u$; ex alia vero conditione est $x+u=y+z$; ex primis duabus æquationibus habemus $x+1=z$; ex hæc, & tertiâ $x+3=z$; nunc substitutis in quarta valoribus y, z, u , orietur $x+3=z+x+3$ æquatio identica; ex qua palam fit, conditionem illam in quatuor successivis numeris seriei naturalis requisitam superfluum esse, quippe quæ ex ipsa serie descendit, & est propria quatuor numerorum illius, quicunque sint dummodo successivi; unde non problema est, sed theorema.

7. Quod si identitas hæc habeatur, licet non omnibus problematis conditionibus inclusis, hoc vel errorem indicat, vel assumpsisse nos conditionem aliquam superfluum, ea omissa, quæ assumi debebat; quare iterum attente conditiones perpendere oportebit. Illud est etiam hic addendum has conditiones superfluas aliquando efficere, ut determinatum videatur problema, quod verâ est indeterminatum. Querimus ex. gr. numeros quatuor x, y, z, u , in quibus summa extremorum sit æqualis summæ mediorum, & præterea summa mediorum sit 7 . Igitur ex prima conditione est $x+u=y+z$, ex alia, & prima $y+z=7$, $x+u=7$; adeoque tot æquationes habemus, quot incognitas, ut problemata determinata requirunt nam. 3; at si in prima æquatione loco membrorum $x+u$, $y+z$ eorum valores substituisimus datos per æquationes alias, fit $7=7$; ergo superfluum conditionem admisimus, & ad problema determinandum inutilem. Etenim vera nonne est inutilis hæc $x+u=7$, quæ manifestissime in aliis includitur, in quibus volumus $x+u=y+z$, & $y+z=7$? Quia autem diligenter problemate iterum considerato, ejusque conditionibus, nulla reperitur via, quæ ad tertiam æquationem veniamus, ideo problema erit indeterminatum.

8. Ex

8. Ex dictis hactenus facile inferri potest, quanta opus sit diligentia, quam attente omnia animadvertenda; quæ problemata respiciunt, ut necessarias inde æquationes cliciamus; quæ cura eo major esse debet, quo nullæ certæ tradi possunt regulæ, quarum ope ex conditionibus ad æquationes perveniamus, quas aliquando erueri maxime difficile, & arduum est. Ingenio hæc aperienda est via; & exercitatione, cujus gratia multa hic problematùm addimus exemplum initio ab arithmeticiis factis. Sit itaque.

9. Problema primum: Quomodo quis Casum interrogaret, quæta esset hora, respondit ille, horas a media nocte ad horas, quæ ante meridiem tunc supererant, esse ut $2:3$. Queritur quænam sit hora a Cajo indicata? Sint horæ a media nocte transactæ $=x$; erunt reliquæ ante meridiem $=12-x$; ergo ex Caji responsione $2:3::x:12-x$, adeoque $3x=24-2x$, seu $5x=24$, & $x=\frac{24}{5}$. Est igitur indicata a Cajo hora quarta cum serupulis primis 48 post mediam noctem. Quod si velis problema hoc terminis generalibus expressum, & resolutum, sit x ut antea numerus horarum a media nocte, numerus horarum a media nocte ad meridiem $=a$, & proportio, quam supra exprimebat $2:3$, sit proportio quilibet $m:n$. Habebimus igitur $x:a-x::m:n$, & componendo $x::m:n+m$; ergo $x=\frac{am}{m+n}$. Sit nunc $m=2$, & $a=12$, erit $x=\frac{24}{5}$, & hora eadem, quæ supra est inventa. Fac $m=5$, $n=1$, $a=12$, erit $x=\frac{60}{6}=10$; erat igitur in hac hypothese hora decima post mediam noctem.

10. Problema secundum. Canis a lepore, quem insequitur, initio motus passuum numero $=a$ distat, suntque velocitates canis, & leporis, seu spatia a cane, & lepore eodem tempore percursa ut $m:n$. Queritur post quæ passus leporem sit canis assecutus? Vocetur spatium a lepore percursum antequam canis illum assequatur $=x$; ergo spatium eodem tempore a cane peractum erit $a+x$; igitur, quoniam horum spatiorum data est proportio, erit $a+x:x::m:n$ seu dividendo $a:x::m-n:n$, unde $x=\frac{an}{m-n}$. Manifestum est problema requirere, ut m major sit quam n : suppone igitur $a=100$, $m=3$, $n=2$, erit $x=\frac{200}{1}=200$, & $a+x=300$, hoc est 300. percursis passibus canis perveniet ad leporem. Ita alias quasunque hypotheses ad libitum finge, dummodo nunquam facies $m=n$, aut $n>m$, in quibus casibus aut canis neque semper, aut semper magis a lepore distaret.

11. Problema tertium. Sempronius volens quandam numerorum summam determinato pauperum numero distribuere, animadvertit octo nummos deesse sibi, ut singuli pauperes ternos accipiant, & tres superesse, si singulis duos tantum det nummos. Queritur numerus pauperum, & numerorum? Sit numerus pauperum ignotus $=x$; igitur, quoniam si singulis tres denarij, defunt octo nummi, erit eorum numerus $=3x-8$; at iidem ob secundam problematis conditionem debent esse $=2x+3$; ergo $3x-8=2x+3$, seu $x=11$. Pauperes itaque undecim sunt, & quia $3x-8$, vel $2x+3$ sunt nummi, substituto in loco x , erit eorum numerus $=25$. Ut generalibus terminis utamur, problema sic

se proponatur. Ut singuli pauperes accipiant numerorum numerum m , defuat summi n , si autem singulis dentur summi p , superfunt summi $= q$; queritur, ut antea, numerum & pauperum, & numerorum. Ex conditione prima est $m \times - n$ numerorum numerus, idem ex secunda est $p \times + q$; ergo $m \times - n = p \times + q$, seu $m \times - p \times = q + n$, & $x = \frac{q+n}{m-p} =$ numero pauperum; $\frac{q+p \times}{m-p} + q = \frac{m q + m n}{m-p} - n = \frac{p n + q m}{m-p} =$ numero numerorum.

12. Problema quartum. Quum a Titio quidam peteret, quot annos natus esset, respondit ipse: si annorum meorum numerum in 4 ducas, & producto 15 addas, numerum habebis tanto majorem quam 150, quanto numerus 100 annorum meorum numerum superat. Queritur annorum Titii numerus. Sit hic numerus $= x$, ex proposita conditione habemus arithmeticiam hanc proportionem: $4x + 15 : 150 :: 100 : x$; ergo $5x + 15 = 150 + 100 = 250$, & $x = \frac{250 - 15}{5} = 47$, qui sunt anni questu Generaliter: numerus multiplicans x sit m , a numerus producto addendus, & $m \times + a$ aequo superet b , ac c superat x . Erit arithmetice $m \times : b :: c : x$; ergo $m + 1. x + a = b + c$, & $x = \frac{b+c-a}{m+1}$.

13. Problema quintum. Interrogatus quota esset hora, dixi: si horis a media nocte elapsis divisus per 2 addatur $\frac{1}{2}$ earum, quae ad mediam noctem proximam superfunt, quotius prodibit horarum numerus. Numerus horarum, quae post mediam noctem elapsae jam sunt, ponatur $= x$; erit igitur numerus earum, quae ad proximam mediam noctem superfunt $= 24 - x$; quare ex conditione allata erit aequatio $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot 24 - x = x$, id est $\frac{x}{2} + 18 - \frac{x}{2} = x$, & $18 = x + \frac{x}{4} - \frac{x}{2} = \frac{5x}{4}$ seu $x = \frac{72}{5} = 14 + \frac{2}{5}$; erat igitur tunc hora 14 cum 24 minutis a media nocte, seu 2 hora cum 24 minutis post meridiem.

14. Problema sextum. Dominus cuidam famulo daturum se julios septem, in dies singulos promittit hac lege, ut si quo die iustum opus non expleverit, ipse sibi julios quinque debeat: post dies triginta inventum est neque Dominum famulo, neque famulum domino quidquam debere. Queritur quot diebus famulus opus persolverit, quot otiosus fuerit? Dies laboris vocentur $= x$, adeoque reliqui $= 30 - x$: ex problematis conditione erit $7x = 5 \cdot 30 - x$; ergo $12x = 150$, & $x = \frac{150}{12} = 12\frac{1}{2}$; igitur constat famulum dies $12\frac{1}{2}$ in debito opere insumpsisse, reliquis nempe $17\frac{1}{2}$ fuisse otiosum.

15. Problema septimum. Cajus paterfamilias in suis alendis quotannis numeros aureos impendit 380, & quod reliquum est ex annuis redditibus seniori dat, estque ex eo perceptus fructus quarta ipsius residui pars annis singulis; anno sequenti pariter 380 aureos numeros impendit, & residuum dat seniori ut antea; idem accidit anno tertio, post quem invenit, redditum annum sexta primi anni redditus parte esse auctum. Queritur quinam sit primi anni redditus? Redditus primi anni esto $= x$, summi aurei $380 = a$; erit igitur primi anni residuum $x - a$, & fructus perceptus ex senore $= \frac{x-a}{4}$; ergo redditus secundi anni $\frac{x-a}{4}$

$+ \frac{x-a}{4}$, & residuum $= x + \frac{x-a}{4} - a = \frac{5x-5a}{4}$, cujus fructus $= \frac{5x-5a}{16}$
 dabit tertii anni redditum $= x + \frac{x-a}{4} + \frac{5x-5a}{16} = x + \frac{x}{6}$ ex ipsa pro-
 blematis conditione; ergo $\frac{16x+4x-4a+5x-5a}{16}$ idest $\frac{25x-9a}{16} = \frac{7x}{6}$

seu $38x \div 54a$, $x = \frac{54a}{38} = \frac{27a}{19} = \frac{10160}{19} = 540$. Igitur primi anni re-
 ditus fuerunt nummi aurei 540, secundi anni $540 + \frac{160}{4} = 580$, tertii deni-
 que $580 + \frac{200}{4} = 630$, qui numerus est $540 + \frac{540}{6}$: quemadmodum initio fue-
 rat in conditione propositum. Ut rem terminis generalibus conficiamus, sit fru-
 ctus ex sœnore pars n^{esima} fortis, & primi anni redditus ad sumam augmentat: rati-
 onem habeat $1 : m$: erit primi anni redditus x , secundi $x + \frac{x-a}{n}$, tertii x
 $+ \frac{x-a}{n} + \frac{nx+x-a-na}{n} = x + mx$; quare $\frac{n^2x+n^2x-n^2}{n^2} + \frac{x-a-na}{n}$
 $= x + mx$, & $2nx + x - 2na - a = mn^2x$, $2nx + x - mn^2x = 2na + a$;
 $x = \frac{2n+1 \cdot a}{2n+1-mn^2}$.

16. Problema octavum. Data duorum numerorum proportione, & summa, numerus ipsos invenire. Summa sit $= a$, proportio ut $m : n$, & duo quesiti numeri vocentur x, y . Juxta conditiones erit $x+y=a$, & $x:y::m:n$, aut componendo $x+y=a : y::m+n:n$, seu $x:x+y = a::m:m+n$; ergo $y = \frac{an}{m+n}$, $x = \frac{am}{m+n}$. Nunc ex. gr. singe summam esse 100, & proportionem ut 3 : 2; igitur $100 = a$, $m = 3$, $n = 2$, & $x = \frac{300}{5} = 60$, $y = \frac{200}{5} = 40$. Eadem uti possumus methodo, si loco summæ data esset numerorum differentia, ita ut sit $x-y=a$: etenim ex proportione erit dividendo $x-y = a : y::m-n:n$, seu $x:x-y = a::m:m-n$; ergo $y = \frac{an}{m-n}$, & $x = \frac{am}{m-n}$.

17. Problema nonum. Nonnulli homines conveniunt, ut simul cœnent, & in cœna scutata 12 impenduntur: quum duo ex convivis solvendo non sint, reliqui scutatum unum solvere debent præter id, quod singulis solvendum fuisset, si sumptus per convivarum omnium numerum fuisset divisus. Quæritur quinam sit convivarum numerus? Quæsitus numerus sit $= x$. Erunt igitur numerus eorum, qui symbolam contulerunt $x-2$, & symbola ipsa $\frac{12}{x-2}$; at si omnes solvissent pro cœna, fuisset $\frac{12}{x}$; ergo ex conditione $\frac{12}{x-2} - \frac{12}{x} = 1$, seu $\frac{12x - 12x + 24}{x^2 - 2x} = 1$, & $x^2 - 2x = 24$, $x^2 - 2x + 1 = 25$, $x - 1 = \pm 5$, $x = 6$, $x = -4$. Hoc in casu radix negativa usum habere non potest; ergo 6 fuerit convivæ. Cœnæ

terum etiam negativa radix -4 requisitis ab analysi conditionibus est prædita,

quoniam $\frac{11}{4-4} - \frac{12}{4} = 1$.

18. Si quis ita problema proposuisset, ut radices ambæ positivæ essent, non nihil in ipso indeterminatum remaneret. Ex. gr. fac sumptum cænz fuisse $= 75$, unum e sociis dedisse 19, residuum per capita æque divisum, & ita horum symbolam fuisse unitate minorem, quam revera esse debuisset, si sumptus integer per sociorum numerum divisus esset. Sit x ut antea numerus sociorum. Nisi fuisset qui daret 19, symbola uniuscujusque esset $\frac{75}{x}$; at in casu proposito est $\frac{75-19}{x-1} = \frac{56}{x-1}$,

sed hæc debet esse unitate minor quam prima; ergo $\frac{56}{x-1} + 1 = \frac{75}{x}$, id est $56x + x^2 - x = 75x - 75$, $x^2 - 10x = -75$; ergo $x^2 - 10x + 10^2 = 25$, seu $x - 10 = \pm 5$, $x = 15$, si radicem positivam accipias, $x = 5$, si negativam. Habet igitur x valores duos positivos, adeoque post problematis solutionem aliquid indeterminati remanet; & nihil aliud respondere potes, nisi aut sociorum numerum fuisse 15, aut 5.

19. Problema decimum. Duos numeros invenire quorum summa $= a$, & summa quadratorum $= bb$. Fingamus numeros esse x, y ; ergo $x + y = a$, & $x^2 + y^2 = bb$. Prima æquatio quadrando est $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$; hinc si æquationem secundam subtrahamus, residuum erit $2xy = a^2 - b^2$; quod e secunda subtractum, dat $x^2 - 2xy + y^2 = 2b^2 - a^2$; ergo $x - y = \sqrt{2b^2 - a^2}$; quæ si addatur & deinde a prima subtrahatur, fiet $x = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$, & $y = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$.

20. Problema undecimum. Tres invenire numeros continue proportionales, quorum data sit summa, & summa quadratorum. Esto summa numerorum $x + y + z = a$, & summa quadratorum $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. Eleva primam æquationem ad quadratum, quod est $x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + z^2 + 2xz = a^2$, & hinc secundam subtrahere; habes $2xy + 2yz + 2xz = a^2 - b^2$; at numeri continue proportionales esse debent; ergo $xz = y^2$; adeoque $2y \cdot \frac{x+y+z}{2} = a^2 - b^2$; sed summa est $= a$; igitur $2y \cdot a = a^2 - b^2$, seu $y = \frac{a^2 - b^2}{2a}$. Numero y invento erit jam $x + z = a - y$, & $x^2 + z^2 = b^2 - y^2$; ergo problema ad antecedens reductum est.

21. Problema duodecimum. Tres numeros invenire, quorum summa $= a$, summa quadratorum $= b^2$, & summa rectangulorum, quot fieri possunt diversa, $= cc$. Hæc sunt æquationes, 1^a. $x + y + z = a$, 2^a. $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, 3^a. $xy + xz + yz$

$+y z = c^2$. Prima ad quadratum perducta, est $x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 = a^2$, & ex hac subtracta secunda superest $2xy + 2yz + 2xz = a^2 - b^2$, unde si deducatur tertia multiplicata per a erit residuum $0 = a^2 - b^2 - 2ac^2$, seu $c^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}$: ostenditur hoc pacto problema non esse possibile, nisi in hypotesi, in qua sit $c^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}$; imo hinc theorema inferitur, quo docetur, summam rectangulorum, quotquot ex tribus numeris fieri possunt, esse semper $\frac{a^2 - b^2}{2}$, si summa numerorum sit a , & summa quadratorum bb ; adeoque problema nostrum est plusquam determinatum; cujus problematum speciei natura est alibi indicata.

22. Problema decimumtertium. Invenire duos numeros, quorum productum sit $= a^2$, & quorum summæ quadratum ad quadratum differentię sit in ratione $b:c$. Sit numerorum summa $= 2x$, & differentia $= 2y$; ergo major numerus $= x+y$, minor $= x-y$. Ex conditione prima debet esse $x^2 - y^2 = aa$, ex altera $4x^2 : 4y^2$, seu $x^2 : y^2 :: b:c$; ergo dividendo $x^2 - y^2 = aa : y^2 :: b-c : c$, seu $x^2 - y^2 = a^3 : : b : b - c$; ergo $y^2 = \frac{ca^3}{b-c}$, $x^2 = \frac{ba^3}{b-c}$, & extracta radice $y = \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b-c}}$, $x = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b-c}}$.

23. Problema decimumquartum. Quærentur duo numeri, in quibus hæc tria nempe summa, productum, & differentia quadratorum æqualia sint. Sit numerus major $= x$, minor $= y$; habemus æquationes $x^2 - y^2 = xy$, & $x+y = xy$, & divisa prima per secundam fit $x-y = 1$; ergo $x = 1+y$; quo x valore in secunda substituto, erit illa $2y+1 = y^2+y$, unde $y^2 - y = 1$, $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$; quo valore posito loco y in æquatione $x-y = 1$, erit $x = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Et revera duo numeri $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, & duo etiam $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ problema perfecte solvunt; primi enim duo exhibent summam, productum, & quadratorum differentiam $= 2 + \sqrt{5}$, duo alii $= 2 - \sqrt{5}$.

24. Si ad x invenendam substituissemus valorem y inventum in prima æquatione, fuisset $x = y$. $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; unde quatuor exur-

gunt valores x , scilicet $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, -1 , -1 . Duos primos valores cum valoribus y problema solvere jam vidimus; at alii duo id præstare non possunt, neque ullo pacto problemati inserviunt. Id autem mirum accidere non debet, ut alibi monuimus. Namque æquationes id tantum indicant, inter exhibitos valores aliquos esse, qui problema solvant; neque tuto affirmare possumus valores omnes hujusmodi esse, nisi cum æquatio simpliciori methodo fuerit pertractata. Cum enim illam per implexas vias circumducimus, alix tacite conditiones involvuntur, quæ radicem numerum necessario augment. At superfluas radices a veris facile secernes, si valores omnes in æquationibus omnibus successive colloques. Ita in casu nostro cum valore y in secundam æquationem inducimus, solvenda nobis est æquatio primi gradus, ut valorem x eruamus; at si eundem valorem substituamus in prima, æquatio gradus secundi solvenda est, quæ via quum implexior sit, mirum non est, si cum veris radices superfluz misceantur.

25. Problema decimumquintum. Datum numerum $= 2a$ ita in duas partes dividere, ut earum quadrata invicem multiplicata dent numerum $= a^2b$. Partium differentia vocetur $= 2x$, major numerus $= a+x$, minor $= a-x$; ergo $\frac{a+x}{a-x} = \frac{a^2b}{a^2-x^2} = a^2b$, seu $\frac{a^2-x^2}{a^2} = a^2b$, & radice extracta $a^2 - x^2 = \pm a\sqrt{ab}$; ergo $x = \sqrt{a^2 \mp a\sqrt{ab}}$; major itaque numerus erit $a + \sqrt{a^2 \mp a\sqrt{ab}}$, & minor $a - \sqrt{a^2 \mp a\sqrt{ab}}$. Si radice interioris superius signum accipias, erit $\sqrt{a^2 - a\sqrt{ab}}$ quantitas minor quam a , adeoque erit numerus $2a$ in partes positivas divisus, solutumque problema; at si accipias inferius signum, cum sit $\sqrt{a^2 + a\sqrt{ab}} > a$, necessario erit major numerus $> a$, & minor negativus. Sit enim $2a = 14$, & $a^2b = 2304$; ergo $a\sqrt{ab} = 48$, unde $x = \sqrt{49 \mp 48}$. Accepto signo superiori, fiet $x = 1$, & duo numeri quæriti $7+1 = 8$, $7-1 = 6$. At accepto signo inferiori, est $x = \sqrt{97}$; ergo major numerus $= 7 + \sqrt{97}$, minor $= 7 - \sqrt{97}$, id est primus major quam 14, alter negativus.

26. Problema decimumsextum. Quælibet auri libra valet a , argenti b ; ut metallum habeam ex his mixtum, cujus valor in libras singulas sit c , quota pars auri, & quota argenti est accipienda? Sit auri pars $= x$, argenti $= y$. A regula aurea, quæ etiam trium appellatur, discimus, quod si una auri libra valet a , pars auri x valebit ax ; quia $1:a::x:ax$; pariter quia $1:b::y:by$, erit by valor portiois argenti. Igitur quia partes x , y unam libram simul debent efficere, erit $x+y = 1$, & quia valores x , y debent æquare c , erit æquatio alia $ax+by = c$. Jam vero si æquationem primam per b multiplices, & ex altera subtrahas, erit $a \times - b \times = c - b$; ergo $x = \frac{c-b}{a-b}$; si deinde e prima multiplicata per a secundam subducas, habes $ay - by = a - c$, unde $y = \frac{a-c}{a-b}$. Est igitur $x: y :: c-b : a-c$; quapropter si libra in hac ratione dividatur, habebis auri partes atque argenti, quæ ad unam mixti quæriti libram necessario requiruntur. Ex. g. sit $a = 21$, $b = 11$, $c = 15$, erit $c-b = 4$, & $a-c = 6$; divide unam libram in par-

in partes, quæ sint ut 4:6, seu ut 2:3; hæ partes sunt $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$; igitur $\frac{2}{3}$ libræ auri, cum $\frac{2}{3}$ libræ argenti libram metalli mixti efficiunt, cujus valor erit 15. Si plures quam duæ essent res permiscendæ, patet plures etiam requiri conditiones, ut problema determinetur.

27. Problema decimumseptimum. Duo dolia habemus, in quibus vinum est aqua mixtum: in uno vinum est ad aquam ut $a:b$; in alio ut $c:f$; quaeritur quænam liquoris pars et primo dolio sit extrahenda, quænam et secundo, ut tertium impleamus dolium, in quo vinum ad aquam sit ut $m:n$. Aquam & vinum indicent initiales litteræ A, V ; ergo in primo dolio habemus $aV + bA$, & in secundo $cV + fA$. Liquor et primo extrahendus sit $=x$, qui debet extrahi ex altero $=y$; erit igitur $a \times V + b \times A + cyV + fyA = mV + nA$; at esse debet $a \times V + cyV = mV$, & $b \times A + fyA = nA$; ergo $ax + cy = m$, & $bx + fy = n$, uade $x = \frac{fm - cn}{af - cb}$, & $y = \frac{an - mb}{af - cb}$. Si ponas $a=7, b=3; c=4; f=6$, $m=n=6$ inuenies $x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$.

28. Methodus non hæc tantum finibus continetur. Sint enim plura simul permixta v. gr. A, B, C , in ea ratione, quam sequentes indicant formæ $aA + bB + cC, eA + fB + gC, hA + iB + kC$: ex prima combinatione accipiat x, y ex secunda, ex tertia z , & in nova mixtione debeant esse m, n, p in proportionem m, n, p . Igitur erit $a \times A + b \times B + c \times C = m$
 $e \times A + f \times B + g \times C = n$
 $h \times A + i \times B + k \times C = p$

Hinc tres enascuntur æquationes, quæ problema solvent, scilicet $a \times A + e \times A + h \times A = m$, $b \times B + f \times B + i \times B = n$, $c \times C + g \times C + k \times C = p$, unde valores x, y, z erui poterunt. Facile est dignoscere hujusmodi methodum esse universalem, & ad quæcumque miscendarum rerum numerum protendi posse.

29. Problema decimumoctavum. Vas habes plenum vino $=a$, extrahis mensuram vini $=b$, & aquæ tantundem infundis: extrahis deinde liquoris sic mix-

ti aliam mensuram $=b$, & iteram vas aqua infusa implet; idem tertio facis &c. Scire velles quantum vini in vase superfit post datum quæcumque harum extractionum numerum. Manifestum est post primam extractionem vinum in vase contentum esse $=a - b$; at in secunda quum vinum aqua permixtum fuerit, ut scias quantum extraxeris vini,

fac $a : a - b :: b : \frac{b}{a} \cdot \frac{a - b}{a}$; igitur vinum extractum secunda vice erit $\frac{b}{a} \cdot \frac{a - b}{a}$; at jam antea

vinum erat $a - b$; ergo post secundam extractionem vinum, quod superest in vase, erit $a - b - \frac{b}{a} \cdot \frac{a - b}{a}$.

$a - b = \frac{a - b}{a}$. Ita inuenies vinum extractum

in tertia extractione esse $\frac{b}{a^2} \cdot \frac{a - b}{a}$; namque $a :$

$\frac{a - b}{a} :: b : \frac{b}{a^2} \cdot \frac{a - b}{a}$; ergo post extractionem

Numerus extractionum	Vinum quod superest.
1	$a - b$
2	$\frac{a - b}{a}$
3	$\frac{a - b}{a^2}$
4	$\frac{a - b}{a^3}$
5	$\frac{a - b}{a^4}$
6	$\frac{a - b}{a^5}$
7	$\frac{a - b}{a^6}$
8	$\frac{a - b}{a^7}$
9	$\frac{a - b}{a^8}$
10	$\frac{a - b}{a^9}$
11	$\frac{a - b}{a^{10}}$
12	$\frac{a - b}{a^{11}}$
13	$\frac{a - b}{a^{12}}$
14	$\frac{a - b}{a^{13}}$
15	$\frac{a - b}{a^{14}}$
16	$\frac{a - b}{a^{15}}$
17	$\frac{a - b}{a^{16}}$
18	$\frac{a - b}{a^{17}}$
19	$\frac{a - b}{a^{18}}$
20	$\frac{a - b}{a^{19}}$
21	$\frac{a - b}{a^{20}}$
22	$\frac{a - b}{a^{21}}$
23	$\frac{a - b}{a^{22}}$
24	$\frac{a - b}{a^{23}}$
25	$\frac{a - b}{a^{24}}$
26	$\frac{a - b}{a^{25}}$
27	$\frac{a - b}{a^{26}}$
28	$\frac{a - b}{a^{27}}$
29	$\frac{a - b}{a^{28}}$
30	$\frac{a - b}{a^{29}}$
31	$\frac{a - b}{a^{30}}$
32	$\frac{a - b}{a^{31}}$
33	$\frac{a - b}{a^{32}}$
34	$\frac{a - b}{a^{33}}$
35	$\frac{a - b}{a^{34}}$
36	$\frac{a - b}{a^{35}}$
37	$\frac{a - b}{a^{36}}$
38	$\frac{a - b}{a^{37}}$
39	$\frac{a - b}{a^{38}}$
40	$\frac{a - b}{a^{39}}$
41	$\frac{a - b}{a^{40}}$
42	$\frac{a - b}{a^{41}}$
43	$\frac{a - b}{a^{42}}$
44	$\frac{a - b}{a^{43}}$
45	$\frac{a - b}{a^{44}}$
46	$\frac{a - b}{a^{45}}$
47	$\frac{a - b}{a^{46}}$
48	$\frac{a - b}{a^{47}}$
49	$\frac{a - b}{a^{48}}$
50	$\frac{a - b}{a^{49}}$
51	$\frac{a - b}{a^{50}}$
52	$\frac{a - b}{a^{51}}$
53	$\frac{a - b}{a^{52}}$
54	$\frac{a - b}{a^{53}}$
55	$\frac{a - b}{a^{54}}$
56	$\frac{a - b}{a^{55}}$
57	$\frac{a - b}{a^{56}}$
58	$\frac{a - b}{a^{57}}$
59	$\frac{a - b}{a^{58}}$
60	$\frac{a - b}{a^{59}}$
61	$\frac{a - b}{a^{60}}$
62	$\frac{a - b}{a^{61}}$
63	$\frac{a - b}{a^{62}}$
64	$\frac{a - b}{a^{63}}$
65	$\frac{a - b}{a^{64}}$
66	$\frac{a - b}{a^{65}}$
67	$\frac{a - b}{a^{66}}$
68	$\frac{a - b}{a^{67}}$
69	$\frac{a - b}{a^{68}}$
70	$\frac{a - b}{a^{69}}$
71	$\frac{a - b}{a^{70}}$
72	$\frac{a - b}{a^{71}}$
73	$\frac{a - b}{a^{72}}$
74	$\frac{a - b}{a^{73}}$
75	$\frac{a - b}{a^{74}}$
76	$\frac{a - b}{a^{75}}$
77	$\frac{a - b}{a^{76}}$
78	$\frac{a - b}{a^{77}}$
79	$\frac{a - b}{a^{78}}$
80	$\frac{a - b}{a^{79}}$
81	$\frac{a - b}{a^{80}}$
82	$\frac{a - b}{a^{81}}$
83	$\frac{a - b}{a^{82}}$
84	$\frac{a - b}{a^{83}}$
85	$\frac{a - b}{a^{84}}$
86	$\frac{a - b}{a^{85}}$
87	$\frac{a - b}{a^{86}}$
88	$\frac{a - b}{a^{87}}$
89	$\frac{a - b}{a^{88}}$
90	$\frac{a - b}{a^{89}}$
91	$\frac{a - b}{a^{90}}$
92	$\frac{a - b}{a^{91}}$
93	$\frac{a - b}{a^{92}}$
94	$\frac{a - b}{a^{93}}$
95	$\frac{a - b}{a^{94}}$
96	$\frac{a - b}{a^{95}}$
97	$\frac{a - b}{a^{96}}$
98	$\frac{a - b}{a^{97}}$
99	$\frac{a - b}{a^{98}}$
100	$\frac{a - b}{a^{99}}$

terti. m

tertiam superest vini $\frac{a-b^2}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \frac{a-b^2}{a} = \frac{a-b^3}{a^2}$. Eadem methodo in-

venies, vinum post extractionem quartam esse $\frac{a-b^4}{a^3}$. Potes igitur tabulam ef-

formare, in qua videbis seriem geometrice decrecentem, & exponentem numeratoris $a-b$ æquare extractionum numerum, exponentem vero denominatoris a esse eundem extractionum numerum unitate imminutum; ergo inferre etiam potes vinum residuum in tuo vase post quemlibet numerum n extractionum esse

$$\frac{a-b^n}{a^{n-1}}$$

30. Problema decimumnonum. Titus post certum annorum numerum numerare Cajo debet pecuniam $= a$; facta hypotesi, quod fructus pecuniaz annuus sit ejusdem pars m^{fima} , quaeritur, si nunc se velit onere liberare, quid Cajo debeat dare? Vocemus $= x$ id, quod nunc debet Titus persolvere. Fructus hujus pecuniaz x post primum annum est $\frac{x}{m}$; ergo sum-

ma pecuniaz $x + \frac{x}{m}$. Si pecunia esset post primum annum solvenda, esset $x + \frac{x}{m} = a$, idest $x = \frac{m a}{m+1}$.

At si tempus nondum advenerit; quoniam pecunia est post finem primi anni $x + \frac{x}{m}$, erit fructus secundi anni $\frac{x}{m} + \frac{x}{m^2}$; ergo aucta est pecunia usque ad sum-

mam $x + \frac{2x}{m} + \frac{x}{m^2} = x \cdot \frac{m+1}{m^2}$, quæ, si pecunia post secundum annum sit Cajo enumeranda, erit $= a$;

igitur in hac hypotesi $x = \frac{m^2 a}{m+1}$. Sed neque hic est annus, quo Titus solvere teneatur; igitur quum fructus

pecuniaz $x \cdot \frac{m+1}{m^2}$ sit $x \cdot \frac{m+1}{m^3}$, pecuniaz summa post annum tertium erit

$x \cdot \frac{m+1}{m^2} + x \cdot \frac{m+1}{m^3} = x \cdot \frac{m+1}{m^3} = a$ si tres fuerint anni constituti, &

tunc erit $x = \frac{m^3 a}{m+1}$. Hac methodo si profequamur, seriem habebimus geometricam

Si pecunia :	debet
fit danda :	nunc
post annos :	
1	$\frac{m a}{m+1}$
2	$\frac{m^2 a}{m+1}$
3	$\frac{m^3 a}{m+1}$
:	$\frac{m^4 a}{m+1}$
:	:
:	:
:	$\frac{m^n a}{m+1}$
n	$\frac{m^n a}{m+1}$

tricam, in qua duo exponentes numerum æquant annorum; recte igitur inferre possumus debere nunc Titum pecuniam $= \frac{m^n a}{m+1}$ posito n pro quolibet annorum numero, quo elapso pecuniam $= a$ solvere debuisset.

CAPUT SEPTIMUM

De resolutione problematum semideterminatorum.

1. **P**roblemata semideterminata proprie ad indeterminatorum classem pertinent, quum in ipsis impossibile sit æquationes tot instituire, quot sunt incognitæ: at aliquibus additis conditionibus, ita solutionum numerus imminuitur, ut sæpiissime determinatus fiat, aliquando etiam nullus. Et si vero instituti nostri ratio non postulet, ut de hoc problematum genere loquamur, ne tamen rei analyticæ studioſis novi accidant prorsus, hoc capite aliquot eorum specimen tradere duximus opportunum. Duas itaque hic additarum conditionum species considerabimus: prima erit, ut numeri integri sint, & positivi; altera, ut sint quadrati, vel cubi &c.

2. Quoad primam: æquationibus omnibus ad unam reductis, in qua duas esse incognitas supponimus, limites primo determinare oportet, quibus transgressis, aut una quantitas, aut plures fierent negativæ; ita enim tentaminum, numerus valde minuetur. Deinde uni ex incognitis diversis successive assignandi valores, qui tamen huiusmodi sint, ut altera non sit tractio. Itæ solutiones omnes possibiles obrinebimus. Methodus tribus exemplis, quæ sequuntur, declarabitur.

3. **Problema primum.** Quærentur duo numeri x, y tales, ut sint $3x - 5y = 9$; ergo $y = \frac{3x-9}{5}$. Ut numerum negativum fugiamus, debet esse $3x > 9$,

id est $x > 3$; atque, ut vitentur fractiones, oportebit, ut $3x - 9$ perfecte dividi possit per 5. Jam vero ii numeri tantum sunt divisibiles per 5, qui desinunt vel in zero, vel in 5; ut autem $3x - 9$ desinat in zero, necesse est, $3x$ desinere in 9; utque $3x - 9$ desinat in 5, debet $3x$ terminare in 4; ergo nulli alii numeri possunt valorem x exhibere, nisi, qui per 3 multiplicati, vel in 9 desinunt, vel in 4. Omnium igitur minimus est 8, sequitur 13, deinde 18, quibus respondet $y = 3, 6, 9$ &c. ut in tabula vides. Notandum, cum valores x , tum valores y duas crescentes arithmeticas series efformare; primæ differentia est 5, alterius 3; ex quo discimus, tabulam in infinitum nullo negotio produci posse, & numeros omnes, sibi in ipsis respondentes, problemati satisfacere, ac illius infinitas esse solutiones.

$x = 8$	$y = 3$
13	6
18	9
23	12

4. **Problema secundum.** Quærentur duo numeri x, y , ita ut sit $3x + 2y = 20$, vel $x = \frac{20-2y}{3}$. Statim apparet, debere esse $y < 10$, secus x esset negativa. Eodem pacto probabimus esse debere $x < 7$. Quoniam
vctro

vero $\frac{20}{3}$ non est pura fractio, sic æquationem exponemus $x = 6 + \frac{2-2y}{3}$
 $= 6 + 2 \cdot \frac{1-y}{3}$. Ut fractio det numerum integrum, stante $y < 10$, facile est

cognoscere, y alium valorem habere non posse, nisi 7, 4, 1, quibus respondent
 valores $x = 2, 4, 6$; neque præter has alia invenitur solutio. Animadverten-
 dum primo est, non referre, quod numerus integer ex fra-
 ctione ortus sit negativus, cummodo y præscriptos limites
 non excedat; secundo valores y inventos esse in arithmetica
 serie decrescente, cujus differentia 3, & valores x in crecente,
 cujus differentia est 2.

$y = 7$	$x = 2$
4	4
1	6

5. Problema tertium. Invenire duos numeros x, y tales, ut, subtrahito 5 de
 3 x , reliquum sit 7 y . Igitur erit $3x - 5 = 7y$, aut $y = \frac{3x-5}{7}$. Patet esse
 debere $3x > 5$, adeoque $x > 1$. Æquationem ita disponamus $y = x - \frac{4x-5}{7}$.
 Ut fractio $\frac{4x-5}{7}$ det numerum integrum, vides minimum valorem, qui possit
 assignari x , esse 4, quo in casu est fractio $\frac{16-5}{7} = \frac{11}{7} = 3$; ergo $y = 1$. In-

veniemus deinde valorem $x = 11$, cui respondet $y = 4$.
 Tandem duæ series arithmetice crescentes oriuntur, qua-
 rum prima habet differentiam 7, alia 3, in quibus numeri
 quicumque analogi problema solvunt: adeoque infinitæ
 sunt solutiones. Fortasse melius erat æquationem ita dis-
 ponere $x = \frac{7y+5}{3}$, aut $x = 2y + 1 + \frac{y+2}{3}$; mul-

$x = 4$	$y = 1$
11	4
18	7
25	10
32	13

to enim facilius erat, dignoscere y æqualem numeris 1,
 4, 7 dare fractionis numeratorem per 3 perfecte divisibilem.

6. Et si omnia, quæ attulimus exempla, viam ostendunt, quam in hujusmo-
 di problematum solutione sequamur; tamen fateri oportet, esse hoc iter densissi-
 mis tenebris circumfusum, & incerto nos ferri gressu, quem incognitæ valorem
 querimus, quo posito sit fractio numerus integer. Exercitatio tamen, & indu-
 stria quantum ad depellendas tenebras juvent, satis compertum. Ut melius res
 cedat, opportunum erit ad sequentia animum advertere. Si sit $x = a + by$ ita, ut
 nulla habeatur fractio, perspicuum est, quemcumque valorem positivum y , initio
 ab unitate factò, daturum respondentem valorem x ; quapropter in infinitum a-
 bit numerus solutionum. In æquatione $x = a - by$ quicumque valor y , qui mi-
 nor sit quam $\frac{a}{b}$, dabit valorem x positivum, & integrum; & quemadmodum fi-
 nitus est numerus numerorum integrorum, qui inter zero, & $\frac{a}{b}$ continentur,
 ita finitus erit numerus solutionum. Tandem in formula $x = by - a$, quicum-
 que sit y , dummodo major quam $\frac{a}{b}$, dabit problematis solutionem, adeoque in
 hoc casu solutiones obtinebimus infinitas. Quapropter si absint fractiones, cum
 iis abest difficultas.

7. Sit modo $x = \frac{a+by}{c}$, & primo supponamus $\frac{a}{c}$ numerum integrum,
 quem vocemus m , nuda sit $x = m + \frac{by}{c}$. Fractio $\frac{by}{c}$ ad minimos
 ter-

terminos reducat, quod semper fieri potest. Nunc eam ita esse sponnentes, videmus, si fiat $y = c, 2c, 3c$, aut cuicumque multiplo c , fractionem integram numerum exhibere, & problema solvi. Si vero sit $x = \frac{a-by}{c}$, eodem pacto disposita æquatione $x = m - \frac{by}{c}$, patet, eos tantum numeros multiplos c prodesse, qui dent $y < \frac{a}{b}$, adeoque finitum esse numerum solutionum, aut nullum, si nullus sit ejusmodi numerus, quo in casu problema est impossibile. Tandem in æquatione $x = -m + \frac{by}{c}$ ii numeri multipli c juvant, per quos est $y > \frac{a}{b}$.

8. Quum hæc non verificantur simpliciores hypothesés, res tota est in talibus valoribus y inveniendis, qui dent fractionem $\frac{a+by}{c}$ numerum integram, siue a , & b sint numeri ambo positivi, siue alter positivus, alter negativus. Certam hic methodum ad eos inveniendos tradere oportet, quæ, ut sit clarior, opportunum est operationem totam exemplo aliquo ante oculos ponere; quoniam ita facilius deinde erit, universaliter illius rationem ostendere.

9. Exemplum esto $\frac{76+59y}{33}$, & valores y querantur, qui hanc fractionem reddant numerum integram. Quoniam uterque terminus dat impuram fractionem, eam, divisione facta per 33, purificemus, & scribamus $2+y + \frac{10+16y}{33}$. Patet obtinuisse nos intentum, quotiescumque sit numerus integer fractione $\frac{10+16y}{33}$. Hanc igitur inspiciamus, scrutemurque, an termini factorem aliquem habeant communem. Invenimus habere quidem, & hunc esse 2, quem præmittimus fractioni ita 2. $\frac{5+13y}{33}$. Hic etiam facile est agnoscere, quod si numerus integer sit fractio $\frac{5+13y}{33}$, erit pariter si multiplicetur per 2; adeoque eo redam rem esse, ut inveniamus valorem y ita, ut $\frac{5+13y}{33}$ sit numerus integer.

10. Puras fractiones, in quibus termini numeratoris inter se sunt numeri primi, vocamus fractiones redactas. Supponamus p numerum quemcumque integram. Esse igitur debet $\frac{2+13y}{33} = p$; ergo $y = \frac{33p-5}{13}$. Reducamus fractionem, & sit $y = 2p + \frac{7p-5}{13}$. Faciamus iterum $\frac{7p-5}{13} = q$; ergo $p = \frac{13q+5}{7}$, & fractione reducta $p = q + \frac{6q+5}{7}$. Ponimus tertio, ut supra, $\frac{6q+5}{7} = r$; unde $q = \frac{7r-5}{6} = r + \frac{r-5}{6}$. Sit denique $\frac{r-5}{6} = s$; ergo $r = 6s+5$, ex qua scimus r fore numerum integram, quicumque sit valor s . Hic considerantes r tanquam numerum integram, retro revertimur, & invenimus

mus $q = 7r + 5$, $p = 13r + 10$, $y = 33r + 25$; qui valor, positus in prima nostra fractione $\frac{76 + 59y}{33}$, dabit $47 + 59r$, in qua r quilibet integer numerus potest esse.

11. Si quis paulo attentius operationis seriem confideret, facile inferet, quando nam in fractione $\frac{a + by}{c}$ valores y haberi possint, per quos illa numerus integer evadat, & quando obtineri nullo modo possint. Videlicet tunc ad optatum finem perveniri posse intelligit, quum in fractione redacta numeri b , c sunt inter se primi. Etenim in nova fractione, quæ oritur, dividitur c per b , & residuum dat fractionem aliam redactam; iterum in nova fractione c dividitur per primum residuum, hoc deinde per residuum secundum; in qua operatione, quum b , c sint numeri primi, necesse omnino est, ut ad residuum perveniamus unitati æquale. Quod ubi obtinemus, voti compotes efficiamur; nam hæc fractio ultima novæ incognitæ æqualis fiat, huic quilibet valor integer poterit assignari.

12. At, si b , c non essent inter se primi, tunc res impossibilis prorsus fit; quum impossibile sit obtinere residuum æquale unitati; quod sic potest nullo negotio demonstrari. Sit redacta fractio $\frac{a + by}{c}$, in qua a , b sunt numeri inter se primi. Quoniam supponimus b , c primos inter se non esse, habebunt communem aliquam factorem n , & fit $b = nf$, $c = ng$. Pater a habere non posse factorem n . Fiat hocposito $\frac{a + nfy}{ng} = p$; ergo $\frac{a}{n} + fy = gp$; ergo si gp esset numerus integer, numerus integer esset etiam $\frac{a}{n} + fy$: atqui hoc est impossibile; quia quum sit fy integer, etiam $\frac{a}{n}$ integrum numerum esse oporteret, quod est contra hypothesein.

13. Et revera si in redacta fractione esset $\frac{5 + 11y}{33}$, in qua numeri 11, 33 non sunt primi, nostra operatio esset $\frac{5 + 11y}{33} = p$; ergo $\frac{33p - 5}{11} = y = 3p - \frac{5}{11}$, quæ, quum p numerus integer esse debeat, numerum integrum æquare nunquam poterit. Hac generali methodo docemur, utrum $\frac{a + by}{c}$ numerus integer esse possit nec ne, & quotiescunque id fieri potest, quinam sint valores y , qui id præstent. Non desunt tamen artificia exercitatione addiscenda, quæ valde laborem immittant, & a longioribus sæpe calculis liberent. Addemus hic tria alia problemata, ut theoria magis etiam, si fieri potest, exemplis illustretur.

14. Problemæ quartum. Coturnices nummis duobus veniunt, Turdi 1, Passeres $\frac{1}{2}$, non habes nisi summos 70: attamen vis emere 100 harnm avium capita, quaeritur quot ex singulis speciebus emere debeas? Numerus Coturnicæ sit x , Turdorum y , Passerum z . Habentur statim hæc duæ æquationes

nes $x + y + z = 100$, $2x + y + \frac{1}{2}z = 70$. E secunda multiplicata per 2 primam detrahe; oritur $3x + y = 40$, ex qua po-

tes inferre, esse debere $x < \frac{40}{3}$, seu $x < 14$, &

$y < 40$. Nunc formulam $y = 40 - 3x$ considera.

Si facis $x = 13$, erit $y = 1$, $z = 86$; si $x = 12$, erit $y = 4$, & $z = 84$, atque ita deinceps, ut in tabula poses animadvertere. Tredesim igitur solutiones admittit problema, non plures, neque pauciores; nam extra præscriptos limites statim occurrunt negativi. Nota valores trium incognitarum tres efficere series arithmeticas: prima decrescit, & habet differentiam 1; altera crescit, ejusque differentia est 3; tertia decrescit cum differentia 2.

$x = 13$	$y = 1$	$z = 86$
12	4	84
11	7	82
10	10	80
9	13	78
8	16	76
7	19	74
6	22	72
5	25	70
4	28	68
3	31	66
2	34	64
1	37	62

15. Problema quintum. Triginta partim vi-

ri, partim mulieres, partim pueri simul manducaverunt; sumptus integer 75, sed viri solverunt 5, mulieres 3, pueri vero 2. Queritur virorum numerus, mulierum, & puerorum? Vocato virorum numero x , mulierum y , puerorum z , unusquisque intelliget duas ex propositis conditionibus æquationes descendere; nempe $5x + 3y + 2z = 75$, $x + y + z = 30$. Secunda multiplicata per 2, & ita subtracta e prima dat $3x + y = 15$; ergo $x < 5$, $y < 15$. Multipli-

cemus jam secundam æquationem per 3, & ex producto primam subtrahamus; erit $-2x + z = 15$; ergo $z = 15 + 2x$; sed $2x < 10$; ergo $z < 25$. Quia vero limites x sunt omnium arctissimi, ideo his utimur æquationibus $y = 15 - 3x$, $z = 15 + 2x$. Si ponimus $x = 4$, invenimus $y = 3$, $z = 23$. Quatuor solutiones, quas admittit proble-

$x = 4$	$y = 3$	$z = 23$
3	6	21
2	9	19
1	12	17

ma ostendit tabella, in qua etiam valorum series, & serierum differentias facile est deprehendere.

16. Problema sextum. Invenire quot modis possit quis solvere 500 Julios, aureis partim adhibitis (vulgo Zecchini) quorum valor 21 Juliorum est, partim (meze doppie) quorum valor 17. Primæ speciei numerus esto x , alterius y . Orietur igitur æquatio $21x + 17y = 500$; unde habemus debere esse

$$x < \frac{500}{21}, \text{ idest } x < 24. \text{ Ex æquatione est } y = \frac{500 - 21x}{17} = 29 - x + \frac{7 - 4x}{17}$$

$$\text{Faciamus juxta traditam methodum } \frac{7 - 4x}{17} = p; \text{ ergo } x = \frac{17p + 7}{4} = 4p$$

$$+ 1 + \frac{p + 3}{4}. \text{ Faciamus iterum } \frac{p + 3}{4} = q; \text{ ergo } p = 4q - 3; \text{ in qua constat}$$

$$\text{fore semper } p \text{ numerum integrum, quicumque sit integer numerus } q. \text{ Revertentes itaque inveniemus valorem } x = \frac{17 \cdot 4q - 17 \cdot 3 + 7}{4} = 17q - 11, \text{ \& valorem}$$

$$y = \frac{500 - 21 \cdot 17q + 21 \cdot 11}{17} = 43 - 21q; \text{ quare habebimus } x, y \text{ numeri}$$

integris expressos. At opus etiam est vitare numeros negativos. Si $q = 1$, erit $x = 6$, $y = 22$; si $q = 2$, tunc invenitur $x = 23$, $y = 1$; ergo, exclusis

negativis, hæc solæ inveniuntur solutiones. At hoc problematum genus negativæ omnino non excludit, quæ indicant non me creditori, sed illum mihi dare, quidquid illis exprimitur, debere. Igitur facto $q=3$ erit $x=40, y=-10$;

— 45	85
— 28	64
— 11	43
$x = 6, y = 21$	
23	1
40	— 20
57	— 41
74	— 62

quod ostendit illum mihi debere 20 aureos minoris pretii, cui ego 40 aureos pretii majoris dederim. Si facimus $q=0$, est $x=-11, y=43$, unde dilucimus restituendos nobis aureos majoris pretii 11 post solutos 43 pretii minoris. Consue tabellam, quæ hinc inde in infinitum produci potest. Atque hæc satis superque sunt quoad ea problemata semideterminata, quæ negativos, & fractos numeros excludunt.

17. Ad eam problematum speciem veniæmus, quæ secundam conditionem postulant num. 1., nempe, ut numeri sint quadrati, cubi &c., in quo celebre Dio-phanti opus versatur. Plures, atque plurimum inter se diversæ sunt methodi, quibus in horum problematum solutione auctores usi sunt; ita ut, si de singulis vellemus hic agere, nimis longa res esset, & quæ una sibi volumen integrum postularret. Labor esset præterea in re positus curiosa magis, quam utili, & ab instituto nostro aliena. Non enim hæc funditus pericrutarî volumus, sed tantum analysos hujus speciem exhibere; cujus rei gratia; problemata nonnulla hæc solvimus, quæ methodos, & artificia patefaciant, quibus ejusdem generis alia pariter solvi possint. Hæc autem numeros fractos non excludunt, sed irrationales, quapropter in eo ars omnis est sita, ut ita incogitas quantitates nominemus, ut radicum extractions fugiantur, & arceantur quantitates lurdæ, & quibus problematis natura abhorret.

18. Problema primum. Duos invenire numeros, quorum quadrata in summam collecta dent numerum pariter quadratum. In solutione utimur hæc simplicissima methodo. Si quadrato $m^2 - 2m^2 + n^2$ addatur quadratum aliud $4m^2$, summa est $m^4 + 2m^2 + n^2$, qui numerus est quadratus; ergo duo quælibet numeri sunt $m^2 - n^2, 2mn$, quorum quadrata simul sumpta æquant quadratum numeri $m^2 + n^2$.

19. Eadem arte solvemus problema. Invenire duos numeros ita, ut, quadrato unius a quadrato alterius subducto, differentia sit numerus quadratus. Etenim numeri erunt $m^2 + n^2, m^2 - n^2$, quorum quadratorum differentia est $4m^2$ numerus quadratus, cujus radix $2mn$; aut numeri duo erunt $m^2 + n^2, 2mn$, qui ad quadratum elevati inter se distant per quadratum numerum $m^2 - 2mn + n^2$, cujus est radix $m^2 - n^2$.

20. Si unus e tribus numeris detur $=a$, v. g. ille, cujus quadratum æquale est quadratis reliquorum, multiplicabimus tres numeros inventos per

$\frac{a}{m+n}$, unde orientur numeri $\frac{m-n}{m+n}, \frac{a}{m+n}, \frac{2mn}{m+n}$, a . Primorum quadrata quadratum æquant tertii dati. Alia etiam via inveniri possunt duo li numeri, quorum quadrata simul æquant quadratum dati $=a$. Sit unus e numeris quæ-

quæsitis mx , alter $mx - a$; igitur ex conditionibus erit æquatio $n^2 x^2 + m^2 x^2 - 2max + aa = a^2$, seu $x = \frac{2ma}{m^2 + n^2}$; ergo quæsitæ numeri sunt $\frac{2ma}{m^2 + n^2}$, $\frac{2m^2 a}{m^2 + n^2} - a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} a$, uti supra.

21. Problema secundum. Invenire duos numeros ita, ut eorum quadrata simul sumpta duorum aliorum quadratorum summam æquent. Accipimus duos hosce numeros $m^2 a + 2mn b - n^2 a$, utrumque ad quadratum elevamus,

alias sub aliis scribentes potestates analogas m, n , & invenimus

$$\begin{aligned} m^4 a^2 + 4m^3 nab - 2m^2 n^2 a^2 - 4mn^2 ab + n^4 a^2 \\ + 4m^2 n^2 b^2 \\ m^4 b^2 - 4m^3 nab - 2m^2 n^2 b^2 + 4mn^2 ab + n^4 b^2 \\ + 4m^2 n^2 a^2 \end{aligned}$$

Accipimus quadratorum summam, in qua termini omnes, ubi reperitur ab , eliminantur, quo consilio numeri electi fuerunt. Summa est $m^4 a^2 + 2m^2 n^2 a^2 + n^4 a^2$

qui sunt duo numeri quadrati; adeoque numeri assumpti dant summam quadratorum æqualem quadratis duobus numerorum $m^2 + n^2 a, m^2 + n^2 b$. Q. E. F.

22. Nonnulla animadvertere oportet, ut harum formularum rectus sit usus. Si fieret $m = n$, numeri inventi iidem essent, atque assumpti; adeoque nugatoria solutio. Pariter si facimus $m:n :: a:b$, primus ex assumptis æquabit primum inventorum, & secundus secundum.

23. Si quis optaret numeros duos esse datos, e. g. a, b , tunc quatuor numeri dividendi erunt per $m^2 + n^2$, quo posito fiet $\frac{m^2 a + 2mn b - n^2 a}{m^2 + n^2}$, $\frac{-m^2 b + 2mna + n^2 b}{m^2 + n^2}$, a, b , & extremorum quadrata simul quadrata æquabunt priorum. Solutionem eandem habemus etiam ita. Fingamus quæsitos numeros, quorum quadrata esse debent $= a^2 + b^2$, esse $mx - a, nx - b$. Ergo ex ea conditione fiet $m^2 x^2 - 2max + a^2 + n^2 x^2 - 2nbx + b^2 = a^2 + b^2$, seu $x = \frac{2ma + 2nb}{m^2 + n^2}$; hoc igitur in numeris valore substituto erunt

$$\frac{2m^2 a + 2mn b}{m^2 + n^2} - a, \frac{2mna + 2n^2 b}{m^2 + n^2} - b, \text{ seu } \frac{m^2 a + 2mn b - n^2 a}{m^2 + n^2},$$

$\frac{-m^2 b + 2mna + n^2 b}{m^2 + n^2}$, quemadmodum antea. Neque est prætermittendum nume-

numeros accipi ad libitum posse, vel positivos, vel negativos, quum quadrata semper positiva sint.

24. Quamvis in formulis numeris applicandis tempus nolimus terere, quum id facillimum unicuique sit, tamen hic nobis liceat duos numeros quærere ab unitate diverfos, quorum quadrata simul efficiant 2. Faciamus igitur $a = b = 1$,

quo in casu erunt formulæ nostræ $\frac{m^2 + 2mn - n^2}{m^2 + n^2}$, $\frac{-m^2 + 2mn + n^2}{m^2 + n^2}$.

Nunc si ponimus	erunt numeri
$n = 1, m = 2$ — —	$\frac{7}{5}, \frac{1}{5}$
$m = 3$ — —	$\frac{14}{10}, \frac{2}{10}$, vel $\frac{7}{5}, \frac{1}{5}$, ut primi
$m = 4$ — —	$\frac{23}{17}, \frac{7}{17}$
$m = 5$ — —	$\frac{34}{26}, \frac{14}{26}$, idest $\frac{17}{13}, \frac{7}{13}$

atque ita deinceps.

25. Problema tertium. Invenire duos numeros ita, ut data sit differentia inter eorum quadrata. Duos numeros esse supponamus $m \times + n$, $m \times - n$, quorum sunt quadrata $m^2 \times^2 + 2mn \times + n^2$, $m^2 \times^2 - 2mn \times + n^2$, & horum differentia $4mn \times = a$ ex problematis conditione; ergo $\times = \frac{a}{4mn}$; adeoque numeri nostri fient $\frac{a}{4n} + n$, $\frac{a}{4n} - n$, qui, uti etiam numero superiore monuimus, nihil interest, utrum positivi sint, an negativi.

26. Videamus etiam hic, quomodo formulis numeri respondeant, & quæramus duo quadrata, inter quæ differentia sit 2. Igitur $a = 2$, adeoque numeri ad quadratum erigendi $\frac{1}{2n} + n$, $\frac{1}{2n} - n$.

Si fiat ergo	numeri sunt
$n = 1$ — —	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$
$n = 2$ — —	$\frac{9}{4}, \frac{7}{4}$
$n = 3$ — —	$\frac{19}{6}, \frac{17}{6}$
$n = 4$ — —	$\frac{33}{8}, \frac{31}{8}$

potest facile tabula in infinitum produci.

27. Invenire primo numerum, qui additus quadrato suo aliud quadratum exhibeat: secundo numerum pariter invenire, quem inter & quadratum ipsius differentia quadratum sit. Esto numerus x , ejus quadratum x^2 ; ergo $x^2 + x$ quadratum erit, quod vocetur $= p \times$; ergo $x^2 + x = p \times$, vel $x = \frac{1}{p-1}$. Simili

ratione si agamus de differentia, erit $x^2 - x = \text{quadrato}$, quod fit $q^2 x^2$; ergo $x = \frac{1}{1 - q^2}$. Sed quia solutio hujusmodi supponit $x > 1$, cum supponatur qua-

dratum $x^2 > x$, si quando esset $x < 1$, tunc fiat $x - x^2 = q^2 x^2$; unde $x = \frac{1}{q^2 + 1}$, Q. E. F.

28. Si quærat numerus, qui, cum additus, tum subductus de suo quadrato, semper det numerum quadratum, necesse erit, ut $\frac{1}{p^2 - 1} = \frac{1}{1 - q^2}$; ergo

$1 - q^2 = p^2 - 1$, & $p^2 + q^2 = 2$; ergo p, q numeri esse debent, quorum quadrata simul sumpta = 2, quos jam in secundo problemate invenimus; ergo illis substitui-

tutis $x = \frac{\frac{1}{m^2 + 1} - \frac{1}{m^2 - 1}}{\frac{1}{m^2 + 1} + \frac{1}{m^2 - 1}} - 1 = \frac{\frac{1}{m^2 + 1} - \frac{1}{m^2 - 1}}{\frac{1}{m^2 + 1} + \frac{1}{m^2 - 1}}$, qui valor exactissimè

formula habetur, si valor alter q ejus loco substituat

29. At si velimus $x < 1$, tunc fit oportet $\frac{1}{p^2 - 1} = \frac{1}{q^2 + 1}$, aut $q^2 + 1 = p^2 - 1$; ergo $2 = p^2 - q^2$. Hinc discimus quadratorum p, q debere esse differentiam = 2; igitur, si loco p utamur formula $\frac{1}{2n} + n$ problemate præcedenti

inventa, reperiemus $x = \frac{1}{\frac{1}{2n} + n - 2} = \frac{1}{1 + 4n^2}$.

30. Problema quintum. Numerum invenire, quo in duas partes diviso, quadratum unius partis in a ductæ, & addita parte alia ducta in b , quadratum efficiat. Numerus sit x , ipsius partes $y, x - y$; ergo $a^2 y^2 + b(x - y)^2$, aut $y^2 - \frac{by}{a} + \frac{bx}{a^2}$ quadratum esse debet; quod habebimus, si $\frac{bx}{a^2} = \frac{b^2}{4a^2}$, seu $x = \frac{b}{4a^2}$. Q. E. F.

31. Problema sextum. Tres numeros invenire ita, ut summa omnium, & summa duorum ex ipsis, quicumque sint, det numerum quadratum. Tres numeri sint $4x, x^2 - 4x, 2x + 1$; summa omnium, ut patet, est $x^2 + 2x + 1$, x^2 summa primi & secundi, $x^2 - 2x + 1$ summa secundi & tertii, qui omnes numeri quadrati sunt; ergo, ut problemati perfecte satisfaciat, nihil superest aliud, nisi talem x valorem determinare, ut etiam $6x + 1$, quæ est sum-

ma primi, & tertii fit numerus quadratus. Fiat $6x+1=m^2$; ergo $x=\frac{m^2-1}{6}$; ergo tres numeri nostri sunt $\frac{2m^2-2}{3}$, $\frac{m^4-26m^2+25}{36}$, $\frac{m^2+2}{3}$.

31. Problema septimum. Invenire tres numeros x, y, z tales; ut, si productis, quæ ex duobus eorum haberi possunt, addatur numerus constans a , quadratum semper prodeat. Tres igitur quantitates $xy+a, xz+a, yz+a$ quadrati numeri sint, oportet. Nunc primæ tantum rationem habeamus, eaque fit $=r^2$; seu $xy=r^2-a$. Hoc posito, faciamus $x=r+m, y=r-n$; ergo $xy=r^2+rm-rn-mn=r^2-a$; ergo $r=\frac{mn-a}{m-n}$. Itaque $x=\frac{mn-a}{m-n}+m=\frac{m^2-a}{m-n}$, & $y=\frac{mn-a}{m-n}-n=\frac{n^2-a}{m-n}$. Si igitur x, y inventos valores habeant $xy+a$ procul dubio quadratum erit. Qui valores x, y si perpendantur, in oculos statim incurrit, eos per $m-n$ multiplicatos, quantitate a deinde addita, quadrata exhibere m^2, n^2 ; ergo si fiat $z=m-n$, patet $xz+a, yz+a$ fore duo quadrata. Q. E. F.

32. Problema octavum. Duos invenire numeros, quorum summa sit quadratum, cujus radix esse debeat quadratum primi numeri auctum numero al-

tero. Sint numeri x, y ; ergo $x+y=n^2+y$. Utrumque æquationis mem-

brum fiat $=n^2x^2$, unde fit $x+y=n^2x^2, x^2+y=n^2x^2$. Ex hac æquatione ultima, extracta radice, $y=nx-x^2$; ergo $x+nx-x^2=n^2x^2$, seu $x=\frac{n+1}{n^2+1}$; adeoque $y=\frac{n+1}{n^2+1} \cdot n - \frac{n+1}{n^2+1} = \frac{n^2+1}{n^2+1} \cdot \frac{n+1}{n^2+1} - \frac{n+1}{n^2+1} = \frac{n^4+n^2-n-1}{n^2+1} = \frac{n^2-1}{n^2+1}$.

33. Problema nonum. Duos numeros invenire ita, ut quadratum primi, altero addito, æquet quadratum secundi, addito primo. Duo quæriti numeri sint x, y ; ergo $x^2+y=y^2+x$, seu $y-x=y^2-x^2$, & divisione facta per $y-x$, est $1=y+x$, quæ æquatio nos monet, unitate in duas partes quæcumque divisa, eas partes problemati satisfacere.

34. Problema decimum. Tres quærantur numeri ita, ut uniuscuiusque quadratum cum reliquorum summa quadratum efficiat. Quoniam x^2+2x+1 quadratum est, si tres numeros constituamus $x, 2x, 1$, primus problemati respondet. At, ut reliqui etiam respondeant, necesse est, ut $4x^2+x+1, 3x+1$ sint duo numeri quadrati. Id ut obtineamus, lemmate utimur quam-

maxime simplici. Sint duo quadrata a^2 , b^2 , minor v. gr. b^2 subtrahatur de majori a^2 , erit $a^2 - b^2$, vel $\frac{a+b}{a-b}$. Duorum factorum semisumma æquat radicem quadrati majoris a^2 ; eorundem semidifferentia æquat radicem quadrati minoris b^2 . Hac ergo via incidentes subtrahamus e quadrato $4x^2 + x + 1$ quadratum $3x + 1$; habemus $4x^2 - 2x = 4x - 2$. Factorum semisumma est $\frac{5x}{2} - 1$, semidifferentia $\frac{3x}{2} - 1$. Prima itaque radix esse debet quadrati $4x^2 + x + 1$; ergo $\frac{3 \cdot 5x^2}{4} - 5x + 1 = 4x^2 + x + 1$; alia debet esse radix quadrati $3x + 1$, adeoque $\frac{9x^2}{4} - 3x + 1 = 3x + 1$. Videamus modo utrum hæc sibi consent. Ex prima æquatione est $\frac{9x^2}{4} = 6x$, seu $x = \frac{8}{3}$; ex altera pari modo $\frac{9x^2}{4} = 6x$, & $x = \frac{8}{3}$, ut antea; ergo numeri quæsi sunt $\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, 1$.

36. Problema undecimum. Sempronius duas emit vini species; unius speciei pretium sunt 8 Julii in singulas mensuras, alterius speciei 5. Summa expensæ est numerus quadratus, cui si addideris 60, alius exurgit numerus quadratus, cujus radix est numerus mensurarum utriusque speciei. Quæritur quinam sit numerus mensurarum? Hic numerus sit x ; ergo ex conditione problematis $x^2 - 60$ erit numerus Juliorum, quibus vinum omne emptum est. Problema postulat, hunc numerum esse quadratum; ut id præstemus, limites x circumscribere oportet. Si hæc pecunia $x^2 - 60$ usus fuisset Sempronius in ea emenda vini specie, quæ valet 5, numerus mensurarum esset $\frac{x^2 - 60}{5}$, qui numerus certe major est, quam x ; ergo $x^2 - 60 > 5x$. Eodem ratiocinio ostenditur etiam $x^2 - 60 < 8x$; ergo erunt $x^2 - 5x > 60$, $x^2 - 8x < 60$, atque additis quadratis dimidii coefficientis $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{265}{4}$, $x^2 - 8x + 16 < 76$. Supponamus nunc radicem gratia, quadratum primum majus esse quam $\frac{289}{4}$, secundum minus, quam 64, & habebimus $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{289}{4}$, $x^2 - 8x + 16 < 64$; extrahisq; radicibus $x - \frac{5}{2} > \frac{17}{2}$, $x - 4 < 8$, aut $x > \frac{22}{2} = 11$, $x < 12$. Potuissent equidem minus angusti limites reperiri; sed hi ad problematis solutionem sufficiant.

37. Intra hos limites igitur retenta x , demus operam, ut $x^2 - 60$ quadratum sit. Scimus x unum esse debere e terminis radicis quadrati hujus; terminus alter sit y ; unde habeamus $x^2 - 60 = x - y^2$, aut $x^2 - 60 = x^2 - 2xy +$

$+y^2$; ergo $x = \frac{y^2 + 60}{2y}$; at x major esse debet, quam 11, & minor quam 12; ergo is debet esse valor $\frac{y^2 + 60}{2y}$, ut intra 11, & 12 contineatur. Ex prima conditione quum sit $y - 11 > 121 - 60 = 61$, ponam $y - 11 > 64$; ergo $y - 11 > 8$, & $y > 19$; ex secunda quum sit $y - 12 < 144 - 60 = 84$, ponam $y - 12 < 81$; ergo $y - 12 < 9$, & $y < 21$. Quoniam y potest excurrere intra 19, 21, videamus, utrum supposito $y = 20$ problema solvatur. Igitur esse debet $x^2 - 60 = x - 20$, seu $x^2 - 40x + 400 = \frac{460}{4} = 11\frac{1}{2}$. Oportet itaque, ut numerus mensurarum sit $11\frac{1}{2} = \frac{23}{2}$, ejus quadratam $\frac{529}{4}$, ex quo dempto $60 = \frac{240}{4}$, supererit $\frac{289}{4}$ numerus quadratus, cujus radix $\frac{17}{2}$; ergo numerus Juliorum antea ignotus, est $\frac{289}{4} = 72\frac{1}{4}$.

38. Superest inveniendus numerus mensurarum speciei utriusque. Numerus earum, quarum pretium 5, sit x , adeoque pretium $5x$; reliquarum numerus necessario erit $11\frac{1}{2} - x$, & respondens pretium $92 - 8x$, adeoque pretium omnium simul $92 - 3x$; at hoc æquare debet $72\frac{1}{4}$; ergo $92 - 3x = 72\frac{1}{4}$, unde $3x = 19\frac{3}{4}$, & $x = 6\frac{7}{4}$ numerus mensurarum, quarum singulæ valent 5. Hic si subtrahatur de $11\frac{1}{2}$, residuum $4\frac{11}{4}$ erit numerus aliarum. Q. E. I. Hæc problemata solviffe sufficit, ut addiscant studiosi juvenes, quid in similibus præstandum sit. Si quis autem pleniorum harum rerum tractationem desideraret, præter Diophantum, eosque, qui Diophanti opus illustrarunt, Xilandrum videlicet, Baccherum, & Fermatium, consulere etiam poterit Prestetum, Ozanamium, & Saunderfonium initio libri secundi Algebræ elementorum.

CAPUT OCTAVUM.

De constructione Problematum Geometricorum primi, & secundi gradus.

I. **U**T algebraicæ operationes geometricorum problematum solutioni inferantur, primo quidem geometricæ quantitates litteris sunt exprimendæ eadem ratione, qua alibi usi sumus, nempe ut incognitæ postremis, cognitæ aliis litteris indicentur. Deinde ad æquationes veniendum ductas ex problematis conditionibus. Hæ autem æquationes aliquando sponte veluti occurrunt, aliquando vero magna opus est arte ut inveniantur, & multa sunt antea paranda, ex. gr. parallelæ ducendæ, perpendiculares erigendæ, efficiendi anguli, circuli describendi, & hujusmodi alia geometrica instituenda, quæ apte selectam
viam

viam sternent, qua ad æquationes perveniamus. Monere tamen juvat, similia triangula, angulos constantes, & celebre Pythagoricum theorema plurimum in hac re valere. Cæterum, quum omnia a variis problematum circumstantiis pendeant, nullas a nobis assignari posse constantes regulas, certum est. Præstabimus tamen quæcumque possumus, curabimus scilicet, ut exemplis, & problematum solutionibus rem omnem quam maxime illustremus.

2. Equationibus inventis, iisque per traditas methodos resolutis, dummodo gradum secundum non excedant, incognitarum valor per cognitæ expressus determinatur. At hoc valore habito non omnis confecta res est, quum de problemate geometrico agitur. Oportet namque insuper, ut problema geometricæ solutum dicatur, valorem illum in lineis, aut aliis geometricis quantitativis exhibere. Quod quidem quum difficultate non careat, ideo ab Analyseos præceptoribus nonnullæ traduntur regulæ, quas constructionum, aut locorum geometricorum nomine appellant. Nos itaque hic methodum nostram sequentes constructiones docebimus, quæ problemata geometrica primi, & secundi gradus respiciunt.

3. Quod spectat ad æquationes primi gradus, quum in iis analyticus valor incognitæ subtractione vel additione, multiplicatione vel divisione terminorum invenitur, geometricus pariter valor linearum additione vel subtractione obtinebitur, vel ad summam tertix, aut quartæ proportionalis inventionem. Sit $x = a - b + c$, facta rectorum a , & c summa, ab eaque detracta b , quod superest erit x . Si fuerit $x = \frac{a \cdot b}{c}$, fiat ut rectora c ad rectoram a , ita rectora b ad quartam, hoc est methodo ab Euclide tradita post rectoras c , a , b quartam proportionalis invenitur, ea erit x . Sit $x = \frac{c^2 - b^2}{c - d}$, fiat $c - d : c - b :: c + b$ ad quartam, quæ erit x . Sit $x = \frac{a \cdot b}{c} + \frac{b \cdot d}{n}$. Si fiat $\frac{a \cdot b}{c} = f$, $\frac{b \cdot d}{n} = g$ patet fore $x = f + g$; quæ duæ rectoræ f , g nihil aliud sunt, nisi duæ quartæ proportionales, prima post c , a , b , altera post n , b , d , easque in figura ex geometria invenire jam didicimus.

4. Sit $x = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{m + n}$. Tota ars, ut ex superioribus exemplis conjici potest, in eo est sita, ut numeratorem in factores duos lineares resolvamus ad insituendam proportionem, in qua denominator sit primus terminus, secundus & tertius duo illi factores, quartus vero quantitas invenienda. Nunc autem quum $a \cdot b + c \cdot d$ resolvi ita nequeat, ad substitutionem confugimus, qua id obtineamus. Animadvertimus rem egregie procedere si loco unius termini, v. gr. $a \cdot b$ alius æqualis adhibeatur, in quo una ex litteris sit secundi termini ex. gr. c , ut autem hunc terminum habeamus nihil aliud opus est, quam facere $c : a :: b$ ad quartam proportionalem, quæ vocetur f ; ergo $c \cdot f = a \cdot b$; ergo erit nostra $x = \frac{c \cdot f + c \cdot d}{m + n}$; adeoque facto $m + n : f + d :: c$ ad quartam, inventa erit incognita.

5. Sit $x = \frac{f \cdot d \cdot c \cdot n}{a \cdot b \cdot m}$. Fractio illa idem est ac productum duarum quantitatum $\frac{f \cdot d}{a} \cdot \frac{c \cdot n}{b}$, quod productum dividitur per m . Voca igitur duas illas quantitates, quæ sunt duæ quartæ proportionales, primam p , q alteram, & habebis

$x = \frac{pq}{m}$; ergo $m : p :: q$ ad quartam ipsi x æqualem. Si habeas $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$,
 fac $a^2 = bn$; ergo $x = \frac{bn + b^2}{c}$, & $c : b :: n + b$ ad quartam x . Sit x
 $= \frac{abc - def}{gb + ki}$. Fac $ef = am$, $gb = an$, $ki = ap$, ut sit $x = \frac{abc - adm}{an + ap}$,
 five $x = \frac{bc - dm}{n + p}$. Fac iterum $dm = bq$, ut sit $x = \frac{bc - bq}{n + p}$. Ergo x e-
 rit quarta proportionalis post $n + p$, b , $c - q$. Quantitates m , n , p , q inventa
 quarta proportionali determinantur. Harum substitutionum ratio est manifestis-
 sima. Hæc methodis procul dubio fiet semper in æquationibus primi gradus, ut
 lineæ reperiantur analyticis valoribus respondententes.

6. Quoad æquationes autem secundi gradus, quum ex per radicem quadra-
 tarum extractionem solvantur, adeoque ipse incognitæ valor quadraticas radices
 involvat; hinc necesse est docere quomodo hæc quantitates geometricè expriman-
 tur. Sit $x = \sqrt{ab}$, eleva ad quadratum $x^2 = ab$, ergo $a : x :: x : b$. Est igitur
 x , seu \sqrt{ab} media proportionalis inter a , b , quæ inveniendæ est, ut docet
 geometria. Hinc discere radicem producti ex duobus factoribus nihil esse aliud,
 quam mediam proportionalem inter factores eosdem.

7. Sit $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Statue duas rectas (Fig. 1.) $AB = a$, $BC = b$,
 quæ efficiant angulum in B rectum, & duc AC . Per prop. 47. lib. 1. Euclid.
 erit $\overline{AC^2} = \overline{AB^2} + \overline{BC^2}$; ergo $\overline{AC^2} = a^2 + b^2$, & $\sqrt{\overline{AC^2}}$, seu AC
 $= \sqrt{a^2 + b^2}$; erit igitur $x = AC$, scilicet æqualis hypothensuz trianguli re-
 ctanguli, cujus duo latera sunt a & b .

8. Sit $x = \sqrt{c^2 - a^2}$. Describatur semicirculus (Fig. 2.) ACB , cujus
 diameter sit $AB = c$, & centro factò in B , intervallo $CB = a$ describatur ar-
 cus secans semicirculum in C , deinde jungatur CA . Ex 3^{ta} lib. 3. Euclid. an-
 gulus ACB rectus est; ergo per 47. lib. 1. ejusdem $\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{BC^2}$,
 seu $\overline{AB^2} - \overline{BC^2} = \overline{AC^2}$; ergo $c^2 - a^2 = \overline{AC^2}$. Et $x = \sqrt{\overline{AC^2}} = AC$; a-
 deoque nihil aliud est $\sqrt{c^2 - a^2}$, nisi latus trianguli rectanguli, cujus basis
 $= c$, & aliud latus $= a$. Hæc sunt tres generales formulæ, ad quas radices quæ-
 cumque quadraticæ per traditas paullo ante regulas facillime reducuntur.

9. Sit $x = \sqrt{\frac{a^2}{b} + cd}$. Potest hæc ad primam formulam reduci hoc pa-
 tho. Fac $\frac{a}{b} = f$, invenitur autem f , quum sit tertia proportionalis post b , a .
 Facta substitutione habes $x = \sqrt{af + cd}$. Pone $cd = fg$; sit g nota, quia est
 quarta proportionalis post f , c , d ; igitur $x = \sqrt{af + fg} = \sqrt{f(a + g)}$. Erit
 itaque x media proportionalis inter f , & $a + g$. Animadvertendum est etiam po-
 tuisse

tuisse formulam construi statim ac post primam substitutionem obtinuimus $\sqrt{f+cd}$. Si enim inveniatur duas medias proportionales, unam inter a, f , alteram inter c, d , eisque in angulo recto constitutis basim jungamus, patet eam fore $\sqrt{af+cd}$.

10. Sit $x = \sqrt{a^2 + bc}$. Facta $bc = n^2$, est $x = \sqrt{a^2 + n^2}$, & sine ulla substitutione, si a , & media proportionalis inter b & c angulum rectum efficiant, erit necessario basim $\sqrt{a^2 + bc} = x$. Sit $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - n^2}$, si $a^2 + b^2 = f^2$, $c^2 + n^2 = g^2$, erit $x = \sqrt{f^2 - g^2}$, quæ tertiam generalem formulam spectat. Sit $x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}}$. Faciamus $b^2 = cf$, & erit $\sqrt{b^4 + c^4} = \sqrt{cf^2 + c^4} = c\sqrt{f^2 + c^2}$; iterum si faciamus $\sqrt{f^2 + c^2} = g$, habebimus $\sqrt{b^4 + c^4} = cg$; ergo $x = \sqrt{a^2 + cg}$, quam scimus construere.

11. Quæ hæcenus dicta sunt, quamvis ad quamlibet primi & alterius gradus æquationem construendam sufficiant, nihilominus si quis iis apte uti nesciat, atque eas rectas seligere, eas rectarum positiones, eos angulos, qui magis ad rem faciunt, in construtiones longas, & nimis implexas incidet; quæ tamen, recte consideratis problematis circumstantiis, vitari facile poterunt, ut constabit in exemplis.

12. Hæc primi & secundi gradus æquationes alia quoque methodo construntur, quam locorum geometricorum nomine appellant. Quoniam ea valet etiam in superiorum graduum æquationibus constituendis, ideo utile hic erit illius originem, atque usum in simplicioribus diligenter inspicere. Esto linea quæcumque (Fig. 3.) BCD vel recta, vel curva; & alia ad libitum ducatur linea MN recta, quæ hinc inde in infinitum produci intelligatur, quæ secet ne, aut non secet BD, nihil omnino refert, quamvis in figura secare supponitur. In recta MN determinetur quodlibet punctum A ad arbitrium, & ex A lineæ quolibet AV, Au, etiam infinitæ numero accipiantur; Ex omnibus punctis U, u totidem rectæ UQ, uq ducantur ad lineam BD in angulo quolibet, sed omnibus communi, ut sint parallelæ inter se. Hæc rectæ UQ, uq dicuntur ordinatæ lineæ BD; lineæ AV, Au in partem utramque a determinato puncto A proficiscentes, vocantur *abscissæ*, quarum cuiuslibet sua respondet ordinata; punctum A dicitur abscissarum initium; abscissæ & respondentes ordinatæ dicuntur inter se *coordinatæ*, quæ, ut facile intelligi potest, erunt indeterminatæ, sed una determinata, determinata erit etiam alia. Hac figuræ constructione, & definitionibus præmissis, quælibet indeterminata abscissa vocetur x , & respondens ordinata y , si ex iis, quæ propria sunt omnium coordinatarum lineæ BD, obtineatur æquatio expressa per solas incognitas x, y & alias cognitæ, ea æquatio dicitur exprimere relationem coordinatarum lineæ BD, & ipsius lineæ BD æquatio vocatur; ac animadvertendum est, quod si in æquatione x, y unam tantum habeant potestatem, nec sint invicem multiplicatæ, sicuti æquatio est primi gradus, ita dicitur in eocasu linea BD esse primi gradus, & in genere linea BD semper ejus gradus vocatur, cujus est æquatio ipsius coordinatarum relationem exprimens.

13. Sicuti vero linea quælibet suam habet respondentem æquationem, ita æquationi cuiuslibet sua respondet linea geometrica. Id ut clare intelligas, sit æqua-

quatio $y = \frac{ax}{b}$, quæ cum primi sit gradus; lineam quoque primi gradus designabit. In linea recta quacumque MN indefinita, determina punctum quodlibet C, & cape rectas quot lubet CU determinatas; jam si rectas hæc loco x successive in æquatione substituas, necesse est præcedat successive totidem determinati valores y totidem abscissis CU respondentes, qui in nostro hoc casu erunt quartæ proportionales post b , a , & assumptam quacumque CU. Sint hæc quartæ proportionales lineæ UQ; illas applica lineæ MN unamquamque ad punctum illud U, ubi sua definit abscissa, sed idem sit omnium angulus CUQ, hoc est, sint parallele. Jam vero si per puncta omnia Q ducas lineam, ea erit linea æquationis $y = \frac{ax}{b}$; & revera manifestum est lineam BD relationem exprimere omnium co-

ordinatarum CU, UQ, eamque esse lineam rectam, quæ necessario secabit MN, in puncto C initio abscissarum; est enim triangulorum omnium rectilineorum proprium, ut quæcumque CU sint ad suas UQ inter se parallelas in constanti ratione, ut hic contingit, ubi coordinatæ sunt inter se in ratione $b : a$.

14. Diligenter præterea animadvertendum est, quod sicuti ex C abscissas CU sumimus tendentes in partem N, nihil prohibet quominus alias abscissas C u sumamus ex C tendentes in partem M; at cum hæc in partem primis contrariam ferantur, hinc si illæ fuerint positivæ, hæc negativæ erunt cap. 1. num. 4. Pariter cum lineæ MN, BD, uti diximus, in C se mutuo secent, necessario ordinatæ u q respicientes singulis C u, tendent in partem contrariam illi, in quam ferrentur ordinatæ UQ; unde si hæc sint positivæ, illæ negativæ sint oportet. Æquatio tamen nostra coordinatas has etiam amplecti constat; nam scimus, eandem esse rationem inter coordinatas negativas, quæ inter positivas.

15. Hoc generali tradito hujus methodi specimine, facile omnino est dignoscere, æquationes quaslibet primi gradus, in quibus duæ incognitæ sive indeterminatæ reperiantur, ad rectam lineam pertinere. Hujusmodi æquationes omnes hæc generali formula continentur $y = \frac{mA + mx}{n}$, in qua mA summam repre-

sentat terminorum omnium, qui cogniti sunt, eaque positiva esse potest, vel negativa; m est coefficientis quilibet positivus, vel negativus abscissam x multiplicans, n vero coefficientis quicumque quantitatis y , seu primi membri æquationis, quod in altero in diviso remanet, ut y sola ex una parte remaneat. Hanc autem æquationem ad lineam rectam spectare, sic facile potest ostendi. In linea recta ut antea indefinita MN determinato ad libitum puncto A, quod sit initium abscissarum positivarum versus N, & suppositis nunc positivis quantitibus m, n, A , & secta AC = A fiat in angulo quocumque linea AR = $\frac{mA}{n}$; per R, C ducta recta BD ea est, quæ propositæ æquationi respondet. Nam sumpta quacumque AU = x & ordinata UQ = y , & parallela rectæ AR erit semper CU = $A + x$, & per triangula similia CAR, CUQ, CA : AR :: CU : UQ, adeoque $A : \frac{mA}{n}$, seu quod idem est $n : m :: A + x : y$, unde $y = \frac{mA + mx}{n}$, quæ est æquatio proposita.

16. Si in æquatione esset $A = 0$, patet etiam esse $\frac{mA}{n} = 0$, ac proinde nullas fieri rectas CA, AR, & æquationem nostram ad hanc reduci $y = \frac{mx}{n}$.

In hac

In hac hypothesi quum nullum aliud punctum habeamus in figura determinatum præter C: cum quo coincidit A, directio lineæ BD nullo modo est determinata. Ut hoc incommodum vitemus, fiat $x = z + b$; b est recta quælibet determinata, z indeterminata exhibet differentiam inter x & b ; erit igitur, substituto novo valore x in æquatione, $y = \frac{mz + mb}{n}$, quam construere jam novimus.

Methodus enim præcedens docet faciendam $AC = b$, $AR = \frac{mb}{n}$, per R, C ducendam lineam BD, quibus positis, erit A initium abscissarum $AU = z$, UQ erunt ordinatæ $= y$, & C initium abscissarum x , per quod transit linea æquationis.

17. Hæc ut methodi vis appareret. Cæterum æquationem $y = \frac{mx}{n}$ hoc pacto brevius construere potuisses, etiamsi unicum punctum C habeas determinatum; Cape $CA = n$, & $AR = m$, vel CA æqualem cuicumque datæ, AR vero $= \frac{m \cdot CA}{n}$, per puncta R & C duc rectam BD, patet eam esse, quam quæsumus, & C initium abscissarum x .

18. Si quantitas A esset negativa, ejus signum mutetur, ut fiat positiva, & æquatio nostra fiet $y = \frac{mx - mA}{n}$, facile est inferre, quam nam constructio subeat mutationem. Etenim posito a initio abscissarum, cum illæ quantitate A imminui debeant, sumenda erit (Fig. 3.) $aC = A$ ex parte opposita versus N, & in parte ordinarum negativarum facienda $aR = \frac{mA}{n}$, & puncta r, C lineam determinabunt.

19. Si positis m, n, A positivis, x accipiatur negativa, sed minor quam A , sequitur, quantitatem $\frac{mx}{n}$ negativam esse, sed minorem quam $\frac{mA}{n}$; ergo, indeterminatæ x mutato signo, æquatio $y = \frac{mA - mx}{n}$ dabit y positivam; quod optime figura etiam ostendit. Si vero x negativa supponatur $= A$, patet esse $y = 0$, & revera quum in C lineæ MN, BD secentur, constat nullam esse ordinatam. Si tertio supponatur x negativa major quam A , tunc æquatio dabit y negativam, adeoque omnibus Au respondebunt ultra punctum C ordinatæ uq in partem adversam positæ.

20. Si quantitates m, n negativæ essent, scimus ex hoc nullas mutari oportere; nam quum earum una sit in numeratore, alia in denominatore, mutatio signorum utriusque valorem eundem relinquit; quapropter m, n haberi possent pro positivis. At si una tantum esset negativa vel m , vel n , tunc mutaretur quidem positio lineæ BD, quæ ex opposita parte lineæ abscissarum esset ducenda, & ordinatæ, quæ prius erant positivæ, fierent negativæ, & viceversa. Si A fuerit negativa, quid accidat ordinatis, figura satis ostendit.

21. Diximus æquationes primi gradus indeterminatas quicumque ad generalem formulam $y = \frac{mA + mx}{n}$ reduci, si adsint termini utramque indeterminatam continentes; at si eorum alter deficit ex. gr. continens x , tunc formula esset hujusmodi $y = \frac{mA}{n}$, & locus respiceret lineam rectam lineæ abscissarum parallelam; quod clarum est, quia sumpta quacumque ad libitum abscissa, eadem illi

illi semper responderet ordinata, quemadmodum formula postulat. Et si fiat hypothesis $A=0$; hoc est $y=0$, tunc lineæ illæ duæ parallelæ in unam coalescerent, adeoque æquationis locus esset eadem linea abscissarum. Si contra supponatur deesse y , ita ut sit $A=\infty$, locus erit linea recta parallela ordinatis, seu linea in quolibet angulo cum linea abscissarum, quam secaret in puncto ab earum vertice distante per quantitatē A , quæ quantitas si nulla fiat, sectio erit in ipso abscissarum initio.

22. Ex iis, quæ hic tradidimus methodus aperitur, qua geometricè valores determinemus duarum incognitarum, quotiescumque duas habeamus indeterminatas æquationes primi gradus. Sint hæc duæ æquationes $y = \frac{ax - ab}{n}$,

$$y = \frac{cx - cd}{m}, \text{ \& locum utriusque investigemus. In infinita (Fig. 4.) MN}$$

punctum A sit initium abscissarum x ; capiantur $AC=b$, $CE=n$, & in quocumque angulo MEF , fiat $EF=a$, ex superius dictis constat rectam ductam per puncta F , C fore locum primæ æquationis, cujus coordinatæ sunt quælibet $AU=x$, & quælibet respondens $UQ=y$, & parallela rectæ FE . Jam vero queramus locum æquationis secundæ, sed ita ut ejus abscissarum initium sit idem punctum A in linea eadem MN . Igitur sit $AG=d$, $GP=m$, & fiat $PR=c$, sed parallela ordinatis loci prioris, hoc est parallela FE ; scimus rectam ductam per puncta R , G locum esse hujus secundæ æquationis. Nunc autem si RG producta secet in aliquo puncto Q lineam PC pariter quantum opus est productam, & ex puncto concursus demittatur QU parallela FE , dicimus eam esse y a duabus æquationibus requisitam. Etenim quum per primam æquationem y debeat pertinere ad lineam FC , & per secundam ad lineam RG , idque verificari non possit nisi in puncto concursus, necesse est, ut sola UQ in illud punctum incidens sit y ab utraque æquatione requisita. Et hoc pacto etiam x determinatur; ea namque erit AU , quæ respondet ordinatæ QU , quæ ducitur a puncto concursus duorum locorum. Ita sit manifestum, quomodo duorum locorum intersectione geometricè inveniatur valores duarum incognitarum primi gradus.

23. Ut hæc constructio plenius intelligatur, nonnulla sunt hic animadvertenda. Si ratio $n:a$ eadem fuerit, ac ratio $m:c$, erit in triangulis CEF , GPR , $CE:EF::GP:PR$, quæ triângula quum aliunde æquales habeant angulos in E , & P , necessario erunt similia; ergo æquales anguli ECF , PGR , atque inde lineæ FC , RG parallelæ; atqui lineæ parallelæ, etiamsi in infinitum producerentur, numquam se intersecant; ergo in hoc casu non possent determinari valores x , y , qui proinde quibuscumque datis majores erunt existimandi. Si rationes $n:a$, $m:c$ æquales non sunt, loci concurrent quidem in aliquod punctum; ac videndum est utrum angulus PGR major vel minor sit angulo ECF . Nam si sit major, quod contingit cum $n:a > m:c$, tunc punctum concursus erit ex parte B , si vero minor sit, hoc est si $n:a < m:c$, punctum concursus erit ex altera lineæ abscissarum parte, nempe ex parte D . Harum rationem ex vulgari geometria satis parere existimamus.

24. Si supponamus $b=d$, erit $x=b$, & $y=a$. Patet primum, quia tunc puncta Q , U incident in C ; ergo $AC=b=AU=x$; patet alterum, quia ex eo quod puncta Q , U unum punctum concursus erit ex parte B , si vero omnino evanescat. Idipsum analysis ostendit. Etenim quum duo valores y , qui sunt in hoc casu $\frac{ax-ab}{n}$, $\frac{cx-cb}{m}$ inter se æquales esse oporteat, erit $\frac{a}{n} \cdot x - b$

$= \frac{c}{m} \cdot \overline{x-b}$, seu $\frac{a}{n} - \frac{c}{m} \cdot \overline{x-b} = 0$; ergo alteruter ex factoribus primi membri est $= 0$, at non primus, quum ex quantitates ad libitum assumi possint; ergo $x - b = 0$, & $x = b$. Jam vero si loco x substitutus b in utroque y valore, ambo fiunt $= 0$.

25. Denique quum rectæ BD , QG non possint se mutuo secare nisi in unico puncto, sequitur unicum ab iis valorem x , y exhiberi.

26. Facile etiam apparet, quaecumque determinatam æquationem primi gradus tradita methodo resolvì posse; quum earum quælibet possit ad duas indeterminatas æquationes gradus ejusdem nullo negotio reduci, altera incognita introducta. En qua ratione id perficiatur. Multiplicanda est prius æquatio determinata per binomium $m+n$ (m & n sunt quantitates ad libitum sumendæ); deinde incognita in n ducta facienda æqualis formulæ alteri, in qua nova incognita reperitur, unde oriatur æquatio primi gradus indeterminata; tertio eliminanda est per substitutionem ipsa incognita multiplicata per n , qua facta substitutione alia exurget æquatio indeterminata. Locis utriusque descriptis, quæsitæ incognitæ valor eorum intersectione determinabitur.

27. Exemplum. Sit quælibet æquatio determinata primi gradus $x = A$. Si illam per $m+n$ multiples, est $m x + n x = \overline{m+n} \cdot A$. Pone terminum $n x = a y + a C$, habes primam æquationem indeterminatam; & substituto hoc $n x$ valore in superiori æquatione, $m x + a y + a C = \overline{m+n} \cdot A$, seu $m x = -a y + \overline{m+n} \cdot A - a C$ æquationem secundam indeterminatam; ergo loci duo erunt $y = \frac{n x - a C}{a}$, $y = \frac{-m x + \overline{m+n} \cdot A - a C}{a}$, qui constructi valorem

x determinabunt. Hi autem non differunt a locis N. 23, nisi in denominatore, qui in his est idem, in illis diversus. Quantitates a , m , n , C ad libitum potes assumere, prout ad utilitatem, atque elegantiam magis conferre existima- veris. Si faceres ex. gr. $a C = n A$, & m negativam assumeres, loci essent $y = \frac{n x - n A}{a}$, $y = \frac{m x - m A}{a}$ valde simpliciores. Vides rationem $m:n$ posse

esse quaecumque, dummodo non sit æqualitatis, quia non duo loci essent, sed unus tantum. Facile est etiam obtinere duo loca determinata, quia in quibuscumque formulis sufficiet determinatas accipere rationes $a:n$, $a:m$.

28. Quemadmodum hætenus ostensum est, quaecumque primi gradus æquationes duarum rectarum intersectione resolvì posse; ita nunc ostendemus resolvì æquationes quascumque determinatas gradus secundi intersectione linearum rectæ, & circuli. Id ut præstemus notandum est, circuli, cujus radius r , æquationem esse $x^2 + y^2 = r^2$, si abscissæ a centro ducant originem, & ordinatæ diametro sint normales. Sit enim circulus (Fig. 5.) BGD , cujus centrum C , in diametro DB capiatur $CF = x$, $FG = y$ perpendicularis ipsi DB ; quum $CG = r$ sit hypotenusa trianguli rectanguli, patet futurum semper $x^2 + y^2 = r^2$.

29. Hoc præmissis accipiamus æquationem generalem secundi gradus $x^2 + A x = a B$, in qua potest esse $A = 0$, & tunc erit æquatio incompleta. Si æquationem multiplicemus per $m^2 + n^2$, habemus $m^2 x^2 + n^2 x^2 + \overline{m^2 + n^2} \cdot A x = \overline{m^2 + n^2} \cdot a B$.

K

A x

$Ax = \frac{m^2 + n^2}{2nm} \cdot aB$. Faciamus nunc $nx + \frac{m^2 + n^2}{2n} \cdot A = my$, seu $y = \frac{n}{m} \cdot x + \frac{m^2 + n^2}{2nm} \cdot A$, qui manifeste est locus primi gradus. Quadrando fiet $n^2 x^2 + \frac{m^2 + n^2}{m} \cdot Ax = m^2 y^2 - \frac{(m^2 + n^2)^2}{4n^2} \cdot A^2$; ergo substituto secundo hoc mem-

bro pro primo, quod in æquatione antea multiplicata reperitur, habebimus $m^2 x^2 + m^2 y^2 - \frac{(m^2 + n^2)^2}{4n^2} \cdot A^2 = \frac{m^2 + n^2}{m} \cdot aB$, seu $x^2 + y^2 = \frac{m^2 + n^2}{4nm^2} \cdot A^2 + \frac{m^2 + n^2}{m} \cdot aB$, hoc est multiplicato & diviso termino ultimo per $\frac{m^2 + n^2}{4n^2}$

$x^2 + y^2 = \frac{m^2 + n^2}{4nm^2} \cdot A^2 + \frac{4n^2 aB}{m^2 + n^2}$ æquationem ad circulum, quæ comparata cum ea, quam jam esse propriam circuli demonstravimus, nempe cum

$x^2 + y^2 = r^2$, ostendit radium esse debere $\frac{m^2 + n^2}{2nm} \sqrt{A^2 + \frac{4n^2 aB}{m^2 + n^2}}$, quem vocemus = r .

30. Igitur radio = r descripto circulo BGD hic erit locus ultimæ æquationis, cujus abscissæ CF = x , ordinatæ FG = y . Nunc ut alium locum $y = \frac{n}{m} \cdot x + \frac{m^2 + n^2}{2nm} A$ cum hoc componamus, ita ut utriusque abscissæ ab eodem puncto C incipiant, fiat CA = $\frac{m^2 + n^2}{2nm} \cdot A$, & erigatur CE perpendicularis DB

talis, ut sit $m : n :: CA : CE$, ducta linea per puncta A, E, ea erit locus alter, qui circulum secabit in G, g, & duæ ex iis punctis demissæ perpendiculares GF, gf, determinabunt duos valores x , CF, Cf, seu duas propositæ æquationis radices, quæ ambæ positivæ erunt, si tendant ex C versus B, ambæ negativæ si ex C versus D, altera positiva, altera negativa, si altera versus B altera versus D procedat. Si CA sit major quam radius, quod in hypothese $m = n$ non accidit, nisi B sit negativa, tunc punctum A extra circulum erit positum; & si negativa fuerit quantitas A punctum A in oppositam cadet partem, scilicet versus B.

31. Si punctum A intra circulum cadat, æquatio duas semper habebit reales radices, nam semper linea AE in duobus punctis circumferentiam secabit, ex quibus demissæ perpendiculares in diametrum totidem determinabunt valores x . At si punctum A sit extra circulum triplex oritur casus; vel enim recta AE circulum secabit, vel tanget solum, vel fugiet prorsus. Si primum accidat, duæ sunt pariter radices reales; si alterum radices ambæ æquales erunt; quod patet, quia linea secans quo magis ad tangentem accedit, & propiora sunt puncta

ita interfectionum, eo etiam magis accedere perpendicularares debent ita, ut quum in contactu puncta interfectionum coincident, coincident etiam perpendicularares ab iis demissæ, adeoque utraque radicem eandem determinet. Si vero linea neque secet, neque tangat circulum, tunc sane radices erunt imaginariæ; quod non fiet nisi CE sit major radio. Erunt pariter imaginariæ radices si radius circuli fuerit quantitas imaginaria, quod est manifestum.

32. Si quis locum primi gradus optaret, qui cum linea abscissarum datum angulum efficeret, is rem obtinebit, dummodo datam accipiat rationem $m:n$.

33. Quod spectat ad radium circuli, quisque videt, ut illum inveniamus, oportere geometricum valorem quantitatis radicalis reperire, quæ etsi ex traditis regulis possit semper geometricè determinari, tamen non minorem videtur habere difficultatem, quam constructio jam resolutæ æquationis. Nihilominus fiet sæpe sæpius, ut parum aut nihil laboremus; imo aliquando datus circulus poterit

obtineri. Hac de causa vocato r radio circuli dati necesse erit, ut sit $\frac{m^2+n^2}{2nm}$

$$\sqrt{A^2 + \frac{4n^2 a B}{m^2+n^2}} = r. \text{ ergo erit } \frac{A^2 m^4 + 2 A^2 m^2 n^2 + A^2 n^4}{4 m^2 n^2} + \frac{a B m^2 + a B n^2}{m^2}$$

$$= r^2, \text{ seu } A^2 m^4 + 2 A^2 m^2 n^2 + A^2 n^4 + 4 a B m^2 n^2 + 4 a B n^2 = 0$$

$$- 4 r^2 m^2 n^2$$

æquatio quarti gradus, quæ quum methodo secundi tractari possit, poterit etiam semper resolvi: sed quia in genere ad implicatam constructionem perducit, ideo hic imperfectum calculum relinquemus. Eadem de causa silentio præteribimus methodum, qua æquationes secundi gradus duorum circulorum interfectione construuntur; calculus enim longus & implexus evadit. Præcipue quum methodus interfectionum non fuerit a nobis proposita, quasi simpliciores ita fierent semper constructiones primi & secundi gradus, quæ sane expeditius multo & elegantius possunt alia via obtineri, sed tantum, ut a primordiis suis methodum indicaremus, qua deinde in altioribus gradibus uti opus erit, in curvis scilicet describendis, quæ radices æquationum suis interfectionibus ostendant. Præterquamquod id non fuerat omnino prætermittendum, cujus ope industrius analytista elegantissimas sæpe obtinebit constructiones.

34. Verum quotiescumque constructionem perficis per circulum quemcumque, eandem perferre potes per circulum datum methodo facili, quæ in figurarum similitudine habet fundamentum. Supponamus in Fig. 5. per interfectionem circuli BGD, cujus radius inventus sit $=f$, & lineæ Gg determinatam fuisse incognitam CF, & oporteat eam per circulum datum, cujus radius $=a$ determinare. Sit hic circulus (Fig. 6.) HMI, cujus dnc diametrum HI parallelum BD, divide KI in L in ea ratione, in qua CD divisa est in A; duc LM in eo angulo, in quo ducta est AG, & dimitte ordinatam MN analogam ordinatæ FG, restat KN analogæ CF habebit ad CF rationem, quam habent radii a, f . Ergo si abscindatur KO, quæ sit ad KN $:: f:a$, erit KO $=CF$, æqualis incognitæ quæsitæ, quam determinare oportebat. Quum circuli sint figuræ similes, methodus hæc, quæ unico exemplo est declarata, omnibus casibus sine dubio applicari potest.

35. Ut autem pateat, quantum in hisce rebus industria valeat, placet hic aliud addere generis constructionis traditum a doctissimo Rabuelio, quo per circumulum æquationis secundi gradus omnes resolvuntur. Notum est ex geometria, quod si linea (Fig. 7.) GH duos fecerit concentricos circulos ABC, GHF, linea GA inter duas circumferentias intercepta ex una parte, æquat BH interceptam ex altera. Etenim ducta ex D communi centro DO perpendiculari ad GH, ex Euclide lib. 3. prop. 3. corda utraque GH, AB bisariam in O dividitur; ergo GO=HO, AO=BO; ergo etiam GO-AO=HO-BO, seu GA=BO. Q. E. D.

36. Hoc præmissis, ut construamus æquationem $x^2 - ax = bc$ ductis ad libitum rectis EF, GH, quæ se mutuo in aliquo puncto A interfecant in quocumque angulo, & accepta in earum alterutra AB=a, & in alia AF=b, FC=c, per tria puncta A, B, C circulus ducatur, cujus centrum sit D, deinde intervallo DF alter describatur circulus primo concentricus, qui lineam primam secabit in punctis G, H, alteram in E; dicimus AH esse radicem positivam, AG radicem negativam æquationis propositæ. Facilis est demonstratio. Nam quum per theoremata præmissa sit AE=FC; erit AE=c; ergo rectangulum EAF=bc. Præterea vocata AH=x, erit HB=AG=x-a; ergo rectangulum GAH=x²-ax; atqui rectangula EAF, GAH per propo. 35.

lib. 3. Euclid. æqualia sunt; ergo $x^2 - ax = bc$, quæ est proposita æquatio. Pariter vocata GA=-x, erit AH=-x+a; ergo rectangulum GAH = x²-ax ut supra. Si habeamus æquationem $x^2 + ax = bc$, constructio in hoc tantum a priori differt, quod AG erit radix positiva, AH radix negativa.

37. Si esset b=c, tunc esset etiam FC=AF; ergo coinciderent puncta A & C, quod contingit tantum quum linea AF est tangens circuli ABC. Describere igitur oportebit in hac hypothese circumulum, qui per datum punctum B transeat, & lineam AF tangat in dato puncto, quod est problema notissimum.

38. Si construenda proponatur æquatio $x^2 - ax = -bc$, ductis in quocumque angulo rectis (Fig. 8.) AB, AC, in prima accipiat AB=a, in altera AF=b, FC=c, & per puncta A, B, C circulus describatur, cujus centrum D. Intervallo DF alter ducatur circulus primo concentricus, qui AC secet in puncto E, AB vero in punctis G, H; dicimus duas AH, AG esse radices positivas propositæ æquationis. Demonstratio est præcedenti simillima.

39. Eadem constructio inservit etiam æquationi $x^2 + ax = -bc$, sed AH, AG tunc erunt radices negativæ. In hac tamen quotiescumque sit $\frac{a}{4} < bc$, circumulus radio DF descriptus rectam AB non secabit, quod indicio erit æquationem realibus radicibus carere. Quamvis, ut clarius elegantissima hæc constructio traderetur, circuli duo concentrici descripti sint; ea tamen circumulum ABC necessario non postulat; sufficit enim punctum D determinare, in quo facto centro, & circulo GHF descripto radices AH, AG eodem pacto obtinebimus. Puncti autem D determinationem facillimam esse ex geometria scimus; quum nihil aliud requiratur, quam lineas AB, AC iam cognitatas bisariam secare in O, V, & perpendiculares erigere, quæ se mutuo secantes in D punctum quaesitum exhibebunt.

40. Hujusmodi determinatio fiet etiam expeditior, si angulus in A rectus assumatur; nam quum hic in semicirculo necessario esse debeat, recta conjugens puncta B, C erit circuli diameter: ergo centrum D erit punctum illud, in quo ea bifariam dividitur. Hæc constructio satis superque ostendere potest, quantum hisce in rebus analysitz valeat industria. Idipsum alia docebunt exempla capituli sequentis, ubi nonnulla solvemus problemata geometrica.

CAPUT NONUM

Problematum aliquot geometricorum primi, & secundi gradus solutio exhibetur.

1. **P**roblema primum. Datam rectam (Fig. 1.) AB utramque in C divisam ita producere in E, ut sit rectangulum AEB æquale quadrato CE, Vocetur AB = a; CB = b, & BE = x quantitas incognita, cujus determinatio solvit problema. Ex proposita conditione esse debet $AE \cdot EB = CE^2$; ergo $\frac{a+x}{x} \cdot x = \frac{b+x}{x}$, idest $ax + xx = bb + 2bx + xx$, seu $ax - 2bx = bb$, unde $x = \frac{bb}{a-2b}$; igitur $a - 2b : b :: b : x$; quæ analogia ostendit incognitam BE = x esse tertiam proportionalem post $a - 2b$, & b. Hinc sequens oritur constructio.

2. Capiatur CD = b, ut habeatur AD = $a - 2b$. Ex punctis C, B dux erigantur parallelæ CL, BH, quarum prima sit = AD, altera = CB, & puncta L, B jungantur recta LB. Huic parallela agatur HE concurrens cum AB in E. Hæc determinat BE, quam querimus. Ex similitudine enim triangulorum LCB, HBE erit $CL : CB = b : BH = b : BE = \frac{bb}{a-2b}$.

3. Idem synthetice demonstratur. Ex constructione est AD = CL : DC = CB : CB = BH : BE; ergo componendo AC : CB :: CE : BE, & alternando AC : CE :: CB : BE, & componendo AE : CE :: CE : BE; igitur CE est media proportionalis inter AE, BE, adeoque $AE \cdot BE = CE^2$. Q. E. D.

4. Verum hic determinationes quædam nullo pacto sunt prætermittendæ. Si $b < \frac{a}{2}$, punctum D semper cadit inter A, & C, & locum habet præcedens constructio. At si $b = \frac{a}{2}$, punctum D cadet in A, adeoque erit AD = 0; ergo etiam CL = 0, & punctum L cadet in C, & LB jacet supra CB; ergo HE parallela LB lineæ AB non occurret nisi in puncto infinite remoto. Tandem si $b > \frac{a}{2}$, punctum D cadet ultra A, eritque AD negativa; quare CL ducenda est in partem priori oppositam, & quod consequens est, etiam HE parallela LB lineam AB in parte priori averia secabit.

5. Problema secundum. In dato triangulo (Fig. 2.) ABC inscribere quadratum, cujus latus unum cadat in basim BC trianguli. Quadratum inscriptum sit E D F G. In basim BC demitte perpendicularem AH, quæ ob datum triangulum data erit. Voca $BC = a$, $AH = b$, $HL = FG = x$. Ob similia triangula ABH, AFL est $AH:AL::AB:AF$, & ob alia similia ABC, AFG est $AB:AF::BC:FG$; ergo $AH = b:AL = b-x::BC = a:FG = x$, seu alternando $b:a::b-x:x$, & componendo $b+a:a::b:x$; est igitur LH quarta proportionalis post notas quantitates.

6. Constructio. Producta indefinitæ BC, fiat $HM = BC$, & $MN = AH$, ut sit $HN = a+b$. Jungatur AN, & ex M ducatur parallela ML, quæ secabit AH in puncto L; hoc punctum L illud erit; per quod ducta FLG basi BC parallela, & demissis normalibus FD, GE, quadrilaterum EDFG est quadratum.

7. Demonstratur. Propter parallelas AN, LM similia erunt triangula AHN, LHM: ergo $MN = AH:AL::HM = BC:HL$. Item ob similia triangula ABC, AFG ut $AH:AL::BC:FG$; ergo $BC:FG::BC:HL$; ergo $FG = HL$, adeoque EDFG quadratum est.

8. Si angulus ACB sit acutus allatæ solutioni nihil deest. Si rectus sit, patet, quadrati latus GE coincidere cum GD. Si denique sit obtusus, (Fig. 3.) EDFG quadratum utique etiam tunc erit, sed non triangulo inscriptum, quoniam ejus pars extra triangulum eadet. Idem dicito de angulo B.

9. Problema tertium. Construere triangulum æquilaterum (Fig. 4.) ABC æquale quadrato datæ CN. Basi BC sit normalis AD, voceturque $DC = x$, adeoque quodlibet latus trianguli quæriti $= 2x$; ergo $AD = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$; ergo trianguli ABC area $= x^2\sqrt{3}$; ergo vocata $CN = a$ erit $x^2\sqrt{3} = aa$, & $x = \sqrt{\frac{aa}{\sqrt{3}}}$.

10. Ut hunc valorem geometrice invenias, formulam ita scribe $x = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{3}aa}}$. Probat CN in G, donec CG sit quadrupla CN, describe semicirculum GMC, & erige perpendicularem NM, quæ ex natura circuli $= \sqrt{3}aa$. Huic æqualem secæ NQ, describe quoque novo semicirculo QFC, duc chordam CF. Nunc si applies normaliter $DE = CN$, habebis $DC = x$. Etenim erit $QN = \sqrt{3}aa$: $NC = a::FN^2:NC^2$, five $ED^2 = aa:DC^2$; ergo $DC^2 = \frac{a^3}{\sqrt{3}aa}$, & $DC = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{3}aa}}$. Accepta igitur $DB = DC$, erit tota BC recta, super quam constructum triangulum æquilaterum æquabit quadratum rectæ CN.

11. Si fuisset $x = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{naaa}}}$, sumpta recta $CG = n+1. a$, constructio eodem modo, ac antea, perageretur.

12. Problema quartum. Datis duobus circulis, quorum centra sint (Fig. 5.) A, B, ducere lineam, quæ utrumque tangat. Sit CD tangens quæsitæ, quæ producta concurret in E cum AB. Ducantur AC, BD ad puncta contactus. Vocemus



Fig. 1.

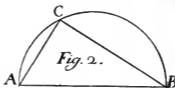


Fig. 2.

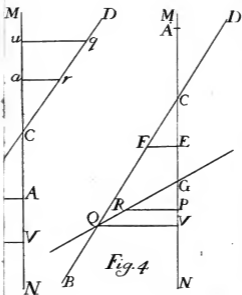
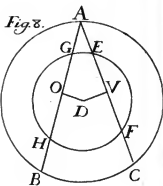
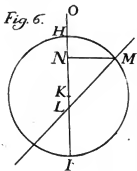
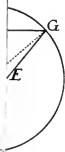


Fig. 4





mus $AB = a$, $AC = R$, $BD = r$, $BE = x$. Quum anguli in C, D recti sint, radii AC, BD erunt paralleli; ergo similia triangula EAC, EBD, & R: $r :: a + x : x$; igitur dividendo $R - r : r :: a : x$; quæ analogia expeditissimam habet constructionem. Ducantur quocumque modo bini radii inter se paralleli AL, BM, & puncta L, M jungatur recta LM, quæ producta secabit AB in E, ex quo tangens ducta ad alterutrum ex duobus circulis tanget utrumque, & problema solvet. Etenim ob similitudinem triangulorum, habebimus LA: MB :: AE: BE; ergo LA - MB: MB :: AB: EB, sive $R - r : r :: a : BE$, ut analysis postulat.

12. Manifestum est, ex eodem puncto E aliam quoque duci posse tangentem Ed, quæ alium circulum tanget in puncto c. Patet etiam solutionem aliam spectare præsertim circulos inæqualis diametri, quo in casu communis tangens lineam centerum secat ad plagam minoris circuli. Quod si circuli æquales sint, quum tangens fiat parallela rectæ AB, punctum E in infinitum recedat necesse est; verum in hac hypothese facilius res perfitur; si enim radium erigas lineæ AB normalem, & in puncto, ubi circumferentiam secat, tangentem ducas, ea utrumque circulum tanget.

14. Quum ex eodem puncto E non plures quam duæ tangentes duci possint, existimabit fortasse aliquis, duas tantum esse problematis solutiones. At si vehementer erraret; duæ namque tangentes duci etiam possunt a puncto quodam F posito inter A, B, qua in hypothese facta $BF = x$, analogiam habemus $R : r :: a - x : x$, & componendo $R + r : r :: a : x$. Producto radio MB in N, junctaque LN, punctum F, in quo hæc secat AB, illud erit, quod novas suppeditat solutiones; idest ducta ex illo tangens ad alterutrum circulorum utrumque tanget. Ita novæ tangentes erunt KH, kh. Hoc igitur problema, etsi æquationem exhibeat primi gradus, tamen ad quartum gradum pertinet, quum quatuor habeat, easque diversas solutiones. Harum duæ, nempe illæ, quas præbet punctum F, imaginariæ sunt, si circuli sese interfecerint; at omnes imaginariæ sunt, si alter circulum intra alterum cadit.

15. Problema quintum. In dato circulo, cujus centrum (Fig. 6.) C, duos circulos describere, sese & illum, cui inscribuntur, tangentes ita, ut junctis eorum centrâ fiat triangulum CEF simile triangulo dato ABD. Sit factum, & producantur latera CE, CF, quæ ad puncta contactus G, H pervenient. Radius CG vocetur r , $EL = EG = x$, $FH = FI = y$. Propter similitudinem triangulorum CEF, ABD vocatis lateribus $BD = a$, $BA = b$, $DA = c$, orientur duæ analogiæ $a : b :: x + y : r - x$, $a : c :: x + y : r - y$, ex quibus duæ æquationes $x + y = \frac{a}{b} \cdot \frac{r - x}{r - x}$, $x + y = \frac{a}{c} \cdot \frac{r - y}{r - y}$; ergo $\frac{r - x}{b} = \frac{r - y}{c}$, unde

$b : c :: r - x : r - y$. Hinc duæ componendo prodeunt analogiæ $b : b + c :: r - x : 2r - x - y$, $b + c : c :: 2r - x - y : r - y$, in quibus substitutis valoribus $x + y$ prius inventis, eruat $b : b + c :: r - x : 2r - \frac{a}{b} \cdot \frac{r - x}{r - x}$, $b + c : c :: 2r - \frac{a}{c}$.

$r - y : r - y$; igitur extremis mediisque, ut par est, multiplicatis duæ orientur æquationes $2rb - a \cdot r - x = b + c \cdot r - x$, $2rc - a \cdot r - y = b + c \cdot r - y$, seu $\frac{2rb}{b + c + a} = r - x$, $\frac{2rc}{b + c + a} = r - y$, quæ tandem exhibent

$x = \frac{a + c - b}{a + b + c} \cdot r$, $y = \frac{a + b - c}{a + b + c} \cdot r$, unde tandem $a + b + c : a + c - b :: r : x$,
 $a + b + c : a + b - c :: r : y$

$$a + b + c : a + b - c :: r : y.$$

16. Constructio. Producta utrinque BD capiatur $BM = Bm = BA$, & $DN = Dn = DA$; ita erunt $MN = a + b + c$, $Mn = a + b - c$, $Nm = a + c - b$. Ducatur, prout lubet, radius aliquis CG; & fiat $MN : Nm :: CG : EG$; hæc erit radius unius ex quæsitis circulis. Ducta deinde CH, quæ angulum læciat $GCH = BAD$, fiat $MN : Mn :: CH : HF$, quæ erit radius circuli alterius. Circuli igitur descripti centris E, F, radiis EG, FH, & sese contingant, & circum datum GH, & d bunt triangulum ECF simile BAD.

17. Si circulos externos quæramus, eadem prorsus valebit methodus, neque quidquam erit mutandum, nisi hoc, quod in analogiis pro $r - x$, $r - y$ scribendum erit $r + x$, $r + y$ ut consideranti patebit.

18. Problema sextum. Dato circulo (Fig. 7.) AEF, & puncto extra illum B, quod cum centro jungat recta CB, cui sit perpendicularis BD, quæritur in hac punctum D, ad quod e centro ducta CD, sit intercepta $DE = DB$. Vocetur radius $CA = r$, $BA = a$, $BD = DE = x$: erit igitur $CB = r + a$, $CD = r + x$. Propter angulum rectum in B est $CD^2 = CB^2 + DB^2$, aut $a^2 + 2rx + x^2 = r^2 + 2ra + a^2 + x^2$, five $2rx + 2rx + x^2 = r^2 + 2ra + a^2 + x^2$, seu $2rx = 2ra + a^2$, unde analogia $2r : 2r + a :: a : x$.

19. Analysis hæc non inlegantem constructionem suppeditat. Producta AC, donec ad circumferentiam perveniat in F, erit $FA = 2r$, $FB = 2r + a$. Igitur si rectæ AB exitum perpendiculararem AG = AB = a, & jungamus FG, hæc producta secabit BD in puncto quæsito D. Nam ex similitudine triangulorum est $FA = 2r : FB = 2r + a :: AG = a : BD = x$; igitur si ducatur CD, erit DE intercepta inter punctum D & circumulum æqualis DB.

20. Hæc quoad problema, prout propositum fuit. Verum si universalius ita proponeretur; iisdem positis invenire punctum D, ad quod ducta CD sit $BD : DE$ in data ratione $a : n$. Tunc vocata $DB = x$, erit $DE = \frac{nx}{a}$, & $CD = r + \frac{nx}{a}$;

ergo æquatio prodiret $r + \frac{nx}{a} = r + a + x^2$, ex qua usitata methodo inveniremus $x = \frac{\sqrt{n^2 a^2 + 2n^2 a^2 r - a^4 - 2a^2 r + n^2 a^2 r - n a r}}{n^2 - a^2}$. Possimus

hinc quidem eruere constructionem, at minus profecto simplicem. Quapropter quando elegantia in primis quærenda est, ad aliud analyticos genus animum convertamus.

21. Sit linea (Fig. 8.) CED problemati satisfaciens. Agatur radius CO parallelus BD, cui per punctum E ducatur perpendicularis FEG, & parallela EH. Vocetur $CB = FG = a$, radius = r , $FB = EH = x$, $EF = y$, unde $EG = HC = a - y$. Quoniam $CH : HE :: CB : BD$, est $a - y : x :: a : BD = \frac{ax}{a - y}$;

ergo $DF = \frac{ax}{a - y} - x = \frac{xy}{a - y}$; & ex triangulis similibus CEG, DEF valet $CG : CE :: DF : DE$; ergo $x : r :: \frac{xy}{a - y}$. $DE = \frac{ry}{a - y}$. Jam vero ex conditione problematis $BD : DE$ est in ratione data $a : n$; ergo $\frac{ax}{a - y} : \frac{ry}{a - y} :: a : n$, seu $ax : ry :: a : n$, $xy : r : n$.

22. Possit ex hac analogia altera ex incognitis ejci, quoniam æquationem ha-

bemus aliam $CE^2 = CH^2 + EH^2$, hoc est $rr = a - y + xx$; sed hæc metho-
 dus nos ad æquationem secundæ gradus perduceret, cujus implicatio aliquanto
 esset constructio. Alia igitur via elegantior causa incedamus. Analogia nos docet
 $BF : FE$ esse in data ratione $r : n$. Itaque ex puncto O ducta OM parallela CB ,
 ut sit $BM = r$, abscinde in ea $MN = n$, & jungo BN . Ex quocumque re-
 ctæ BN puncto ducas normalem in BM , ut QP , erit $BP : PQ :: r : n$; ergo
 punctum E necessario erit in linea BN ; sed idem punctum in circuli circum-
 ferentia sit oportet; ergo erit punctum intersectionis circuli, & lineæ BN .
 Quare per punctum E intersectionis circuli, & rectæ BN , duc CED , hæc
 erit quaesita.

23. Sed determinationes diligenter sunt perfequendæ. Ex puncto (Fig. 9.)

B ducito tangentem BK , quæ producta fecabit MO in L , erit $BK = \sqrt{aa - rr}$,
 quod sit apertissimum ducto radio CK . Insuper similia sunt triangula BKC ,
 LBM ; ergo $KC : KB :: MB : ML$; sed $KC = MB$; ergo $ML = KB$
 $= \sqrt{aa - rr}$. Itaque si $n = \sqrt{aa - rr}$, linea BN transit in BL , & circulum
 tangit, & unica obtinetur problematis solutio. Si $n < \sqrt{aa - rr}$, veluti MaN ,
 tunc recta BaN , quæ nusquam circulum inveniat, solutiones omnes erant ima-
 ginaræ. Si $n > \sqrt{aa - rr}$, sed $< a$, ut MN , duplicem obtinemus intersectio-
 nem inter puncta A, O , adeoque solutionem problematis duplicem. Si $n = a$,
 ut MO , qui casus concidit cum problemate primum soluto, quia proportio evadit
 æqualitatis, præter punctum, quod præbuit solutio supra allata, alterum e-
 rit punctum O , per quod ducta CO in infinitum abit, quin cum BM concu-
 rrat, & ita lineæ, quæ æquales esse debent, evadunt inæquitæ. Si denique
 $n > a$, ut MaN , juncta BaN , hæc prius secabit circulum inter puncta $A,$
 O , quæ intersectio dat similem prioribus solutionem. Deinde secabit in pun-
 cto I sito post puncta A, O . Ex I per centrum C duc IC , hæc producta
 concurret cum MB in R , quo in casu etiam certum est $BR : RI$ esse ut
 $BC : M ; N :: a : n$, quamvis expressiones rectarum fiant negativæ; sunt enim

$$\frac{ax}{a-y}, \frac{ry}{a-y}, \text{ \& in hoc casu } y > a.$$

24. Si animum ad analysin hanc nostram advertas, eam latissime patere
 deprehendes; non enim necesse est, ut angulus MBC sit reclusus, sed sufficit,
 ut rectæ (Fig. 8.) MO, FG, PQ accipiantur parallele BC . Artificium
 etiam perpende, quo per intersectionem lineæ rectæ, & circuli ad elegantem
 constructionem devenimus. Hujusmodi methodus sæpe utilis est, quæ data
 habes in problemate circulum; eo enim circulo per rectam secato, solutio non
 raro maxima cum elegantia sese offert.

25. Hanc quidem viam sequuti sumus ea maxime de causa, ut analyseos
 artificia pateferent; neque enim primo intuitu cognoscere licet, quænam sit
 omnium methodus simplicissima. Cæterum problema hoc ita brevissime solvitur.
 Ex centro C (Fig. 10.) sit COR parallela BD , abscinde CR ita, ut $CO : CR$
 habeat rationem datam, quam habere debet $DE : BD$, et jungo BR . Per pun-
 ctum E , ubi hæc circulum secat, ducta CED ea erit, quæ determinat pun-
 ctum D . Etenim quæ sint similia triangula CER, BED , habebis $DE : DB ::$
 $CE : CO : CR$, quæ est ratio data.

26. Problema septimum. Super (Fig. 11.) AB triangulum ejusmodi ACB
 L
 con-

constituere, ut, ducta normali CD, sint AB, AC, BC, CD continue proportionales. Sit recta AB = a, AD = x, DB = y, ut sit a = x + y, demum DC = z, ut fiant AC = $\sqrt{xx + zz}$, BC = $\sqrt{yy + zz}$. Ex conditionibus problematis valebit primum hæc analogia AB:AC::CB:CD, sive x+y: $\sqrt{xx + zz}$:: $\sqrt{yy + zz}$:z, & quadrando xx + 2xy + yy: xx + zz :: yy + zz: z², & dividendo 2xy + yy - zz: xx + zz :: yy: z², & permutando simul ac dividendo 2xy - zz: yy :: xx: z²; ergo transitu ad æqualitatem facto 2xyzz - z⁴ = x²y², sive z⁴ - 2xyzz + x²y² = 0, & extracta radice zz - xy = 0, seu zz = xy. Igitur DC est media proportionalis inter AD, BD; ergo rectus est angulus ACB.

27. Rectum angulum esse, poterat brevius ita ostendi. Ex superiori analogia est AB. CD = AC. BC; sed area trianguli est dimidium rectanguli AB. CD; ergo eadem est dimidium rectanguli AC. BC; atqui patet hanc æqualitatem haberi non posse, nisi angulus ACB rectus sit; constat igitur angulum hunc rectum esse.

28. Hæc demonstrato convertitur problema propositum in hoc aliud: Super data hypothenusa AB triangulum rectangulum describere, cujus latera AB, AC, BC sint continue proportionalia. Retentis iisdem denominationibus erit a: $\sqrt{xx + zz}$:: $\sqrt{xx + zz}$: $\sqrt{yy + zz}$, & pro zz substituto xy, positaque a pro x+y, factaque divisione per \sqrt{a} , habebimus \sqrt{a} : \sqrt{x} :: \sqrt{x} : \sqrt{y} , sive a: x :: x: y. AD ergo debet esse media proportionalis inter AB, BD, seu dividenda est AB in extrema, & media ratione, quod notissimum est problema ab Euclide solutum.

29. Ex facta analysi hæc oritur constructio. Super AB tanquam diametro describere semicirculum, eandemque divide in D in extrema, ac media ratione; ex D excita normale DC secantem in puncto C circumferentiam circuli ACB, tum junctis AC, BC, erit triangulum ACB illud, quod quærebatur.

30. Duplici in hac solutione artificio usi sumus: primo namque ex una problematis conditione proprietas describendi circuli est demonstrata, et inde ad simplicius problema solvendum res omnis deducta est. Hoc ipsum deinde in alterum conversum est, de ejus solutione jam constat.

31. Problema octavum. Circulum describere, qui per duo data puncta (Fig. 12.) A, B transeat, et datum circulum tangat, cujus centrum C. Data puncta jungat AB, quam bifariam dividat perpendicularis DE; in ea centrum circuli reperiri certum est. Sit illud F, ex quo ducantur FB, FC, quæ secabit dati circuli circumferentiam in G puncto contactus; igitur erit FB = FG. Ex centro C demittatur in DE normalis CE, et vocentur FE = x, FB = FG = y, DB = a, ED = b, CE = c, et radius datus = r. Triangula rectangula FDB, FEC duas præbent æquationes yy = bb + 2bx + xx + aa, rr + 2ry + yy = cc + xx, quarum si primam ex altera detrahas, erit rr + 2ry

$$= cc - bb - aa - 2bx, \text{ seu } 2ry = 2b \cdot \frac{cc - bb - aa - rr}{2b} - x; \text{ ergo } 2r: 2b,$$

$$\text{ sive } r: b :: \frac{cc - bb - aa - rr}{2b} - x: y. \text{ Si abscindas } EH = \frac{cc - bb - aa - rr}{2b},$$

$$\text{ habebis } FH = \frac{cc - bb - aa - rr}{2b} - x, \text{ quam voca } = z.$$

32. Problema igitur in aliud conversum est, in quo dato circulo, cujus centrum

trum C, et puncto H in recta DH, agitur de ducenda CF ita, ut sit HF: FG::r:b, seu ut radius ad ED. Hoc autem, quod ex N. 25. facile solvitur, ita etiam construes. Accipe post b, r tertiam proportionalem HI, et iunge IC, cui parallelam ducito HG. Punctum G est illud, quod requiritur; ducta enim CGF, propter triangula similia FGH, FCI est FH:FG::HI:CG=r, seu ut r:b. Circulus igitur, cujus centrum F, et radius FG, tangit circulum datum, et transit per puncta A, B. Punctum aliud g, in quo HG circumferentiam leat, duas esse ostendit problematis solutiones. Quare si ducas g C f, invenies centrum f alterius circuli iisdem conditionibus praeiit; sed in primo casu circulorum contactus exterior est, in secundo interior.

33. Problema nonum. Superdatis duabus rectis partibus (Fig. 13.) CA maiore, CB minore duobus constitutis triangulis aequilateris AEC, CFB, iungatur EF secans AB productam in D; tum centro D intervallo DC describatur circulus CM: quaeritur in ejus circumferentia punctum M, ex quo ductis MA, MB, sit AC:BC::MA:MB. Primum inveniamus valorem radij DC. Ex similitudine triangulorum DAE, DCF est AE:CF, seu AC:CB::AD:CD; ergo dividendo AC-CB:CB::AC:CD, et analytice $a-b:b::a$

ad radium $CD = \frac{ab}{a-b}$; nam voco CA=a, CB=b. Sit MP normalis AB, fiatque CP=x, PM=y. Aequatio ad circulum exhibet $\frac{2ab}{a-b} \cdot x$

$-xx=yy$, & ex triangulis rectangulis est $AM = \sqrt{a+x^2+yy}$, $MB = \sqrt{b-x^2+yy}$; ergo ex conditione problematis $a:b::\sqrt{a+x^2+y^2}:$

$\sqrt{b-x^2+y^2}$, seu $a^2:b^2::a+x^2+y^2:b-x^2+y^2$, & elevatis ad quadratum binomils, substitutoque ex circuli aequatione valore y^2 , nascitur analogia

$$a^2:b^2::aa+2ax+xx:bb-2bx+xx::aa+\frac{2a^2x}{a-b}:bb+\frac{2b^2x}{a-b},$$

$$+\frac{2abx}{a-b}-xx \quad +\frac{2abx}{a-b}-xx$$

& permutando dividendoque $a^2:\frac{2a^2x}{a-b}::b^2:\frac{2b^2x}{a-b}$, five $a-b:x::a-b:x$;

quae proportio necessaria quam sit, ostendit, hoc non problema esse, sed theorema, & ubicumque accipiat punctum M, futurum semper AC:BC::AM:BM. Hanc revera esse descripti circuli proprietatem, ita facile potest demonstrari.

34. Jungantur MC, MD. Quoniam AE:CF, seu AC:BC::AD:CD; praeterea CE:BF, seu AC:BC::CD:BD, erit AD:CD::CD:BD; sed CD=DM; ergo AD:DM::DM:BD. Triangula igitur ADM, DMB circa communem angulum D habent latera proportionalia, adeoque sunt similia, et angulus AMD=MBD; sed MBD=BMC+BCM; ergo etiam AMD=BMC+BCM; sed BCM=CMD ob triangulum isosceles DCM; ergo AMD-CMD, hoc est AMC=BMC; igitur in triangulo AMB angulus M bifariam dividitur a recta MC, ac proinde quum basis AB segmenta sequi debeant laterum proportionem, erit AC:BC::AM:BM: Q. E. D.

L 2

35. Hanc

35. Hanc circuli proprietatem elegans solutio consequitur plurimorum, quae proponi solent, problematum, Ad exemplum datis ut antea (Fig. 14.) AC, CB, et linea qualibet HH, in ea punctum H determinare, ex quo ductæ HA, HB sint inter sese ut AC:CB, seu in quo sit angulus AHC=BHC. Determinato ut antea circuli centro D, puncta, in quibus circumferentia descripta radio CD lineam HH fecant, problemati satisfaciunt. Illud etiam problema nullo negotio enodabis, quod adeo multos torquere experientia deprehendimus. Datis tribus lineis (Fig. 15.) AC, CB, BG in eadem recta jacentibus punctum invenire, ex quo omnes sub æquali angulo conspiciantur. Super rectis AC, CB, BG tria ad eandem partem constitue triangula æquilatera, et linea jungens puncta E, F determinet punctum D, & jungens puncta L, F determinet punctum K. Centris D, K intervallis DC, KB describe duos circulos, qui se intersectabunt in H. Punctum hoc illud ipsum est, quod queritur. Si vero accidat, ut se circuli nusquam fecerint, problema nullam habere potest solutionem.

36. Problema decimam. Super data basi (Fig. 16.) BC triangulum isocelæ constituit, cujus angulus ad verticem A sit dimidum anguli ad basim. Problema hoc cæteris ab Euclide solutum eo animo proponimus, ut studiosi radicem omnium æquationis usum discant investigare. Trianguli quæsti ABC angulus basis alteruter ut C bifariam dividatur a linea CD, ita tres anguli A, BCD, ACD æquales erunt, & triangulum ACB simile triangulo CDB. Hinc

si vocemus $AC = AB = x$, $BC = a$, valebit analogia $x : a :: a : BD = \frac{a^2}{x}$,

sed $DA = CD = BC = a$; ergo $BA = \frac{a^2}{x} + a = x$, adeoque $xx - ax = a^2$,

quæ resoluta exhibet $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{aa + \frac{a^2}{4}}$. Ex ambiguitate signorum \pm , constat radicem esse duplicem; utramque hoc pacto geometricè determinabis.

37. Ex B erige $BE = \frac{a}{2}$ normalem basi, junge $EC = \sqrt{aa + \frac{a^2}{4}}$, cui fit

addas $EF = \frac{a}{2}$, & subtrahas $Ef = \frac{a}{2}$, erunt $CF = \frac{a}{2} + \sqrt{aa + \frac{a^2}{4}}$,

$Cf = \frac{a}{2} - \sqrt{aa + \frac{a^2}{4}}$ duæ æquationis radices, quarum prima est positiva,

altera negativa. Si quis tamen ex eo, quod ex analysi eadem profuunt, existimaret, ambas propositum problema solvere, erraret is sane vehementer; nec enim usui esse potest radix positiva CF. Namque quum in ea hypothèsi sit

latus $CA = CF = \frac{a}{2} + \sqrt{aa + \frac{a^2}{4}}$ majus quam $a = BC = DC = DA$,

erit angulus $ACB = ABC = BDC = A + DCA$, & angulus $A = DCA$; ergo angulus ACB duplus erit anguli A . At in casu altero, quum sit

$-\sqrt{aa + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2} < a$, id est latus $BA < BC = CD$ (Fig. 17.) punctum D

necessario cadet ultra A in latere BA producto, quod determinabis applicata $CD = BC$, & erunt triangula ACD , BCD æquicrura; igitur æquales anguli

guli B, D, ACB; sed angulus DCA, seu DAC æquat duos simul B, ACB; & angulus CAB æqualis est duobus DCA, D; ergo CAB = B + D + ACB, seu, quod idem est, angulus CAB ad verticem trianguli triplus est anguli ad basim. Itaque simul cum proposito aliud problema solutum est.

38. Ut autem rei hujus causam intelligas, cur videlicet ex duabus radicibus altera primo problemati intersit, altera secundo longe diverso, animadvertas sufficit, quo pacto ad æquationem divenerimus. Fecimus angulum BCD æqualem BAC, unde æqualitas inferitur linearum BC, CD, DA, quæ utriusque problematis propria sunt. Diximus deinde esse AB : BC :: BC : BD; at hæc quoque analogia ad secundum problema æque pertinet. Quare quum BD in primo casu sit $x - a$, in altero $x + a$, erit primi problematis æquatio $xx - ax = aa$, secundi vero $xx + ax = aa$: ut si in hac sumatur x negativa fiet $xx - ax = aa$ priori identica. Quum igitur hæc omnia utriusque problemati sint communia, mirum esse non debet, quod ex una eademque æquatione utriusque solutio eruat.

39. Sed ut melius cognoscant analyticos cultores, quid radicum diversitas sibi velit, atque possint, quo pacto diversis quasi viis ad ejusdem solutionis metam pervenire possint, aliam hic juvat eorum gratia analysim addere, quæ isdem verbis duo æquicrura triangula respiciat, tum illud, cujus ad verticem angulus dimidium est anguli ad basim; tum illud, cujus angulus ad verticem anguli ad basim est triplus. Quæsitum triangulum sit (Fig. 18. 19.) ABC, basis BC = a , latus BA = x , et ducantur lineæ AM, AN ita, ut angulos faciant MAB, NAC æquales angulo BAC, eademque lineæ producantur, donec concurrant cum BC in punctis D, E. Certum est triangula ABD, ACE fore isoscella; ergo AB = BD = AC = CE = x . Similia sunt præterea triangula EAB, ABC; ergo CB : BA :: BA : BE, et analytice in primo triangulo $a : x :: x : a + x$, unde $ax + ax = xx$, et in triangulo altero $a : x :: x : a - x$, unde $ax - ax = xx$, quarum æquationum altera in alteram transiit, accepta x negative.

40. Triangulum utramque divisionem exhibet circumferentiæ in quinque partes. Etenim si circulo cuilibet inscribas triangulum ABC, cujus angulus A sit dimidium singulorum ex (Fig. 20.) angulis B, C, arcus BC erit quinta pars circumferentiæ, et AB, AC singuli duæ quintæ partes. Contra inscripto triangulo ADE, cujus angulus A sit triplus singulorum D, E, arcus AD, AE erunt singuli quinta circumferentiæ pars, & arcus DBCE tres quintas partes continebit.

41. Problema undecimum. Triangulum datum (Fig. 21.) ABC in data ratione $m : n$ dividere per lineam datam parallelam. Dividatur BC in D, ut sit BD : DC :: $m : n$. Ex puncto C agatur CR parallela datæ, quæ in R incidat in AD productam. Recta GH parallela CR dividat triangulum ita, ut sit trapezium AHGB ad triangulum CHG :: $m : n$. Ex his clare consequitur, æqualia esse triangula ADC, GHC, & sublato trapezio communi CHPD, remanere æqualia triangula GDP, AHP. Problema igitur nostrum in hoc verti potest. Rectam GH parallelam CR ita ducere, ut æqualia sint triangula GPD, AHP.

42. His constitutis agantur HQ, HO parallelæ rectis AD, BC. Vocentur AD = a , BD = m , CD = n , DG = x , DQ = HO = y , erunt BG = $m - x$, CQ = $n - y$. Similitudo triangulorum ACD, HCQ, item HGQ, PGD duas præbet analogias CD : DA :: CQ : HQ; GQ : HQ :: CD : DQ.

$n : a :: n - y : HQ = \frac{an - ay}{n}$, $x + y : \frac{an - ay}{n} :: x : DP = \frac{nax - axy}{nx + ny}$; ergo

$AP = a + \frac{axy - anx}{nx + ny} = \frac{any + axy}{nx + ny}$. Demum vocata $DR = q$, invenies ob triangula similia GDP , CDR , $DG : DP :: CD : DR$, $x : \frac{nax - axy}{nx + ny}$

$:: n : q$, seu $nx + ny : na - ay :: n : q$; unde mediis simul, & extremis in se ductis, et facta divisione per n , æquatio oritur prima $qx + qy = na - ay$. Alteram ut invenias, animadvertite in æqualibus triangulis GPD , AHP parallelas GD , HO incidentes in bases DP , AP eisdem perpendicularibus, seu altitudinibus triangularum proportionales; ergo sicuti producta basium DP , AP in perpendiculares essent æqualia, ita æqualia erunt producta earumdem basium in parallelas GD , HO , adeoque $HO \cdot AP = GD \cdot DP$, idest $y \cdot \frac{any + axy}{nx + ny} = x \cdot \frac{nax - axy}{nx + ny}$, seu $ny^2 + xy^2 = nx^2 - x^2y$, seu $xy \cdot x + y = n \cdot x^2 - y^2$, unde facta divisione per $x + y$, habes $xy = n \cdot x - y$, & $y = \frac{nx}{n+x}$. Hic va-

lor in æquatione prima substitutus sufficit $qx + \frac{nqx}{n+x} = na - \frac{nax}{n+x}$, ejectione quoque divisoribus $2nqx + qx^2 = n^2a$, seu $x^2 + 2nx = \frac{n^2a}{q}$, quæ de more resoluta dat $x + n = \frac{n\sqrt{q+a}}{\sqrt{q}}$. Radici signum \pm non apponimus, quia signum negativum problemati non inservit.

43. Ut constructionem faciamus, advertite, esse $n : x + n :: \sqrt{q} : \sqrt{q+a}$, seu ut RD ad mediam proportionalem inter $RD = q$, & $RA = q + a$. Igitur inter KD , RA fac invenias mediam proportionalem RP , & per punctum P age GH parallelam CR ; ab hac triangulum divisum erit in data ratione.

44. Determinationes in hoc problemate maximi momenti sunt, ac difficultatis. Agatur BE dividens AC , ut sit $AE : EC :: BD : DC :: m : n$, tum CF parallela BE . Sit I intersectio linearum AD , BE . Ajo FI esse mediam proportionalem inter FD , FA ; quod ita demonstro. Ex hypothese $AE : EC :: BD : DC$; atqui ex triangulorum similitudine $AE : EC :: AI : IF$; item $BD : DC :: DI : DF$; ergo $AI : IF :: DI : DF$, & componendo $FA : FI :: FI : FD$. $Q. E. D.$ Itaque si linea triangulum dividens debeat esse parallela CF , determinanda quum sit media proportionalis inter FD , FA habebimus FI . Parallela autem rectæ CF per punctum I ducta est $BIÉ$, quæ dividit triangulum in ratione data, quod aliunde constat. Hoc determinato si CR secet AF post puncta D , F , constat, punctum P determinans RP mediam proportionalem inter RD , RA , cadere intra puncta A , I , & recta HG parallela CR transiens per punctum P cadet intra triangulum, & problema solutum exhibebit.

45. Si vero Cr secet AF inter puncta D , F , punctum p determinans mediam proportionalem inter rD , rA , cadet intra puncta D , I ; igitur hg parallela rC transiens per punctum p exhibit a triangulo, & præbet externum triangulum gBu . In hoc casu linea gh non dividet triangulum in ratione data $m : n$; sed dat $Au h - gBu : ghC :: m : n$. Etenim quum sint æqualia triangula gDp ,

gDp , Aph , spatium $pBuD = Aph - gBu$; ergo triangulum $ABD = Auh - gBu$; sed $ABD : ABC :: m : m+n$; ergo $Auh - gBu : ABC :: m : m+n$, & dividendo $Auh - gBu : BuhC + gBu = gHC :: m : n$. Q. E. D. Accusabunt post hæc fortasse analysim, quod post inventam æquationem riteque constructam quaesiti problematis solutionem non exhibeat. Videant hi potius, diligenterque perpendant, quidnam ex analysi quaesivimus. Postulavimus scilicet, quoniam pacto ducenda sit GH datæ parallela, ut edent æqualia triangula GDP , AHP . Hoc obtinemus, etiamsi parallela datæ Cr extra triangulum concurrat cum CB in g ; nam triangulum $gDp = Aph$. At si linea HG cadat intra triangulum omnis, ex æqualitate triangulorum descendit, datum triangulum ABC divisum esse in data ratione; sed si pars lineæ gh extra triangulum sit, æqualitas triangulorum idipsum non demonstrat.

46. At enim puncto r cadente intra puncta F , D , quo pacto solvendum problema? Industria opus est vel maxima, ut ex præmissa analysi, ac solutione in data ratione triangulum dividatur, si punctum r non cadat post puncta D , F . In triangulo itaque dato (Fig. 22.) ABC primum linea BC dividatur ab AD ita, ut sit $BD : DC :: m : n$; tum BE dividat AC , ut $AE : EC :: m : n$. Agatur CF parallela BE . Si linea, per cujus parallelam dividendum est triangulum concurrat cum AD post puncta D , F , ex dictis problema accipit solutionem, & linea dividens triangulum definit in latera CB , CA . Si vero concurrat ad alteram partem puncti F , tum duc CG dividendem AB ita ut sit $AG : GB :: m : n$, & secantem AD in I . Lineæ autem CG sit parallela AM concurrens cum BE in M . Si linea data, cui ducenda est parallela, concurrat cum AD intra puncta F , I , hujus parallela ex puncto A ducta secabit BE ultra puncta E , M ; ergo ex tradita solutione ducetur linea dividens triangulum, prout oportet, quæ consistet inter latera AB , AC .

47. Ad reliquos casus evolvendos agatur CH , ut sit $BH : AH :: m : n$; quæ secabit AD in L . Huic sit parallela BS . Si data linea incidit in DA post puncta D , L , huic parallela ducta ex puncto B secabit AD post puncta D , S ; ergo extradita solutione assignabitur linea consistens inter latera BA , BC dividens in data ratione triangulum. Si vero linea data incidat intra puncta I , L , nulla adhuc habetur solutio problematis. Hoc autem ideo accidit, quia posita est $CD < BD$.

48. Quapropter ad complendam problematis solutionem, ita dividatur BC in O , ut sit $CO : BO :: m : n$, & ducatur, producatque AO . Similiter ducta BK ita ut sit $CK : KA :: m : n$ agatur CV u parallela BK . Si parallela datæ ducta ex puncto C cadit post puncto O , u, seu D , V , habetur una solutio, & linea dividens consistit inter latera BC , CA . Nonitur puncta I , I , in quibus CG , CH secant AO . Si eadem parallela cadat intra puncta O , I , seu D , L , habetur solutio per lineam terminatam a lateribus BA , AC . Demum si cadit post puncta O , I , five D , L , solutionem præbet linea consistens inter latera BA , BC . Adverte in spatium I , seu IL per secundam hanc divisionem lateris CB duplicem obtineri solutionem, in quo spatio per primam solutionem nulla habebatur. Quare in omni casu duplici modo dividi potest triangulum in ratione data. Excipe tamen hypothesein $m = n$, quia in hac puncta D , O , item E , K , item G , H in unum coeunt.

49. Facilius idem problema hoc modo solvitur. Sit triangulum (Fig. 23.) ABC dividendum in data ratione $m : n$ per rectam datæ parallelam. Ex vertice B agatur BD parallela datæ, quæ fecet lineam AC . Si angulus DBC major

major fit angulo ABC, punctum sectionis D extra triangulum cadet. Si vero angulus DBC fit minor ABC, punctum sectionis cadet intra triangulum. Verum in hoc casu altero, si ex A agatur datae parallela, haec secabit BC extra triangulum. Quare quae de primo casu dicemus relate ad latus AC, applicanda erunt in secundo casu ad latus BC. Dividatur AC in M in ratione $m:n$, & inter DC, CM inveniat media proportionalis CG. Si ex puncto G agatur GZ parallela BD, haec in ratione data triangulum dividet. Nam similia triangula DBC, GZC praebent

GD : CG :: CB : CZ; atqui ex constructione

CD : CG :: CG : CM; ergo ex rationum aequalitate

CG : CM :: CB : CZ; ergo triangula GCZ, BCM latera reciprocan-
circa eundem angulum C erunt aequalia; igitur si ex toto triangulo ABC demas triangula GCZ, BCM aequalia, remanebit trapezium ZBAG aequale triangulo ABM; atqui CBM : ABM est in ratione data; ergo GCZ : ZBAG erit in data ratione. Q. E. D.

50. Ut externa triangula vitentur, fiat CD : CA :: CA : CX. Si CM < CX, patens est, fore CG < CA; quare constructio in nullum triangulum externum incidit. Si CM = CX, etiam CG = CA; quare AR datae parallela problema solvit. Si vero CM > CX, agatur recta AR parallela datae BD & mN parallela AB; tum inter duas BR, BN inveniat media proportionalis Bg, demum ex g ducatur gy parallela datae. Sine ullo triangulo externo formabitur triangulum Bgy, quod aequale erit triangulo ABN, atque adeo per gy dividetur triangulum in ratione data. Demonstratio eadem est cum superiore. Satis est, elegantem hanc solutionem indicavisse, ex qua eadem proficiunt determinationes, quas in prima solutione ostendi suffus.

51. Problema duodecesimum. Dato extra triangulum (Fig. 24. 25.) BAC puncto P, ex eo ducere PQX, quae triangulum in data ratione dividat. Per punctum P ad duo latera AB, BC producta, inter quae punctum ipsum existit, ducatur MPN parallela lateri AC, & supponamus PQX esse lineam, quae problema solvit, scilicet quae ducta habemus triangulum CQX ad reliquum spatium XQBA in ratione data; sit CX = x, PM = a, CM = b. Quoniam datum est triangulum CAB, & data ratio, quam habet ad CQX, hoc quoque determinatum erit. Fieri igitur potest huic aequale triangulum super CM in dato angulo BCA. Cognitum igitur erit hujusce trianguli status aliud, quod voco = c; ergo quia aequalium triangulorum latera circa aequales angulos recipiuntur, erit $CQ = \frac{bc}{x}$. Ex similitudine triangulorum CQX, MQP

valebit analogia $a \pm x :: x :: b$; $\frac{bc}{x} :: x :: c$ (a + x pertinet ad figuram 24, a - x ad 25); ergo $x \pm c = ac$, quae aequatione resoluta fit $x = \pm \sqrt{\frac{c}{2} \pm \sqrt{ac + \frac{cc}{4}}}$.

Quatuor ex signorum ambiguitate sunt valores x, quorum duo, in quibus $\frac{c}{2}$ afficitur signo + ad 24 figuram pertinent, reliqui ad 25. At quum semper fit $\sqrt{ac + \frac{cc}{4}} > \frac{c}{2}$, duo valores, in quibus radicalis quantitas negative sumitur, negativi sint oportet, adeoque problemati non inserviant, quia x accipienda esset in parte triangulo averfa. Itaque producta AC in F, donec fit

$CF = a + \frac{c}{4}$, super CF describatur semicirculus, factaque $CG = c$, erigatur normalis GT , constat CT fore mediam proportionalem inter CF , CG adeoque $= \sqrt{ac + \frac{c^2}{4}}$. Huic si addatur in fig. 24 $TH = \frac{c}{2}$, erit $CH = \frac{c}{2} + \sqrt{ac + \frac{c^2}{4}}$, si in fig. 25 detrahatur, fiet $CH = -\frac{c}{2} + \sqrt{ac + \frac{c^2}{4}}$.

Abscinde $CX = CH$, erit X punctum, ad quod recta ducta ex P solvet problema.

52. Verum accidere hic etiam potest, quod in superiore problemate monuimus, ut hi valores aliquando problema non solvant. Finge enim punctum X cadere in $2X$ ita, ut ducta $P2X$ oriatur triangulum externum $SB2Q$; tunc quidem erit triangulum $C2Q2X$ ad $AS2X - BS2Q$ in data ratione; at in eadem ratione divisum non erit triangulum CBA , quod problema postulat. Ut hoc incommodo liberemur, ducatur per puncta P , B recta PBR , Jam vero constat triangulum externum haberi non posse, nisi quum sit $CX > CR$. Id igitur si eveniat, paucis mutatis rem conficiemus. Nempe convertemus animum ad rectas AN , PN , super AN triangulum faciemus dato æquale, & in angulo BAC , & reliqua eodem, quo antea, modo peragemus; unde solutio priori omnino similis orietur, cui externi trianguli damna non timebimus. Posito triangulo BCR minori quam BAR , & majori quam CQX , patet, duas locum habere solutiones, quia duo hinc inde fieri possunt æqualia triangula CQX , $AS2X$. Si punctum P incidat in lineam AN aut CM , evidens est; nunquam triangulo externo locum esse. Si punctum P cadat intra triangulum, eadem terne methodo solutio perficietur, quam tamen aliorum industriz relinquo.

53. Problema decimumtertium. Dato quadrato (Fig. 26) $ABCD$, ejusque latere DC indefinite producto, rectam ducere AFE ita, ut FE intercepta sit datæ rectæ æqualis. Esto factum, & ex E demittatur normalis EH ad AB productam, sitque ad AE perpendicularis EG . Notum est, triangula ABF , EHG similia esse, & æqualia ob æqualia latera AB , EH ; ergo $HG = BF$, & $EG = AF$. Vocemus $AB = a$, $FE = b$, $BG = x$, $AF = y$, erunt $AG = a + x$, & $AE = b + y$; sed $AG^2 = AE^2 + EG^2$; ergo in promptu erit æquatio $aa + 2ax + xx = bb + 2by + yy$. Præterea similitudo triangulorum ABF , AGE præbet analogiam $AB:AF::AE:AG$, seu $a:y::b+y:a+x$; ergo $aa + ax = by + yy$. Hanc æquationem multiplicatam per 2 a prima subtrahamus, ut fiat $-aa + xx = bb$, seu $x = \pm \sqrt{aa + bb}$.

54. Prodc DC in L , donec sit $CL = b$, & jange BL , cui æquales abscinde BG , $B2G$. Super duabus AG , $A2G$ duos describe semicirculos, & scito puncta omnia, in quibus hi rectam DC secant, problema solvere. Hæc vero puncta quatuor quum sint, videlicet E , $2E$, $3E$, $4E$, quatuor quoque erunt solutiones, & interceptæ $= b$; nimirum FE in angulo BCE ; $2F2E$ in opposito angulo $DC2F$; $3F3E$, $4F4E$ ambz in angulo DCB . Problema igitur ad quartum gradum vere pertinet, quod etiam ostendisset æquatio; si BF pro incognita x assumpta fuisset. Hujus rei ratio est; quod quatuor esse possint valores BF , dum contra valores BG non nisi duo sunt, manentibus.

tibus tamen quatuor solutionibus, uti vidimus. Hinc potest facile percipi, quanta sit aliquando opus industria in incognita constituenda, quum ex ea interdum pendeat æquationis gradus. Nos hic ad secundi gradus æquationem devenimus, quæ quarti gradus æquationis vices sustinet, quia uterque incognitæ valor duplicem intersectionem, atque adeo solutionem duplicem exhibet.

55. Animadvertendum nunc est, binas solutiones, quas suppeditat semicirculus, cujus diameter est AG, nunquam posse deficere. Quum enim sit $AG = \sqrt{aa+bb}+a$ semper major quam $2a$, semicirculus in duobus punctis rectam DC productam necessario secabit. At non idem accidit alteri semicirculo; etenim quum $\sqrt{aa+bb}-a$, cui æqualis est diameter A2G, possit esse vel major, vel æqualis, vel etiam minor quam $2a$, hinc fiet, ut aliquando semicirculus in duobus punctis lineam secet, & duæ sint solutiones, aliquando eam tangat, adeoque unicam præbeat solutionem, aliquando tandem omnino fugiat, & solutio quælibet imaginaria, seu nulla sit.

56. Determinatio casus medii, a quo reliqui duo pendent, facile obtineri potest. Is siquidem postulat, ut sit $\sqrt{aa+bb}-a=2a$; ergo $aa+bb=9aa$, seu $bb=8aa$, unde $b=2a\sqrt{2}$; atqui $2a\sqrt{2}$ est dnpla diagonalis quadrati dati; ergo si data erit linea b æqualis duplæ diametro quadrati ABCD, tunc semicirculus diametri A2G latus DC productum tanget, & punctum contactus determinabit minimam rectam, quæ in angulo BCD per punctum A duci possit. Si vero b sit major dupla diametro, necesse est, semicirculum in duobus punctis secare CD, & duas præbere solutiones; si minor, constat intersectionem nullam haberi, adeoque nullam solutionem.

57. Eadem exhiberi potest methodus, etiamsi (Fig. 17.) ABCD non quadratum fuerit, sed rombus. Ducenda nempe erit EG, ut angulus AEG = ABC, tum EH, ut EHG = ABC, unde sequitur EH = AB; demum EM sit normalis AB. Constat, ea triangula, quæ similia, aut æqualia erant in hypothese quadrati, nunc quoque esse similia, & æqualia; ergo eadem valebunt analogiæ, si easdem retineas denominationes. Vocetur præterea MH

= c. Evidens est, $AG^2 - 2AG.MH = AE^2 + GE^2$, sive analyticè $aa+2ax+x^2 - 2cx - 2cx = bb+2by+2yy$. Altera æquatio eadem manet, scilicet $aa+ax = by+yy$. Hæc multiplicata per 2 deducatur a prima, ut reliqua

sint $-aa+xx-2ac-2cx = bb$; ergo $xx-2cx+cc = bb + a+c^2$,

unde $x-c = \pm \sqrt{bb+a+c^2}$.

58. Ex analysi hæc profuit constructio; a puncto C si demittatur perpendicularis CP, erit $BP = MH$, & $AP = a+c$; igitur accepta $PQ = AP$,

eique perpendiculari ducta $QL = b$, si jungas PL, hæc = $\sqrt{bb+a+c^2}$. Cape ergo PG, P2G = PL, & habebis duos valores $x-c$. His effectis super AG describatur segmentum circuli capiens angulum dato ABC æqualem. Hoc rectam DC in duobus punctis secabit E, 2E, quæ, ut supra advertimus, duas dabunt problematis solutiones.

59. Idem faciendum est super A2G, ut solutiones reliquas obtineamus. Verum dubium oritur, utrum segmentum describendum angulum continere debeat ABC, an potius complementum ad duos rectos. Id ut palam fiat, atten-

te constructionem superiorem consideremus. Duximus rectam EG ita, ut esset angulus AEG = ABF; ergo posita recta $\angle EAF = b$, ducenda erit $\angle EAG$ ita, ut sit angulus $\angle EAG = ABF$; sed hic est angulus complens duos rectos cum angulo ABC; ergo tale debet esse segmentum describendum super $\angle AEG$, ut angulum contineat æqualem complemento anguli ABC ad duos rectos, cujus segmenti intersectiones cum CD producta reliquis solutiones problematis exhibebunt.

60. Problema decimumquartum. Dato circulo (Fig. 28.) ABP, illius chorda AB, in eaque punctis duobus K, D, invenire punctum P, unde ductis PKN, PDM, & juncta MN, hæc sit chorda AB parallela. Hoc ad illud problematum genus spectat, quæ per speciosam analysim haud ita facile est solvere, alia methodo solvantur facillime. Verum ut ista legentibus notum sit, quantum industria valeat, opportunum esse duximus, quo melius eorum progressui confuleremus, algebraicam solutionem hujus problematis exhibere. Existimemus factum, quod postulatur, sitque RS diameter parallela chordæ datæ AB, in eamque demittantur normales NL, MO, PI, quæ fecerit chordam in punctis F, G, E. Ex centro C perpendicularis diametro RS erigatur CT, quæ chordas omnes eidem diametro parallelas bifariam partitur. Sint circuli radius = r, HD = n, KH = m, CH = a, CL = CO = x, LN = OM = y, CI = z, PI = q. Hinc erunt FK = x - m, DG = x - n, PE = q + a, DE = n - z, KE = m + z, NF = MG = y - a. His positis ex circuli natura, quæ nos monet quadratum sinus æquæ rectangulum segmentorum diametri, ultro se nobis of-

ferunt æquationes duæ $r^2 - x^2 = y^2$, $r^2 - z^2 = q^2$. Similia triangula PEK, NFK dant PE:EK::NF:FK, seu $q+a:a:m+n-z::y-a:x-m$; tum triangula PED, MGD pariter similia dant PE:ED::MG:GD, aut $q+a:n-z::y-a:x-n$; quas analogias si inter se comparemus notum fiet, esse $m+z:n-z::x-m:x-n$, & componendo $m+n-z::2x-m-n:n$; ergo $n-z = \frac{mx+n^2-mn-nn}{2x-m-n}$, seu $z = n + \frac{mn+nn-mx-nn}{2x-m-n}$.

Si hunc valorem in prima analogia substituamus, fiet $q+a:m + \frac{n-mx}{2x-m-n}::y-a:x-m$, id est consequentibus multiplicatis per $2x-m-n$, divisisque per $x-m$, $q+a:m+n-z::y-a:2x-m-n$; ergo

$$q = \frac{my - ma + ny - na}{2x - m - n} - a = \frac{m+n}{2x - m - n} \cdot y - 2a, \text{ \& quadrando}$$

$$q^2 = \frac{m+n}{2x - m - n} \cdot y - 4axy \cdot \frac{m+n+4ax}{2x - m - n}. \text{ In hanc formulam introducatur}$$

valores q, y ex duabus primis æquationibus eruti, & oriatur $r^2 - z^2$

$$= \frac{m+n}{2x - m - n} \cdot r^2 - x^2 - 4axy \cdot \frac{m+n+4ax}{2x - m - n} = r^2 - \frac{x \cdot n - m}{2x - m - n}, \text{ \& posito}$$

nemp e pro z ejus valore paullo ante invento. Hæc vero æquatio, si liberetur

tur a divisoribus, in sequentem mutatur $4r^2x^2 - 4mr^2x - 4nr^2x + m^2r^2 + 2mnr^2 + n^2r^2 - n^2x^2 + 2mnx^2 - m^2x^2 = m^2r^2 + 2mnr^2 + n^2r^2 - m^2x^2 - 2mnx^2 - n^2x^2 - 4maxy - 4naxy + 4a^2x^2$; deletisque terminis, qui eliduntur $4r^2x^2 - 4a^2x^2 + 4mnx^2 - 4mr^2x - 4nr^2x = -4maxy - 4naxy$,

& dividendo per $4x$, $r^2 - a^2 + mn \cdot x - mr^2 - nr^2 = -ay \cdot m + n$, sive $\frac{r^2 - a^2 + mn}{m+n} \cdot x = r^2 - ay$. Quoniam vero $r^2 - a^2 = AH^2$, si vocetur AH

insigne b , erit $\frac{b^2 + mn}{m+n} \cdot x = r^2 - ay$. Qui præcedentes æquationes ita tractasset, ut incognitæ superessent z, q , is habuisset $\frac{b^2 - mn}{n-m} \cdot z = rr + ay$.

61. Utraque formula non ineleganter construi potest; sed primam attentius inspiciamus, curemusque, ut expeditior etiam, si fieri potest, evadat. Manifestum est inter cosinum, & secantem medium proportionale esse radium; sed cosinus arcus AT est $CH = a$; ergo si vocemus secantem s , erit $rr = as$. Pariter quum sinus AH $= b$ sit medius proportionalis inter cosinum & secantem cosinu diminutam, erit $bb = as - aa$. Hæc igitur valoribus in formula substitutis, habebimus $\frac{as - a^2 + mn}{m+n} \cdot x = as - ay$, seu $m+n : s-a + \frac{mn}{a} :: x : s-y$.

Hinc ad constructionem gradum facientibus primo querenda est quarta proportionalis post CH, HK, HD, quæ invenitur juncta CK, & ducta DV ita, ut angulus HDV æquet angulum KCH; patet enim, tunc fore $HV = \frac{mn}{a}$.

Compleatur jam parallelogrammum KD VX, & sit AZ tangens circuli diametro CT productæ occurrens in Z. Erit CZ secans arcus AT, quam vocavimus s , & ZV $= s - a + \frac{mn}{a}$, & XV $= m+n$. Ducatur recta ZX; punctum, in quo ea circumferentiam secat, erit punctum queritum, & NQ diametro perpendicularis $= x$, QC $= y$; habebimus enim XV : VZ :: NQ : QZ, seu $m+n : s - a + \frac{mn}{a} :: x : s - y$; adeoque si recta ducatur per puncta N, K, ea in circumferentia punctum P determinabit, quod problemati satisfaciet. Quia linea ZX si circumferentiam secat in puncto N, necesse est, ut illam secet alio etiam in puncto n, ideo duplicem solutionem fore cognoscimus; recta enim per n, K ducta in circuli peripheria punctum aliud assignaret puncto P analogum.

62. Constructio non deficit, etiam si puncta K, D data sint extra circumulum; at deficit, si ipsa jaceant in diametro AB; in hac enim hypothefi habebimus $a = 0$, $s = \infty$. Revertamur ergo ad formulam $\frac{b^2 + mn}{m+n} \cdot x = r^2 - ay$, & nonnulla advertamus. Quoniam $a = 0$, evanescit terminus ay , & evadit $b = r$; igitur

igitur formula nostra in hanc vertitur $\frac{r^2 + mn}{m+n} \cdot x = r^2$, quæ facta $mn = pr$, in hanc transit $x = r \cdot \frac{m+n}{r+p}$. Itaque junctæ (Fig. 29.) KT, & ducta DV in angulo CDV = CTK, constat fore CV = p. Compleatur parallelogrammum KD VX, & jungatur XT secans AB in F. Per F normalis diametro AB excutetur Nn. Puncta N, n ea sunt, per quæ habetur solutio. Nam triangula similia dant TV : VX :: TC : CF, sive $r+p : m+n :: r : x$, ut necesse erat.

63. Quamvis haud ineleganti constructione problema solvimus, tamen si alia utamur methodo multo potest solvi elegantius. Aliam itaque constructionem indicabimus, ut discant studiosi non illud tantum curare, ut quod propositum est assequantur, sed ut assequantur etiam quam maxime fieri potest eleganter. Ex puncto (Fig. 30.) T, quod bifariam partitur arcum ATB, si ducatur TP, ea in duas partes æquales dividet angulum NPM, & AB secabit in H ita ut sit KH : DH :: PK : PD. Scimus esse PD . DM = AD . DB, item PK . KN = AK . KB; ergo descripto super AB semicirculo AGB, erectisque ordinatis KF, DG, quarum quadrata sunt rectangulis AK . KB, AD . DB respective æqualia, valebit

PK . KN : PD . DM :: KF² : DG²; sed ex similitudine triangulorum

PK : PD :: KN : DM; ergo PK² . PD² :: KF² . DG², &

PK : PD :: KF : DG; atqui PK : PD :: KH : DH; ergo

KH : DH :: KF : DG. Dividenda igitur est recta KD in ratione data

KF : DG. Quod ut præstet, sufficit producere GD in E, ut sit DE = GD, &

ducere FE; quod est evidens ex triangulorum similitudine. Itaque si ex T per

H, in quo puncto FE secat KD, ducatur recta, hæc determinabit punctum

P, ex quo ductis PKN, PDM, erit MN datæ chordæ AB parallela. Si ex

T vertice arcus APB, rectam aliam ducas per H, determinabitur in circumferentia punctum alterius solutionis. Si recta AB esset diameter, constructio fa-

cilior evaderet; tunc enim semicirculus AGB cum ATB coincideret. Quam-

vel utrumque, vel alterutrum ex punctis datis extra circulum cadit, tum loco

ordinatarum ad semicirculum AFB, quæ impossibiles sunt, ad eundem tangen-

tes ducendæ essent, & ratiocinio eodem perficienda constructio.

64. Verum elegantissima omnium est solutio, quam attulit Pappus. Ea est

hujusmodi. Ex puncto (Fig. 31.) N ducatur tangens NL concurrens cum datâ

chorda producta in puncto L. Certum est angulum LNK = NMP = KDP;

ergo similia sunt triangula LNK, PDK; ergo LK : KP :: NK : KD, & LK .

KD = NK . KP; sed NK . KP = AK . KB; igitur LK . KD = AK . KB, unde

KD : AK :: KB : LK. Jam perfecta res est; quam enim tres primi termini

dati sint, quartus determinatur, quo habito si ex L ducatur ad circulum tangens

LN, determinabitur N. Tangens altera L n secundæ solutioni servit. Hæc

methodus locum habet, seu in diametro, seu extra circulum data sint puncta.

65. Problema decimumquintum. Ex dato puncto D (Fig. 32.), quod situm est in tri-

anguli BAC latere CB producto, ducere lineam DNM, ut triangulum DNB

ANM sit in data ratione m : n. Quoniam anguli DNB, ANM æquales sunt,

erit triangulum DNB : ANM, aut m : n in ratione DN : NM. Ex puncto D

duc DE parallelam BA, quæ cum CA producta concurrat in E, & ex A duc

AF parallelam BC, quæ concurrat in F cum DM producta. His factis ob triangula similia constat esse DN:MN::EA:AM, præterea BN:NA::DB:AF; ergo rationibus substitutis erit $m:n$ in ratione EA:AM

composita DB:AF; atqui ex similitudine triangulorum DMC, AMF habemus DC:MC::AF:AM, unde

$$AF = \frac{DC \cdot AM}{MC}; \text{ ergo } m:n \text{ in ratione EA:AM composita DB:} \frac{DC \cdot AM}{MC}; \text{ ergo } \frac{m \cdot DC \cdot AM^2}{MC}$$

$$= n \cdot EA \cdot DB, \text{ sive } AM^2 = \frac{n \cdot EA \cdot DB \cdot MC}{m \cdot DC}; \text{ sed } DC:DB::EC:EA,$$

adeoque $\frac{DB}{DC} = \frac{EA}{EC}$; ergo substitutione facta $AM^2 = \frac{n \cdot EA^2 \cdot MC}{m \cdot EC}$. Abscin-

de EG tertiam proportionalem post EC, EA, ut sit $EG = \frac{EA^2}{EC}$, & fac $m:$

$m::EG:AL$; ita habebis $AL = \frac{n \cdot EG}{m} = \frac{n \cdot EA^2}{m \cdot EC}$. Quapropter inventa æquatio in hanc vertetur $AM^2 = AL \cdot MC$. Vocetur $AC = a$, $AL = b$, $AM = x$, unde $MC = a - x$; igitur æquatio analytice erit $x^2 = b \cdot \frac{a - x}{m}$, seu $x^2 + b x = a b$, cui eleganter accommodari potest methodus P. Rabuelis, quam superiori capite tradidimus.

66. In angulo quovis ducatur $AH = AC = a$, abscindatur $HI = AL$, & per tria puncta A, L, I circulus describatur, cui alter circulus sit concentricus transiens per punctum H. Circulus iste secabit AC in punctis M, P, quorum primum est inter puncta C, A, alterum post ipsa, & utrumque exhibet solutionem. Ut expeditior constructio fiat, sit AH normalis AC, jungaturque LI, quæ bifariam dividatur in K. Patet, hoc punctum esse centrum circuli transeuntis per puncta L, A, I. Quare si centro K radio KH circulus describatur, hic per duplicem intersectionem cum linea AC duplicem solutionem dabit.

67. Analyſim, & constructionem hæc determinationes sequuntur. Si n , atque adeo $b = 0$, duæ solutiones in unam abeunt, punctis M, P cum puncto A coeuntibus. Si n sit quantitas positiva, punctum M, quod radicem positivam determinat, semper cadit inter A, C, neque ad C perveniet, nisi quum n est infinita. Punctum vero P, a quo radicis negativæ magnitudo dependet, cadit intra A, E, si $n < m$; cadit in E, si $n = m$; cadit ultra puncta A, E, si $n > m$, & ad distantiam progreditur infinitam, facta n infinita. Quod si n , adeoque etiam b esset quantitas negativa, problema esset impossibile, & utraque solutio imaginaria, si $b < 4a$; duæ solutiones in unam coeunt, si $b = 4a$; si $b > 4a$, uterque valor x est $> a$, alter vero $< 2a$, alter $> 2a$. Tandem si b infinita sit, intersectionum alia erit in puncto C, alia in puncto infinite remoto.

68. Ut qui analyſim colunt, diversis modis problema tentare discant, aliam propositi problematis solutionem placet addere, quæ nobis videtur elegantissima. Ex dato puncto (Fig. 33) D ducatur DV parallela AC, quæ secet AB productam in V. Divisa bisariam BV in X, describatur centro X circulus BS V,

BSV, & ratio data fit ut $BX^2 : AR^2$, quæ AR statuat in puncto A normalis AB. Ex R ducatur tangens circuli RS, hæc secabit AB in aliquo puncto N, per quod si ex D transeat linea DNM, obtinebimus triangula DNB: ANM:: $BX^2 : AR^2$.

69. Etenim DNB: DNV:: NB: NV:: $NS^2 : NV^2$; sed DNV: ANM:: $NV^2 : NA^2$; ergo ex æquo DNB: ANM:: $NS^2 : NA^2$; sed propter similitudinem triangularum NSX, NAR est NS: NA:: SX=BX:

AR; ergo DNB: ANM:: $BX^2 : AR^2$. Quod spectat ad determinationes, quæcumque sit longitudo lineæ AR, si ex puncto R ducatur tangens in semicirculum BSV, hæc secabit AB inter puncta A, B, ac proinde M cadet inter puncta A, C ita, ut si AR sit nulla, puncta M, N cadent in A, & si infinita, punctum N cadet in B, & M in C. Sed quoniam ex eodem puncto R duci tangens potest etiam ad semicirculam B₂SV, per tangentem R₂S aliam obtinebis problematis solutionem. Si AR minor est radio XB, tangens R₂S secabit AB productam post puncta B, A, ut in 2N, cadente interea puncto M post puncta C, A ut in 2M. Verum si AR radio circuli sit æqualis, quæ tangens R₂S fiat parallela lineæ AB, punctum 2N in infinitum recedet, punctum vero 2M manebit in distantia finita; sed nihilominus triangulum utrumque infinitum evadet. Denique si RA major sit radio circuli, tangens R₂S secabit A B post puncta B, V, & punctum 2M situm semper erit post puncta C, A ita, ut si AR infinita sit, ipsam quoque in infinitum abeat, cadente in ea hypothesi puncto 2N in V.

70. Quamvis vel maxime elegans visa sit nobis hæc solutio; suspicio tamen aliqua suborta est, per illam non omnino exhauriri problema, quæ viderimus, punctum intersectionis N nunquam cadere posse in partem BV lineæ AB productæ, quia tangens non potest intra circulum secare diametrum. Atqui ducta ex puncto D linea secante AB intra puncta B, V, oriri possunt triangula duo, quæ datam rationem habeant. Res digna erat inquisitione. Ducta itaque, ut antea (Fig. 34.) DV parallela AC, quæ secet AB in V, delictis præ supra BV semicirculo BSV, acceptaque quacumque AT, cui normalem

constituamus TR ita, ut sit $TR^2 : TA^2$ in ratione data, jungamus AR, quæ producta secet circulum in puncto S. Dicimus, ordinatam SN normalem diametro punctum N determinare, per quod ducta DNM sit triangulum DNB:

ANM:: $TR^2 : TA^2$. Demonstratio. Triangulum DNB: DNV:: NB: NV:: $SN^2 : NV^2$; sed triangulum DNV: ANM:: $NV^2 : AN^2$; ergo ex æquo DNB: ANM:: $SN^2 : NA^2$:: $TR^2 : TA^2$. Q. E. D.

71. Quoniam AS producta circulum secat in alio puncto 2S, illinc secundam solutionem haberi constat. Verum solutiones non semper sunt possibiles. Nam si fuerit AR: TR:: AX: BX, patet AR fore tangentem circuli, quæ in casu duplex solutio in unam coit. Si TR fuerit major, AR circulum non secat, adeoque solutio utraque imaginaria. Demum si TR fuerit minor duplex erit intersectio, & duplex solutio; & ipsæ intersectiones fient in punctis B, V, si $TR = 0$. In hac solutione punctum N, per quod DM est ducenda, semper cadit inter puncta B, V. Quare si hæc cum priore conjungatur, omnes, qua-

quasumque problema nostram suscipit solutiones, obtinebuntur. Hinc discant geometrix cultores, quam diligenter sint illis omnia circumspicienda, antequam pronuncient, adhibitam constructionem undequaque perfectam esse, & problematis solutiones omnes exhibere.

72. Problema decimumsexum. In circuli dati (Fig. 35.) MBN peripheria punctum B reperire, ex quo ductæ rectæ BM, BCX, BN, quarum duæ ad extrema datæ chordæ puncta tendunt, tertia per centrum ad chordam pervenit, sint in continua proportione. Ex puncto B in datam chordam demittatur perpendicularis BV, producatu BX in I, jungaturque IN, & ex centro C ducatur normalis CS. Triangula duo rectangula BVM, BNI similia sunt, quia anguli in M, I eidem arcui insistentes sunt æquales; ergo BV:BM::BN:BI; ergo BV. BI = BM. BN = BX² ex conditione problematis; ergo BI:BX::BX:BV::CX:CS. Sit jam CX=y, BI=2a, CS=c, unde BX=a+y. Ita erit analogia 2a:a+y::y:c; ergo 2ac=y²+ay, & y²+ay = 2ac + $\frac{a^2}{4}$, adeoque y = $-\frac{a}{2} \pm \sqrt{2ac + \frac{a^2}{4}}$.

73. Ut valores geometricos constituas, divide radium utrumque (Fig. 36.) CA, CZ bifariam in P, O, & accepta OQ = 2c + $\frac{a}{4}$, super QP fac semicirculum QTP; constat, normalem OT fore = $\sqrt{2ac + \frac{a^2}{4}}$; ergo si centro O intervallo OT determines in linea AQ puncta L, l, habebis CL = $\sqrt{2ac + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, & Cl = $-\sqrt{2ac + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, hoc est utrumque valorem y. Primo valore si utaris, & puncta X, X invenias ita, ut CX=CL, hæc puncta intra circulum eadent; at si utaris altero, puncta x, x extra circulum sita erunt. De primis ut dicamus, & quidem de uno tantum (ex alio enim solutio provenit omnino priori analogia) per (Fig. 35.) X ducatur CX. Hæc producta designat in circumsferentia punctum B, unde ductæ BM, BX, BN sunt continue proportionales. Verum advertendum est CX productam non solum secare circumsferentiam in B, sed etiam in I. Quid huic intersectioni cum problemate nostro? an aliam indicat solutionem? Minime sane; imo ad aliud longe diversum problema pertinet, ad illud scilicet in quo quis postulare in circumsferentia locum l, unde ducta diametro lCB secante datam chordam MN in X, junctisque lM, lN, esset lM:lX::BX:lN: quod ita demonstramus. Quoniam CX=y = $\sqrt{2ac + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, erit y + $\frac{a}{2}$ = $\sqrt{2ac + \frac{a^2}{4}}$, & y + ay = 2ac; ergo 2a:a+y::y:c, seu lB:BX::CX:CS; sed ducta normali lH est CX:CS::lX:lH; ergo lB:BX::lX:lH; sed triangula lHM, lBN rectangula in H, N habent præterea angulos lMH, lBN æquales, utpote eidem arcui insistentes; sunt igitur similia; ergo lM:lX::BX:lN. Solum igitur punctum B problemati proposito inservire potest.

74. Nunc si puncta (Fig. 36.) x, x, quæ extra circulum cadunt, inspiciamus, linea CX secat pariter circumsferentiam in punctis duobus B, l. At quodnam-

corum

eorum solvit problema nostrum, quodnam illud, de quo modo egimus? Si ani-

madvertas esse $Cl = \frac{a}{2} + \sqrt{2ac + \frac{a^2}{4}}$, eodem, quo supra, ratiocinio re-
peries, punctum B, quod proprius est chordæ MN, dare tres lineas BM, BX,
BN continue proportionales, ex remotiore vero I haberi analogiam IM:IX
:: BX:IN. Si quis vellet $OT = \sqrt{2ac + \frac{a^2}{4}}$ invenire ope solius dati cir-
culi ZBA, is possit hoc pacto id assequi: fiat, ut PQ:PO:: (Fig. 35.)
ZA:AR, & ex R normali RD erecta, ducatur AD, quæ producatur, do-
nec in E occurrat perpendiculari erectæ ex centro circuli C. Erit CE = (Fig.
36.) OT.

75. Non erit inutile secundam addere solutionem. Ex B (Fig. 37.) ducatur BH
diametrò ZA perpendicularis. Sit radius = a, MS = b; CS = c, CH = x,
HB = y. Constat, has haberi æquationes $aa = bb + cc$, $aa = xx + yy$, &
ex similitudine triangulorum CHB, CSX esse $BX = \frac{a \cdot c + x}{x}$. Est præterea

$$BM = \sqrt{\frac{c^2 + x^2}{c+x} + \frac{b^2 + y^2}{b+y}} = \sqrt{\frac{cc + 2cx + x^2}{bb + 2by + y^2}} = \sqrt{\frac{2aa + 2cx + 2by}{x}}$$

$$BN = \sqrt{\frac{c^2 + x^2}{c+x} + \frac{b^2 + y^2}{b+y}} = \sqrt{\frac{cc + 2cx + x^2}{bb - 2by + y^2}} = \sqrt{\frac{2aa + 2cx - 2by}{x}}$$

$$BM \cdot BN = 2\sqrt{a^2 + 2a^2cx + c^2x^2 - b^2y^2}$$

$$BM \cdot BN = 2\sqrt{\frac{a^4 + 2a^2cx + c^2x^2}{-a^2b^2 + b^2x^2}} = 2\sqrt{\frac{a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2}{-a^2c^2 + a^2x^2}} = 2a \cdot \frac{c+x}{x}$$

atque conditio problematis postulat, ut $BM \cdot BN = BX^2 = \frac{a \cdot c + x}{x}$: ergo

$$\text{provenit æquatio } 2a \cdot \frac{c+x}{x} = \frac{a \cdot c + x}{x}, \text{ seu } 2x^2 - ax = ac, \text{ quæ de more}$$

resoluta præbet $x = \frac{a}{4} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2ac}$

76. Hanc analyticam resolutionem constructio sequitur valde simplex. Cen-
tro (Fig. 38.) S intervallo SC circulum describe, & accepta $CL = \frac{1}{4} CZ$,
duc LF tangentem. Patet, hanc fore = $\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} + 2c}$; ergo si capias
 $LH \pm Lh = LF$, erunt CH, Ch incognitæ nostræ valores. Quare ductis per
puncta H, h normalibus, determinabuntur duo puncta B, a B, item b, a b,
quæ propositum problema solvunt.

77. Problema, quo punctum (Fig. 37.) I tale querimus, ut sit IM.IN
= IX.BX, eadem fere analysi resolvi potest. Ducatur IK parallela datæ chor-
dæ, & vocetur CK = x, KI = y, reliquis ut supra denominationibus reten-
tis.

tis. Quoniam est $CK:CI::CS:CX$, seu $x:a::c:CX = \frac{ac}{x}$, erit $IX = a \cdot \frac{x-c}{x}$, $BX = \frac{a \cdot x + c}{x}$, & rect. $IX \cdot BX = \frac{a^2 \cdot x^2 - c^2}{x^2}$. Præterea

$$IM = \sqrt{x-c^2 + b-y^2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2cx + xx}{b^2 - 2by + yy}} = \sqrt{2aa - 2cx - 2by}. \text{ Item}$$

$$IN = \sqrt{x-c^2 + b+y^2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2cx + xx}{b^2 + 2by + yy}} = \sqrt{2aa - 2cx + 2by}: \text{ ergo}$$

$$IM \cdot IN = 2 \sqrt{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 - b^2y^2} = 2 \sqrt{\frac{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2}{-a^2b^2 + b^2x^2}}$$

$$= 2 \sqrt{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2} = 2a \cdot x - c: \text{ ergo ex problematis conditione}$$

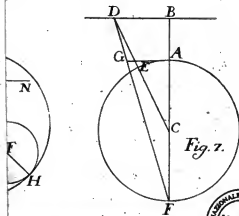
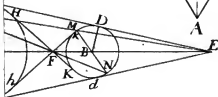
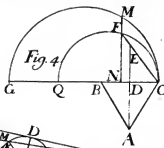
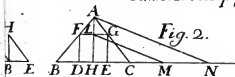
$2a \cdot x - c = \frac{a^2 \cdot x^2 - c^2}{x}$, seu $2x^2 - ax = ac$. Quæ æquatio similis omnino est præcedenti: quare x in hoc problemate illis æquales sunt, quas supra invenimus, neque ab illis differunt nisi positione; has enim in oppositam partem accipere necesse est. Quam solutio hæc duo diversa problemata non permisceat, hac de causa priori videtur anteferenda.

CAPUT DECIMUM.

Principia Calculi finuum, & cosinuum, ejusque usus.

CL. Eulerus omnium primus sinus, cosinus, aliasque lineas trigonometricas in analysim introduxit, iisque in multis inventu sane difficillimis plurimum, feliciterque usus est. Novum hunc calculum utilitate permoti, quæ in eo est maxima, gentium omnium præcipui Analytiz, tanti viri vestigiis insistentes, cupide sequuti sunt. Nos etiam deinceps eo utamur sæpiissime; ideoque illius principia hic tradere, ac demonstrare, necesse est.

1. Esto circulus quicumque $ANBM$, in cujus centro (*Fig. 1.*) C diametri duo AB , MN ad angulos rectos sese intersecant; ducaturque linea CSQ , quæ angulum quemlibet eum A C efficiat: ex puncto S , ubi hæc recta circumferentiam secat, demittatur SF perpendicularis ad AB ; & ex punctis A , N tangentes ducantur, quæ eo usque productæ sint, donec rectam CS pariter, quantum opus est, productam fecerint in P , & Q . Radius circuli CA dicitur sinus totus, eumque nos vocabimus $= r$; recta SE dicitur sinus arcus AS , atque adeo sinus anguli ACS ; sunt enim in circulo anguli ad centrum suis arcibus proportionales; hunc sinum hoc signo Sc indicabimus, quod sinum circulearem significat. Quam puncta F , S , P , Q absque numeris assumimus, ea, quæ dicimus, intelligenda sunt iis omnibus circuli punctis convenire, quæ in figura iis litteris indi-



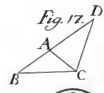
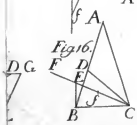
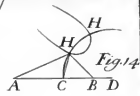
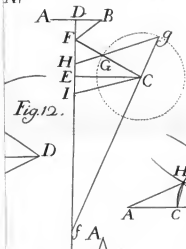
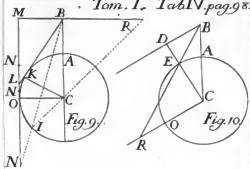


Fig. 19.

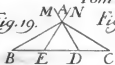


Fig. 20.



Fig. 22.

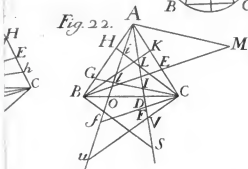


Fig. 24.

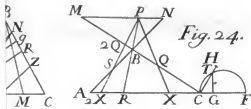
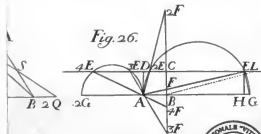
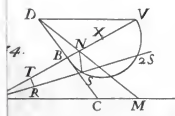
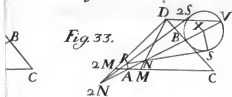
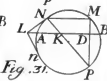
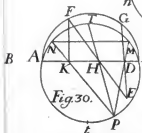
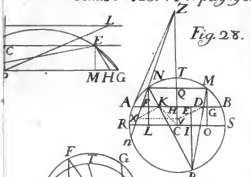


Fig. 26.





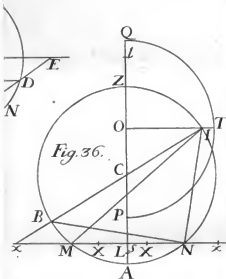


Fig. 36.

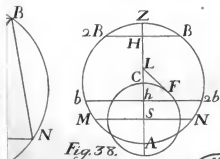


Fig. 38.



indicantur; quàm vero litteræ numerum addimus, tunc de eo puncto sermo erit, ubi litera cum addito numero reperietur. Recta CF vocatur cofinus, & notabitur signo Cc , quod idem est ac cofinus circularis. AP tangens arcus distinguetur signo Tc ; NQ vero tangens complementi arcus ad quadrantem dicitur arcus cotangens, quæ vocabitur Ctc , idest cotangens circularis. Recta CP est secans, CQ cosecans, idest secans arcus complementi: primam dicemus Sc , alteram Csc . Hæ denominationes omnes relate ad arcum AS , sive ad angulum ACS intelligi debent. Arcus circuli a nobis græcis litteris indicabuntur; ita Sc . τ sinum significabit arcus τ ; Ctc . μ cotangentem arcus μ &c.

2. Quoad sinus, & cofinus hæc sunt animadvertenda. Quando est sinus $SF = o$, tunc erit cofinus $CF = r$, cui pariter æqualis erit secans CP , tangens AP erit $= o$; at CQ cosecans, & cotangens QN evadent infinitæ. Si vero supponamus cofinum decrefcere, & fieri $CF = o$, sinus, & cosecans erunt $= r$, cotangens $= o$, tangens, & secans evadent infinitæ; unde quum sinus, aut cofinus sunt $= o$, linearum reliquæ trigonometricæ partim sunt $= o$, partim $= r$, partim infinitæ. Quum sinus æquat cofinum, tunc etiam tangens æquabit cotangentem, secans cosecantem, & angulus ad centrum semirectus, adeoque arcus dimidium quadrantis; quæ omnia sunt per se apertissima.

3. Posito igitur arcu $AS = o$, erit sinus $SIF = o$, & cofinus positivus $CIF = r$: posito arcu eodem minore circuli quadrante, sinus SIF , & cofinus CIF positivi erunt: si arcus AS æquet quadrantem AN , sinus erit æqualis radio circuli positivus, & cofinus $= o$: si adhuc creseat arcus, sed minor sit semicircumferentia, tunc erit sinus $ASIF$ adhuc positivus, & cofinus $CASF$ negativus: si arcus semicircumferentiam ANB æquabit, sinus erit $= o$, & cofinus negativus radio æqualis. Quum autem arcus semicircumferentiam superat, sed minor est tribus quadrantibus, verbi gratia quum est arcus AB_3S , tunc & sinus $3S_3F$, & cofinus C_3F ambo negativi sunt; si arcus æquat tres quadrantes, ut $ANBM$, sinus fit $= r$ negativus, cofinum iterum $= o$; crescente adhuc arcu, sed ita ut minor sit circumferentia, sinus $4S_4F$ negativus esse perseverabit, at cofinus C_4F fiet positivus; tandem si arcus æquet circumferentiam, redit sinus $= o$, & cofinus positivus $= r$, quemadmodum in primo casu.

4. Quod si arcus accipiatur circumferentia major, qualis esset arcus $ANBMA S$ constans integra circumferentia aucta arcu quocumque AS , iidem illi sinus, ac cofinus SF , CF convenient, qui simplici arcui AS responderent ita, ut circumferentia illa addita nihil quantitatem sinuum, & cofinuum profusus immutet; quod inde etiam discere potes, quod paullo ante videris, sinum, & cofinum eandem pertinere tum ad arcum nullum tum ad integram circumferentiam. Idem sentiendum omnino est si arcui AS duæ, tres, vel infinitæ etiam addantur circumferentiæ; idem etiam de lineis reliquis intelligendum tangente scilicet, cotangente &c., quæ eadem sunt tum relate ad simplicem arcum AS , tum ad illius summam, & quarumlibet circumferentiarum.

5. Si vero arcus negativus acciperetur quadrante minor, uti esset arcus A_4S , sinus illi respondens erit $4S_4F$ negativus, & cofinus positivus C_4F . Hinc videte est sinum negativum cum cofin positivo ad duplicem arcum pertinere, nempe & ad arcum positivum tribus quadrantibus majorem, & ad arcum negativum, qui minor quadrante sit. Si arcus negativus quadrantem superet, sed minor sit semiperipheria, ut A_3S , sinus, & cofinus sunt negativi; adeoque sinus, & cofinus negativi spectant & ad arcum positivum semicircumferentia majorem sed minorem tribus quadrantibus, & ad arcum negativum, quem modo

assumptus. Si arcus negativus sit major duobus quadrantibus, sed minor tribus, veluti $A B \pm S$ sinus erit positivus, cosinus negativus, prout contingit in arcu positivo; qui sit major quadrante, sed minor semicircumferentia. Tandem quum arcus negativus major est tribus quadrantibus, quemadmodum arcus $A B \pm S$; tunc sinus, & cosinus positivi erunt, quod idem de positivo arcu, qui quadrante minor sit, diximus paulo ante. Constat igitur, quamlibet sinuum, & cosinum combinationem ad duos diversos arcus pertinere alterum positivum, negativum alteram; nos tamen in praxi, quotiescumque sinus erit positivus, quicumque tandem fuerit cosinus, positivos arcus accipiemus; & contra negativos, quum sinus erit negativus; ita enim arcus semper habebimus semicircumferentia minores; quare ab arcubus ad angulos transitu facto, erunt hi semper duobus rectis minores, quod necessarium est, ut sinuum canones possint triangulis applicari.

6. Quod spectat ad tangentes, & cotangentes, si arcus $A \pm S$ fuerit positivus quadrante minor, ejus tangens $A \pm P$; & cotangens $N \pm Q$ ambæ sunt positivæ; Si arcus fuerit quadrante major, sed minor semicircumferentia, tangens, & cotangens sunt negativæ. Mirum id fortasse videbitur tironibus; at si apud se recte statuunt, tangentem arcus semper esse debere in linea $1 P \pm P$, quæ circum tangit in puncto, unde arcus ipse originem ducit, & eam puncto P definiti, quod est intersectio radii producti, & lineæ $1 P \pm P$, admiratio omnis evanescet. Etenim evidens omnino est, radium $C \pm S$ productum ex parte Q lineæ $A \pm P$ occurrere non posse; futurum autem ut eam fecerit, si ex opposita parte, producatur, unde in casu tangens $A \pm P$ fit negativa. Quoad cotangentem, quæ semper accipienda est in linea $1 Q \pm Q$ tangente circum in puncto, quod ab initio arcus quadrante distat, res alia explicatione non indiget. Si arcus fuerit major duobus quadrantibus, sed minor tribus minor, tangens, & cotangens fient iterum positivæ, quod simili, ac antea, ratiocinio potest ostendi. Denique tangens, & cotangens sunt iterum negativæ, si arcus tribus quadrantibus sit major, sed minor circumferentia.

7. Si vero accipiantur arcus $A \pm S$ negativus, ejus tangens, & cotangens sunt negativæ; arcus negativo $A \pm S$ respondebunt tangens, & cotangens positivæ; in arcu negativo $A \pm S$ iterum fient negativæ; & positivæ in arcu negativo $A \pm S$. Patet igitur, tangentem, & cotangentem positivam quatuor arcus indicare, nempe arcum positivum quadrante minorem, arcum positivum majorem semicircumferentia, at minorem tribus quadrantibus, arcum negativum majorem quadrante, at minorem semicircumferentia, & arcum negativum majorem tribus quadrantibus, at minorem integra circumferentia. Totidem pariter designant arcus tangens, & cotangens negativa, iique erunt, quos antea nominavimus, si positivos arcus in negativos mutet, & contra. Inter primo tangentem, & cotangentem positivam, tangentem, & cotangentem negativam semper indicare posse arcus semicircumferentia minores, seu angulos minores duobus rectis. Inter secundo arcus, quibus tangens positiva sit, & cotangens negativa, vel viceversa, absurdos esse arcus, & impossibiles.

8. Notandum est etiam, unum, eundemque sinum FS , tangentem AP , & secantem CP ad arcum AS pertinere, & ad arcum SB , qui est illius complementum ad semicircumferentiam ASB . Hinc si quadrantem circuli, aut angulum rectum voces $= \omega$, & quemcumque arcum alium, aut angulum $= \mu$, quatuor arcus, seu anguli μ , $2\omega - \mu$, $2\omega + \mu$, $-\mu$ habent æquales sinus, vel sinus 0^c ; hoc tantum discrimine, quod aliquando absolute æquales sunt, aliquando, ut æqualitas habeatur, oportet alterum ex ipsis accipere negativum.

Exhi-

Exhibebimus ea, quæ in sinibus, & cosinibus accidunt, quum facile sit deinde rem omnem ad reliquas etiam lineas trigonometricas extendere. En igitur æqualitates: $Sc. 2\omega - \mu = Sc. \mu$; $Sc. -2\omega + \mu = Sc. -\mu = -Sc. \mu$; $Ge. -\mu = Ce. \mu$; $Ce. 2\omega - \mu = Ce. -2\omega + \mu = -Ce. \mu$.

9. Ex similitudine triangulorum FCS, ACP hæc descendunt, proportioner, sive analogiæ:

$$\begin{aligned} CF : FS :: CA : AP, \text{ idest } & Cc : Sc :: r : Tc \\ CF : CS :: CA : CP & Cc : r :: r : Sc \\ FS : AP :: CS : CP & Sc : Tc :: r : Sc \end{aligned}$$

Ex similitudine triangulorum ACP, NCQ est

$$\begin{aligned} AP : CA :: CN : NQ, \text{ idest } & Tc : r :: r : Crc \\ AC : CP :: NQ : QC & r : Sc :: Crc : Csc \\ AP : PC :: CN : CQ & Tc : Sc :: r : Csc \end{aligned}$$

Ex similitudine triangulorum FCS, NCQ habemus

$$\begin{aligned} FS : CF :: CN : NQ, \text{ idest } & Sc : Cc :: r : Crc \\ CF : CS :: NQ : QC & Cc : r :: r : Csc \\ FS : CS :: CN : CQ & Sc : r :: r : Csc \end{aligned}$$

Patet notum fieri sinum, si detur cosinus, & vicissim e cognito sinu haberi cosinum.

Etenim, cum radius sit constans, valebit semper $CS^2 = CF^2 + SF^2$, seu $r^2 = Cc^2 + Sc^2$.

10. Sed transeamus jam ad propositiones, quæ hujusce calculi tanquam bases existimandæ sunt. Propositio prima. Datus sinibus (Fig. 2.) PR, QF, & cosinibus CR, CF duorum arcuum PQ, QA, invenire PL sinum arcus AQP, qui æquat datorum summam. Sinus PR producat, donec secet radium CA productum, si opus est, in T. Vocato arcu PQ = π , arcu QA = μ , ob similitudinem triangulorum CFQ, CRT erit $Cc : \mu :: Sc : \pi :: Cc : \pi :: RT$;

ergo $RT = \frac{Sc. \mu. Cc. \pi}{Cc. \mu}$; & $PT = \frac{Sc. \mu. Cc. \pi + Sc. \pi. Cc. \mu}{Cc. \mu}$. At ex similitudine triangulorum CFQ, LPT eruitur, $r : Cc. \mu :: \frac{Sc. \mu. Cc. \pi + Sc. \pi. Cc. \mu}{Cc. \mu}$

:LP = $Sc. \pi + \mu$; ergo erit $Sc. \pi + \mu = \frac{Sc. \mu. Cc. \pi + Sc. \pi. Cc. \mu}{Cc. \mu}$, hoc est sinus summæ duorum arcuum μ, π æquat duo producta sinus μ in cosinum π , sinus π in cosinum μ , divisa per radium. Q. E. O.

11. Corollarium primum si duo arcus μ, π æquales sint, patet, sinum summæ fore $Sc. \mu + \pi = Sc. 2\mu = \frac{2 Sc. \mu. Cc. \mu}{r}$; hoc est quartam propor-

tionalem post radium, post cosinum arcus dimidii, & ejusdem sinum bis acceptum. Corollarium secundum. Invenio sinum summæ duorum; facile est invenire sinum summæ arcuum trium, quatuor ec.; Etenim invento sinu arcus, qui est summa duorum, eodem pacto invenietur sinus summæ hujus, & alterius arcus, & sic deinceps; quare patet, hoc problemate viam aperiri, qua sinum arcus multipli secundum quemcumque numerum reperiamus, de quo alibi erit sermo.

12. Propositio secunda. Datis finibus, & cofinibus duorum arcuum inæqualium PA, QA, invenire finem eorum differentiz PQ. Esto arcus PA = π , arcus QA = μ . Ob similia triangula CLO, CFQ est, $Cc.\mu : Sc.\mu :: Cc.\pi : LO = \frac{Sc.\mu.Cc.\pi}{Cc.\mu}$; Ergo PO = $\frac{Sc.\pi.Cc.\mu - Sc.\mu.Cc.\pi}{Cc.\mu}$; ex similitudine

vero triangulorum CFQ, ORP habemus, $r : Cc.\mu :: \frac{Sc.\pi.Cc.\mu - Sc.\mu.Cc.\pi}{Cc.\mu}$

$: PR = \overline{Sc.\pi - \mu}$; ergo $Sc.\overline{Sc.\pi - \mu} = \frac{Sc.\pi.Cc.\mu - Sc.\mu.Cc.\pi}{r}$. Q. E. O.

Si arcui positivo addendus esset arcus negativus, manifestum est summam in subtractionem transire; & contra subtractionem in summam, si arcus negativus e positivo sit detrahendus. Si igitur in superiore propositione arcus QA assumptus fuisset negativus, formula finis prodiiisset, quam in hac invenimus, & vicissim formula inventa in propositione hac, posito arcu QA negativo, esset ea, quam invenimus in antecedenti propositione.

13. Propositio tertia. Datis finibus QF, PR, & cofinibus CF, CR arcuum QA, PQ, invenire cofinum arcus PA, qui est eorum summa. Sint arcus QA = μ , PQ = π . Similia triangula CQF, POR dant $Cc.\mu : Sc.\mu :: Sc.\pi : RO = \frac{Sc.\pi.Sc.\pi}{Cc.\mu}$; ergo CO = $\frac{Cc.\pi.Cc.\mu - Sc.\mu.Sc.\pi}{Cc.\mu}$. Ex triangu-

lis autem CQF, COL est, $r : Cc.\mu :: \frac{Cc.\pi.Cc.\mu - Sc.\mu.Sc.\pi}{Cc.\mu} : CL = Cc.\overline{\pi + \mu} = \frac{Cc.\pi.Cc.\mu - Sc.\mu.Sc.\pi}{r}$. Q. E. O.

14. Si esset $\pi = \mu$, formula prodiret $\frac{Cc.\mu^2 - Sc.\mu^2}{r}$.

15. Idem ex propositione prima elici potuisset; verum calculo quodam trigonometrico opus fuisset, quem hic addendum in juvenum gratiam existimamus. Invenimus propositione prima $Sc.\overline{\mu + \pi} = \frac{Sc.\mu.Cc.\pi + Sc.\pi.Cc.\mu}{r}$;

ergo quadrando, $Sc.\overline{\mu + \pi}^2 = \frac{Sc.\mu^2.Cc.\pi^2 + 2Sc.\mu.Cc.\pi.Sc.\pi.Cc.\mu + Sc.\pi^2.Cc.\mu^2}{r^2}$

At $Cc.\overline{\mu + \pi}^2 = r^2 - Sc.\overline{\mu + \pi}^2$; ergo $Cc.\overline{\mu + \pi}^2 =$

$\frac{r^4 - Sc.\mu^2.Cc.\pi^2 - 2Sc.\mu.Cc.\pi.Sc.\pi.Cc.\mu - Sc.\pi^2.Cc.\mu^2}{r^2}$; Sed $r^2 = Cc.\mu^2$

$+ Sc.\mu^2$, $r^2 = Cc.\pi^2 + Sc.\pi^2$; ergo utramque æquationem invicem multiplicando erit, $r^4 = Cc.\mu^2.Cc.\pi^2 + Sc.\mu^2.Cc.\pi^2 + Cc.\mu^2.Sc.\pi^2 + Sc.\mu^2.Sc.\pi^2$,

quo r^4 valore substituto, erit, $Cc.\overline{\mu + \pi}^2 =$

=

$$\frac{Cc.\mu.Cc.\pi + Sc.\mu.Cc.\pi - 2Sc.\mu.Cc.\pi.Sc.\pi.Cc.\mu + Cc.\mu.Sc.\mu + Sc.\mu.Sc.\mu}{-Sc.\mu.Cc.\pi} \quad \frac{Sc.\mu.Sc.\mu + Cc.\mu.Sc.\mu}{-Cc.\mu.Sc.\pi}$$

deletis terminis, qui eliduntur, & radice extracta, erit tandem, $Cc.\mu + \pi = \frac{Cc.\mu.Cc.\pi - Sc.\mu.Sc.\pi}{r}$, ut antea inventum fuerat.

16. Propositio quarta. Datis finibus, & cosinibus duorum inæqualium arcuum PA, QA, invenire cosinum differentie PQ. Sint arcus QA = μ , PA = π . Ex similibus triangulis C Q F, P L T habemus

$$Cc.\mu : Sc.\mu :: Sc.\pi : L T = \frac{Sc.\mu.Sc.\pi}{Cc.\mu}; \text{ ergo } C T = \frac{Sc.\pi.Sc.\pi + Cc.\mu.Cc.\pi}{Cc.\mu}$$

Ex triangulis similibus C Q F, C T R habemus $r : Cc.\mu :: \frac{Sc.\mu.Sc.\pi + Cc.\mu.Cc.\pi}{Cc.\mu}$

$$: C R = Cc.\pi - \mu = \frac{Sc.\mu.Sc.\pi + Cc.\mu.Cc.\pi}{r}. \text{ Si arcus QA in superiori pro}$$

positione fuisset negativus, hanc eandem formulam cosinus summe inveniremus; quæ formula etiam ex propositione secunda erui potuisset, in qua sinus differentie arcuum quaesivimus. Calculus illi, quem paulo ante tradidimus, omnino fuisset similis; adeoque illum brevitate gratia prætermittimus.

17. Propositio quinta. Datis tangentibus (Fig. 3.) AD, SR duorum arcuum AS, SU, summæ tangentem AF invenire. Vocentur arcus A S = μ , S U = π . Ducatur DQ parallela ad SR; & ex puncto Q duæ perpendiculares demittantur QO ad CA, QL ad AD. Quoniam angulus CDQ rectus est, anguli duo simul QDL, CDA unum rectum efficiunt; atqui etiam duo anguli ACD, CDA unum rectum æquant; Ergo hi duo duobus illis æquales sunt; Ergo si detrahas utrinque angulum CDA communem, supererit angulus ACD æqualis angulo QDL. Igitur triangula CAD, QDL, quæ habent præterea angulos rectos in A, & L, similes erunt; adeoque CD : CA = CS : QD : DL; atqui ob similitudinem triangulorum CDQ, CSR est etiam CD : CS : QD : SR; ergo DL = SR, & AL = QO erit summa tangentium AD, SR. Habemus præterea CA : AD :: DL : LQ = AO, hoc est $r : Tc.\mu :: Tc.\pi : A O = \frac{Tc.\mu.Tc.\pi}{r}$; & ex similibus triangulis COQ, CAF est, $r = \frac{Tc.\mu.Tc.\pi}{r}$

$$: r : Tc.\mu + Tc.\pi : AF; \text{ ergo } AF = \frac{r.Tc.\mu + Tc.\pi}{r - Tc.\mu.Tc.\pi}. \text{ Q. E. O.}$$

18. Idem ex sinuum regulis jam traditis alio modo obtineri potuisset. Scimus enim esse, $r : Tc. : Cc. : Sc.$; adeoque $r : Tc.\mu + \pi : Cc.\mu + \pi : Sc.\mu + \pi$; Si igitur accipiamus $Cc.\mu + \pi$ inventum in propositione tertia, & $Sc.\mu + \pi$ ex propositione prima; & denominatorem communem efficiamus, erit, $r : Tc.\mu + \pi : Cc.\mu.Cc.\pi - Sc.\mu.Sc.\pi : Sc.\pi.Cc.\mu + Sc.\mu.Cc.\pi$; & divisio postremo

mis duobus terminis per $S c . \pi . C c . \mu$, erit $r : T c . \mu + \pi :: \frac{C c . \pi}{S c . \pi} - \frac{S c . \mu}{C c . \mu} : 1$
 $+ \frac{C c . \pi}{S c . \pi} \cdot \frac{S c . \mu}{C c . \mu}$, seu pro fractionibus his aliis substitutis, quas iis æquales ef-

se novimus, $r : T c . \mu + \pi :: \frac{r}{T c . \pi} - \frac{T c . \mu}{r} : 1 + \frac{r}{T c . \pi} \cdot \frac{r}{T c . \mu}$, erit tandem,
 $T c . \mu + \pi = \frac{r^2 \cdot T c . \mu + T c . \pi}{r^2 - T c . \mu \cdot T c . \pi}$; ut supra.

19. Si arcus μ , π æquales supponantur, patet, formulam esse, $\frac{r^2 \cdot 2 T c . \pi}{r^2 - T c . \pi^2}$

20. Propositio sexta. Datis AF, AD duorum inæqualium arcuum AU, AS tangentibus, tangentem SR differentiæ SU invenire. Sint arcus AU = π , AS = μ . E puncto D ducatur DQ, quæ angulum rectum faciat cum CD, quæque proinde tangenti quæsitæ sit parallela, & ex Q ducatur QL parallela ad CA. Erunt duo triangula CAD, QDL similia, & DL = SR, ut in propositione superiore probatum est. His positis, FL:DL est in ratione FL:LQ; ergo quia FL:LQ::FA:AC, & LQ:DL::AD:AC, erit, rationibus substitutis, FL:DL in ratione FA:AC; seu FL:DL::FA:AD, composita AD:AC

AC; & componendo, FD:DL=SR::FA:AD+AC:AC, sive $T c . \pi - T c . \mu : T c . \pi - \mu :: T c . \pi \cdot T c . \mu + r^2 : r^2$; ergo tandem, $T c . \pi - \mu = \frac{r^2 \cdot T c . \pi - T c . \mu}{r^2 + T c . \pi \cdot T c . \mu}$. Q. E. O. Idem elicitur ex sinuum, & cosinum doctrina; & calculus illi similis, quo usi sumus in propositione antecedente.

21. Propositio septima. Datis cotangentibus duorum arcuum μ , π cotangentem summæ invenire. Ex iis, quæ præmissimus N. 9., radius est medius proportionalis inter cotangentem, & tangentem; ergo $C c . \mu + \pi : r :: r : T c . \mu + \pi$; sed tangens arcus $\mu + \pi$ ex propositione quinta est $\frac{r^2 \cdot T c . \pi + T c . \mu}{r^2 - T c . \pi \cdot T c . \mu}$

ergo $C c . \mu + \pi : r :: r : \frac{r^2 \cdot T c . \pi + T c . \mu}{r^2 - T c . \pi \cdot T c . \mu}$; $r^2 - T c . \pi \cdot T c . \mu : r^2 - T c . \pi \cdot T c . \mu :: r^2 - T c . \pi \cdot T c . \mu : r^2 - T c . \pi \cdot T c . \mu$

& substituto loco tangentium ipsarum valore dato per radium, & cotangentem,

$C c . \pi + \mu : r :: r : \frac{r^2 \cdot C c . \pi + C c . \mu}{r^2 - C c . \pi \cdot C c . \mu}$; $C c . \pi + \mu : r :: r : \frac{r^2 \cdot C c . \pi + C c . \mu}{r^2 - C c . \pi \cdot C c . \mu}$; $C c . \pi + \mu : r :: r : \frac{r^2 \cdot C c . \pi + C c . \mu}{r^2 - C c . \pi \cdot C c . \mu}$; ergo $C c . \pi + C c . \mu$

C c c

$$Csc. \overline{\pi + \mu} = \frac{Csc. \pi. Csc. \mu - r^2}{Csc. \pi + Csc. \mu}. \text{ Q. E. O.}$$

22. Propositio octava. Datis cotangentibus duorum arcuum inæqualium π , μ , cotangentem differentiz invenire. Ex dictis in propositione superiore est $Csc. \overline{\pi - \mu} : r :: r : Tc. \overline{\pi - \mu}$; sed ex propositione sexta $Tc. \overline{\pi - \mu} = \frac{r^2 Tc. \pi - Tc. \mu}{r^2 + Tc. \pi. Tc. \mu}$; ergo erit $Csc. \overline{\pi - \mu} : r :: r : \frac{Tc. \pi - Tc. \mu}{r^2 + Tc. \pi. Tc. \mu}$:

$$r^2 + Tc. \pi. Tc. \mu : r. \overline{Tc. \pi - Tc. \mu} :: r^2 + \frac{r^4}{Csc. \pi. Csc. \mu} : r. \frac{r^2 - r^2}{Csc. \pi. Csc. \mu}$$

$$:: Csc. \pi. Csc. \mu + r^2 : r. Csc. \mu - Csc. \pi ; \text{ ergo } Csc. \overline{\pi - \mu} = \frac{Csc. \pi. Csc. \mu + r^2}{Csc. \mu - Csc. \pi}. \text{ Q. E. O.}$$

23. Propositio nona. Datis Tangentibus, & secantibus duorum arcuum π , μ , secantem summæ invenire. Sint arcus $AS = \mu$, $SU = \pi$. Ex similibus triangulis CSR , CDQ est $CS : CD :: CR : CQ = \frac{CD. CR}{CS}$; & ex aliis similibus COQ , CAF est $OQ : AF :: \frac{CD. CR}{CS} : CF$; idest $Tc. \mu + Tc. \pi$

$$(\text{prop. 5.}) : r^2. \frac{Tc. \mu + Tc. \pi}{r^2 - Tc. \pi. Tc. \mu} (\text{prop. 5.}) : \frac{Sec. \mu. Sec. \pi}{r} : Sec. \overline{\pi + \mu}$$

$$\text{igitur } Sec. \overline{\pi + \mu} = r. \frac{Sec. \mu. Sec. \pi}{r^2 - Tc. \pi. Tc. \mu}. \text{ Q. E. O. Patet hinc rationem.}$$

tangentis summæ arcuum ad ejus secantem esse, $r. Tc. \mu + Tc. \pi : Sec. \mu. Sec. \pi$.

24. Propositio decima. Datis tangentibus, & secantibus duorum arcuum, secantem differentiz invenire. Sint arcus $AS = \mu$, $AU = \pi$. Propter triangula similia CAF , QLF est $CQ = \frac{CF. AL}{AF}$; & propter alia similia triangula CDQ , CSR est $CD : CS :: \frac{CF. AL}{AF} : CR :: CF. AL : CR. AF$; idest

$$Sec. \mu : r :: Sec. \pi. (Tc. \mu + r^2. \frac{Tc. \pi - Tc. \mu}{r^2 + Tc. \pi. Tc. \mu}) (\text{prop. 5. \& 6.}) : Sec. \overline{\pi - \mu}$$

$$Tc. \pi :: Sec. \pi. \frac{Tc. \pi. Tc. \mu + r^2}{r^2 + Tc. \pi. Tc. \mu} : Sec. \overline{\pi - \mu}. Tc. \pi ; \text{ \& his duobus ter-}$$

minis divis per $Tc. \pi$, loco $\overline{Tc. \mu + r^2}$ substituto $\overline{Sec. \mu}$, est $Sec. \mu : r ::$

$$\frac{\text{Sec.}\pi \cdot \text{Sec.}\mu}{r^2 + Tc.\pi \cdot Tc.\mu} : \text{Sec.}\pi - \mu; \text{ ergo } \text{Sec.}\pi - \mu = r \cdot \frac{\text{Sec.}\pi \cdot \text{Sec.}\mu}{r^2 + Tc.\pi \cdot Tc.\mu}. \text{ Q. E. O.}$$

Ex hac formula, & ex illa, qua tangens arcuum differentiz exprimitur, constat secantem differentiz esse ad eisdem tangentem: $\text{Sec.}\pi \cdot \text{Sec.}\mu : r \cdot Tc.\pi - Tc.\mu$. Si ex his autem formulis secantium summæ, aut differentiz arcuum tangentes eliminare volumus, id facillimum est, quum habeamus semper

$$Tc = \sqrt{\text{Sec}^2 - r^2}.$$

25. Propositio undecima. Datis cofecantibus & cotangentibus arcuum π, μ , summæ cofecantem invenire. Ex Numero 9 est $Csc : r :: Sec : Tc$; ergo $Csc.\pi + \mu : r :: Sec.\pi + \mu : Tc.\pi + \mu$; $Sec.\mu \cdot Sec.\pi : r \cdot Tc.\mu + Tc.\pi$ (prop. 9); unde $Csc.\pi + \mu = \frac{\text{Sec.}\mu \cdot \text{Sec.}\pi}{Tc.\mu + Tc.\pi}$; sed $Sec = \frac{Tc \cdot Csc}{r}$; &

$$Tc = \frac{r^2}{Csc}; \text{ ergo substitutionibus factis erit, } Csc.\pi + \mu = \frac{Csc.\pi \cdot Csc.\mu}{Csc.\pi + Csc.\mu}.$$

Q. E. O.

26. Propositio duodecima. Datis cofecantibus, & cotangentibus duorum arcuum π, μ inæqualium, differentiz cofecantem invenire. Ex eodem Numero 9 $Csc.\pi - \mu : r :: Sec.\pi - \mu : Tc.\pi - \mu$; $Sec.\pi \cdot Sec.\mu : r \cdot Tc.\pi - Tc.\mu$

(prop. 10.); ergo erit $Csc.\pi - \mu = \frac{\text{Sec.}\pi \cdot \text{Sec.}\mu}{Tc.\pi - Tc.\mu}$; factisque, ut in propositione antecedente substitutionibus $Csc.\pi - \mu = \frac{Csc.\pi \cdot Csc.\mu}{Csc.\pi - Csc.\mu}$. Q. E.

O. Quum sit $Csc = \frac{r}{\sqrt{\text{Sec}^2 - r^2}}$ poterunt cofecantes summæ, & differentiz arcuum per solas cofecantes cognitæ obtineri.

27. Propositio decimatertia. Anguli cujuscumque sinus est ad summam cofinus & radii, ut tangens dimidii anguli ad radium. Descripto semicirculo ADB, cujus centrum C, sit angulus (Fig. 4) ACD = e , sinus illius DE, tangens AO, & cofinus EC. Duæta recta DB, erit angulus DBA = $\frac{e}{2}$, huic DB si ex centro parallelam facias CF, erit angulus ACF = DBA = $\frac{e}{2}$, ejuisque tangens AF. At ex similitudine triangulorum DEB, FCA est DE : EB :: FA : AC; ergo $Sec.e : Cc.e + r :: Tc.\frac{e}{2} : r$. Q. E. D.

28. Hoc etiam modo propositio potuisset ostendi. Ex corollariis prop.

$$1., 3. \text{ est } Sec.e = 2 \frac{Sc.\frac{e}{2} \cdot Cc.\frac{e}{2}}{r}, Cc.e = \frac{Cc.\frac{e}{2} - Sc.\frac{e}{2}}{r}; \text{ ergo } Sec.e :$$

$$r + Cc.s : : 2Sc.\frac{e}{2}.Cc.\frac{e}{2} : r^2 + Cc.\frac{e}{2} - Sc.\frac{e}{2}; \text{ At } r^2 - Sc.\frac{e}{2} = Cc.\frac{e}{2};$$

$$\text{ergo } Sc.e : r + Cc.s : : 2Sc.\frac{e}{2}.Cc.\frac{e}{2} : 2.Cc.\frac{e}{2} : Sc.\frac{e}{2} : Cc.\frac{e}{2} : Tc.\frac{e}{2} : r.$$

Extendamus propositionem, & demonstremus, sinum anguli esse ad differentiam sinus totius & cofinus, ut sinus totus ad tangentem dimidii. Ex similitudine triangulorum FAC, ADE erit, DE:AE::CA:AF; idest Sc.e:r - Cc.s

$$:: r:Tc.\frac{e}{2}. \text{ Aliter } Sc.e:r - Cc.s : : 2Sc.\frac{e}{2}.Cc.\frac{e}{2} : r^2 - Cc.\frac{e}{2} + Sc.\frac{e}{2}$$

$$= 2.Sc.\frac{e}{2} : Cc.\frac{e}{2} : Sc.\frac{e}{2} : r:Tc.\frac{e}{2}.$$

29. Corollarium. Ex formulis hujus propositionis alias deducamus, quas saepe utiles esse, experti sumus. Quoniam $Sc.e:Cc.s+r::Tc.\frac{e}{2}:r$, erit etiam $Sc.e:Cc.s+r::r:Csc.\frac{e}{2}$; est enim radius medius proportionalis inter tangentem, & cotangentem; atqui vocato $=\omega$ quadrante circuli $Csc.\frac{e}{2} = Tc.\omega - \frac{e}{2} = Tc.\omega + \frac{\omega - e}{2}$; ergo vocato $\omega - e = \phi$; quum constet $Sc.e = Cc.\phi$, & $Cc.s = Sc.\phi$, erit $Cc.\phi : Sc.\phi + r :: Tc.\omega + \frac{\phi}{2}$. Similiter quum sit $Sc.e:r - Cc.s::r:Tc.\frac{e}{2}$, erit $Sc.e:r - Cc.s:Csc.\frac{e}{2} = Tc.\omega - \frac{e}{2} = Tc.\omega + \frac{\omega - e}{2}$; r; vocatoque ut antea $\omega - e = \phi$, fiet $Cc.\phi : r - Sc.\phi :: Tc.\omega + \frac{\phi}{2} : r$. His, quae veluti fundamenta sunt calculi trigonometrici, praemissis gradum jam faciamus ad ea Theoremata demonstranda, quae ad triangulorum doctrinam pertinent.

30. Theorema primum. In quolibet triangulo (Fig. 5.) ABC latera sunt inter se ut sinus angulorum oppositorum. Per tria puncta A, B, C describatur circulus, cujus centrum sit Q. Ex centro ducatur radius QA, & QM perpendicularis ad latus AC. Quoniam recta QM bisariam dividit arcum AC, erit angulus AQM aequalis angulo ABC (Encl. lib. 3.), & AR dimidium lateris AC; atqui AR est sinus anguli AQR = ABC;posito sinu toto QA; Ergo AC est duplum sinus anguli oppositi B. Idem potest de aliis lateribus AB, BC demonstrari; ergo erunt latera omnia dupla sinus angulorum oppositorum; adeoque inter se ut ipsi sinns.

31. Si angulus ABC esset obtusus, producat (Fig. 6.) RQ in M. Arcus AMC erit bisectus in M; ergo angulus AQM = ABC, & AR ut antea dimidium lateris AC; sed AR est sinus anguli AQM; ergo etiam in hac hypothesis est latus AC duplum sinus anguli oppositi B. Q. E. D.

32. Theorema secundum. In quocumque triangulo si latus unum AC (Fig. 7.)

bifariam dividatur in M, & ex opposito angulo B ducatur BM, erit angulus B in duos divisus ABM, quem vocamus $=\mu$, CBM $=\pi$, quorum sinus erunt inter se ut sinus angulorum A, C. Demonstratio; Ex precedenti theoremate est $S c. \pi : S c. C :: CM : BM$, $S c. \mu : S c. A :: AM : BM$; sed ex hypothesi $CM = AM$; ergo $S c. \pi : S c. C :: S c. \mu : S c. A$, & convertendo $S c. \pi : S c. \mu :: S c. C : S c. A$. Q. E. D. Erit igitur etiam $S c. \pi : S c. \mu :: BA : BC$.

33. Theorema tertium. In quolibet triangulo ABC ducta, ut supra, BM, & præterea qualibet ducta recta QN, quæ BM secet in X, erit $QX : XN :: BC : QB : AB : BN$. Dem. Fiant hæc denominationes. Angulus ABM $=\mu$, CBM $=\pi$, BQN $=\epsilon$, QNB $=\lambda$. Constat esse

$QX : XN$ in ratione $QX : X B :: S c. \mu : S c. \epsilon$ (ex Theor. primo), seu

composita $X B : X N :: S c. \lambda : S c. \pi$

$QX : XN$ in ratione $S c. \mu : S c. \pi$
composita $S c. \lambda : S c. \epsilon$;

at per Theorema superius $S c. \mu : S c. \pi :: BC : BA$, & per primum $S c. \lambda : S c. \epsilon :: QB : BN$; ergo erit

$QX : XN$ in ratione $BC : BA$
composita $QB : BN :: BC : QB : AB : BN$. Q. E. D.

34. Theorema quartum. In quocumque triangulo BAC summa duorum laterum BA, BC est ad eorum differentiam ut tangens semisummæ angulorum oppositorum C, A ad tangentem eorundem angulorum semidifferentiæ. Dem. Sit $BA = a$, $BC = b$, semisumma angulorum C, A $= e$, semidifferentia $= \lambda$. Erit igitur angulus major ex. gr. $C = e + \lambda$, minor $A = e - \lambda$; ergo per theorema primum $a : b :: S c. e + \lambda : S c. e - \lambda ::$ (prop. 1, 2) $S c. e. Cc. \lambda + S c. \lambda. Cc. e : S c. e. Cc. \lambda - S c. \lambda. Cc. e$, & opportune argumentando $a + b : a - b :: 2 S c. e.$

$Cc. \lambda : 2 S c. \lambda. Cc. e :: \frac{S c. e}{C c. e} : \frac{S c. \lambda}{C c. \lambda} :: T c. e : T c. \lambda$. Q. E. D.

35. Theorema quintum. Si producatür latus BA anguli (Fig. 8.) BAC, & ducta quacumque EF, fiat AD illi parallela, erit sinus anguli BAD ad sinum anguli DAC ut AE : AF. Dem. Quum AD, EF sint parallele, angulus BAD æquabit angulum F, & angulus DAC angulum AEF; atqui sinus angulorum F, & AEF (per theorema primum) sunt ut latera AE, AF; ergo sinus anguli BAD ad sinum anguli DAC :: AE : AF. Q. E. D. Si recta EF fecerit ipsum latus (Fig. 9.) AB non productum, ipsique sit AD, ut antea, parallela, adhuc tamen erit sinus anguli BAD ad sinum anguli CAD :: AE : AF. Etenim adhuc erit angulus AFE æqualis angulo BAD, & angulus FEA eundem habet sinum ac angulus FEC = DAC, cum quo duos rectos complet; ergo sinus anguli BAD ad sinum anguli CAD :: AE : AF.

36. Corollarium primum. Hinc habes, quomodo angulus ita dividi, vel augeri possit, ut partium sinus sint in data ratione. Sit angulus dividendus BAC: (Fig. 8.) cape AE quacumque, & produc BA ut sit AE : AF in data ratione; junge deinde EF, & ducta AD parallela ad EF, erit angulus BAC divisus, ut quærebatur. Si angulum BAC (Fig. 9.) ita auerere velis angulo BAD, ut hujus sinus habeat rationem datam ad sinum anguli CAD, seca AE, AF in eadem ratione data, puncta E, F junge recta EF, huic duc parallelam AD, & factum erit, quod postulas. Si autem quis angulum DAC (Fig. 8.) augere ita cupiat, ut sinus

sinus incrementi sit ad sinum anguli DAC in ratione pariter data; is si rectam quancumque EF ducat parallelam ad AD, & factis EA, AF in data ratione, producat AF versus B, problema sibi propositum solvit.

37. Corollarium secundum. In quocumque triangulo (Fig. 8. 9.) HAE ducta ex angulo A in basim linea AK, erit sinus anguli HAK ad sinum anguli KAE ut AE.HK:AH.KE. Etenim quum sinus angulorum sint ut AE, AF, erunt in ratione AE:AH; sed AH:AF::HK:KE
composita AH:AF::AE.HK:AH.KE
propter similia triangula HAK, HFE; ergo erunt
in ratione AE:AH::AE.HK:AH.KE.

38. Corollarium tertium. Si esset AE:AH::KE:HK, quoniam tunc AE.HK=AH.KE, anguli HAK, EAK vel æquales essent, ut in Figura octava; vel simul duos efficiant rectos; ut in Figura nona. Corollarium quartum. Si fuerit AE:AH::HK:KE, tunc patet sinus angulorum futuros ut $\overline{AE}^2 : \overline{AH}^2$
Corollarium quintum. Si tandem supponamus HK=KE, erunt sinus angulorum in ratione laterum AE, AH in figura octava. In figura nona fieri nunquam potest, ut sit HK=KE, nisi punctum K infinite distet; adeoque sit AK parallelæ ad EH; hoc tamen parallelismo supposito eadem est etiam in hoc casu sinuum ratio.

39. Problema primum. Datis duobus lateribus (Fig. 10.) AB, AC transversali ABC, & ab ipsis intercepto angulo, latus aliud invenire, & reliquos angulos una cum perpendicularibus BD, AE, & interceptis BE, EC, CD, DA. Vocentur latera AB=a, AC=b, & angulus BAC=ε. Ex primo

theoremate est r:CC.ε::a:AD= $\frac{a.Cc.ε}{r}$; r:Sc.ε::a:BD= $\frac{a.Sc.ε}{r}$; ergo tri-

anguli area = $\frac{BD.AC}{2} = \frac{ab.Sc.ε}{2r}$; & DC = $b - \frac{a.Cc.ε}{r}$. Iam vero ex Eu-

clide (lib. 2, prop. 13.) est $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - 2AC.AD + \overline{AC}^2$; igitur \overline{BC}^2

$$= a^2 - \frac{2ab.Cc.ε}{r} + b^2; \text{ id est } BC = \sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.ε}{r} + b^2}.$$

Animadvertendum est diligenter, hanc radicalem formulam basim trianguli indicare, cujus latera sunt a, & b, quæ angulum ε efficiunt; id enim ad elegantissimas geometricas constructiones conferre plurimum potest.

40. Anguli B, C hoc modo inveniuntur. Fiat BC:AB::Sc.BAC:Sc.ACB,

$$\text{id est } \sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.ε}{r} + b^2} : a :: Sc.ε : Sc.ACB = \frac{a.Sc.ε}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.ε}{r} + b^2}}$$

Eodem pacto inveniatur Sc.ABC = $\frac{b.Sc.ε}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.ε}{r} + b^2}}$. Ut nota fiat

perpendicularis AE, sufficit animadvertere AE.BC=BD.AC; igitur AE

$$\frac{BD \cdot AC}{BC} = \frac{ab \cdot Sc.e}{r \sqrt{a^2 - \frac{2ab \cdot Cc.e}{r}} + b^2}.$$

41. Segmenta CE, BE determinantur habitis angulorum ACB, ABC cofinibus per sinus datos: ita erit $Cc \cdot \overline{ACB}^2 = r^2 - \frac{a^2 \cdot Sc.e^2}{a^2 - \frac{2ab \cdot Cc.e}{r} + b^2}$

$$= \frac{a^2 r^2 - 2abr \cdot Cc.e + b^2 r^2 - a^2 Sc.e^2}{a^2 - \frac{2ab \cdot Cc.e}{r} + b^2}; \text{ sed } r^2 - Sc.e^2 = Cc.e^2; \text{ ergo}$$

$$Cc \cdot \overline{ACB}^2 = \frac{a^2 \cdot Cc.e^2 - 2abr \cdot Cc.e + b^2 r^2}{a^2 - \frac{2ab \cdot Cc.e}{r} + b^2}; \& Cc \cdot \overline{ACB} = \frac{\sqrt{a^2 \cdot Cc.e^2 - 2abr \cdot Cc.e + b^2 r^2}}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab \cdot Cc.e}{r} + b^2}};$$

atqui est, $r : Cc \cdot \overline{ACB} :: AC : CE$; ergo $r : \frac{\sqrt{a^2 \cdot Cc.e^2 - 2abr \cdot Cc.e + b^2 r^2}}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab \cdot Cc.e}{r} + b^2}}$

$$:: b : CE = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 \cdot Cc.e^2 - 2abr \cdot Cc.e + b^2 r^2}}{r \cdot \sqrt{a^2 - \frac{2ab \cdot Cc.e}{r} + b^2}}. \text{ Eadem methodo poterit e-}$$

tiam segmentum BE inveniri.

42. Problema secundum. Datis duobus trianguli lateribus (Fig. 11.) BA, AC, & angulo ab ipsis non comprehenso B, angulos A, C, & basim BC invenire. Sit BA = a, AC = b, & angulus ABC = e; Igitur $b : a :: Sc.e :$

$$Sc.C = \frac{a \cdot Sc.e}{b}, \text{ adeoque } Cc.C = \sqrt{r^2 - \frac{a^2 \cdot Sc.e^2}{b^2}}. \text{ Nunc demittatur per-}$$

pendicularis AE, & fiat $r : Sc.e :: a : AE = \frac{a \cdot Sc.e}{r}$; & $r : Cc.e :: a : BE$

$$= \frac{a \cdot Cc.e}{r}; \& r : Cc.C = \sqrt{r^2 - \frac{a^2 \cdot Sc.e^2}{b^2}} :: b : CE = \frac{b}{r} \sqrt{r^2 - \frac{a^2 \cdot Sc.e^2}{b^2}};$$

$$\text{ergo erit } BC = \frac{a \cdot Cc.e}{r} \pm \frac{b}{r} \sqrt{r^2 - \frac{a^2 \cdot Sc.e^2}{b^2}}. \text{ Signum illud duplex,}$$

quo quantitas radicalis afficitur, duplex triangulum indicat, & basim duplicem. Et revera si ductam intelligas $A c$, & utrumque triangulum $A B C$, $A B c$ attente inspicias, utrumque iisdem præditum conditionibus invenies; igitur quoad primum triangulum, ut patet, erit accipienda quantitas radicalis positiva, & erit angulus $A C B$ acutus; negativa quoad alterum, cujus angulus $A c B$ erit obtusus.

43. Ut angulum A obtineamus, fiat $A C : B C :: S c . e : S c . A$; idest

$$b : \frac{a . C c . e}{r} \pm \frac{b}{r} \sqrt{r^2 - \frac{a^2 . S c . e^2}{b^2}} :: S c . e : S c . A$$

$$= \frac{a . C c . e . S c . e \pm b . S c . e . \sqrt{r^2 - \frac{a^2 . S c . e^2}{b^2}}}{r b}$$

44. Problema tertium. Datis lateribus trianguli $A B C$, reliqua omnia invenire. Fiat $A B = a$, $A C = b$, $B C = c$, angulus $B = \lambda$, $A = \mu$, $C = \tau$. Erit $b : a :: S c . \lambda : S c . \tau = \frac{a . S c . \lambda}{b}$; $b : c :: S c . \lambda : S c . \mu = \frac{c . S c . \lambda}{b}$; ergo

$$C c . \tau = \sqrt{r^2 - \frac{a^2 . S c . \lambda^2}{b^2}}; \text{ \& } C c . \mu = \sqrt{r^2 - \frac{c^2 . S c . \lambda^2}{b^2}}; \text{ at } S c . \tau + \mu = S c . \lambda,$$

quia angulus λ est complementum ad duos rectos angulorum μ, τ ; ergo $S c . \lambda$

$$= \frac{S c . \tau . C c . \mu + S c . \mu . C c . \tau}{r} \text{ (prop. 1.)} = \frac{a . S c . \lambda}{r b} . \sqrt{r^2 - \frac{c^2 . S c . \lambda^2}{b^2}}$$

$$+ \frac{c . S c . \lambda}{r b} . \sqrt{r^2 - \frac{a^2 . S c . \lambda^2}{b^2}}; \text{ ergo } r b = a . \sqrt{r^2 - \frac{c^2 . S c . \lambda^2}{b^2}}$$

$$+ c . \sqrt{r^2 - \frac{a^2 . S c . \lambda^2}{b^2}}, \text{ \& quadrando } r^2 . b^2 - 2 r b a . \sqrt{r^2 - \frac{c^2 . S c . \lambda^2}{b^2}}$$

$$+ a^2 r^2 - \frac{a^2 c^2 . S c . \lambda^2}{b^2} = c^2 r^2 - \frac{a^2 c^2 . S c . \lambda^2}{b^2}, \text{ idest } r^2 . b^2 + a^2 - c^2$$

$$= 2 r b a . \sqrt{r^2 - \frac{c^2 . S c . \lambda^2}{b^2}}; \text{ \& quadrando iterum } r^4 . b^2 + a^2 - c^2$$

=

$$= 4r^4 b^2 a^2 - 4r^2 a^2 c^2 \cdot \overline{Sc.\lambda}^2, \text{ \& } \overline{Sc.\lambda}^2 = \frac{r^2}{4ac} \cdot 4b^2 a^2 - b^2 - a^2 + c^2 =$$

$$\frac{r^2}{4ac} \cdot 2b^2 a^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4, \text{ \& } Sc.\lambda =$$

$$\frac{r}{2ac} \cdot \sqrt{a+b+c \cdot a+b-c \cdot a-b+c \cdot -a+b+c}. \text{ Eadem methodo reliquorum angulorum sinus facile inveniuntur.}$$

45. Idem problema solvi etiam potest per cofinum formulas, iisdem retentis denominationibus. Etenim $Cc.\lambda = -Cc.\pi + \mu = \frac{-Cc.\pi \cdot Cc.\mu + Sc.\pi \cdot Sc.\mu}{r}$;

$$\text{\& substitutis valoribus antea inventis, } r.Cc.\lambda = -\sqrt{r^2 - \frac{c^2 \cdot Sc.\lambda^2}{b^2}}.$$

$$\sqrt{\frac{r^2 - a^2 \cdot Sc.\lambda^2}{b^2} + \frac{ac}{b^2} \cdot \overline{Sc.\lambda}^2}, \text{ \& quadrando } r^2 - c^2 \cdot \frac{Sc.\lambda^2}{b^2} \cdot r^2 - a^2 \cdot \frac{Sc.\lambda^2}{b^2} =$$

$$\frac{ac}{b^2} \cdot Sc.\lambda^2 - r.Cc.\lambda; \text{ \& } r^4 - \frac{r^2 a^2 \cdot Sc.\lambda^2}{b^2} - \frac{r^2 c^2 \cdot Sc.\lambda^2}{b^2}$$

$$+ \frac{a^2 c^2}{b^4} \cdot \overline{Sc.\lambda}^4 = \frac{a^2 c^2}{b^4} \cdot Sc.\lambda^4 - \frac{2rac}{b^2} \cdot \overline{Sc.\lambda}^2 \cdot Cc.\lambda + r.Cc.\lambda^2, \text{ sive}$$

$$r^4 - r^2 \cdot \overline{Cc.\lambda}^2 = \frac{r^2 \cdot Sc.\lambda^2}{b^2} \cdot a^2 + c^2 - \frac{2rac}{b^2} \cdot \overline{Sc.\lambda}^2 \cdot Cc.\lambda, \text{ idest}$$

$$r^2 \cdot \overline{Sc.\lambda}^2 = \frac{r^2 \cdot Sc.\lambda^2}{b^2} \cdot a^2 + c^2 - \frac{2rac}{b^2} \cdot \overline{Sc.\lambda}^2 \cdot Cc.\lambda; \text{ ergo}$$

$$r^2 b^2 = r^2 a^2 + c^2 - 2rac \cdot Cc.\lambda; \text{ demum } Cc.\lambda = \frac{r}{2ac} \cdot a^2 + c^2 - b^2. \text{ Ita}$$

etiam cofinus reliquorum angulorum poterunt inveniiri.

46. Hanc modo inivimus viam potius ut calculi trigonometrici praxis, & usus ostenderetur, quam ut angulos trianguli inveniremus, qui expeditius fane obtineri possunt. Etenim si ex puncto C in latus oppositum perpendicularis CD (Fig. 11.) ducatur, & eadem quæ antea denominationes retineantur, erit $r : Cc.\lambda :: c : BD = \frac{a \cdot Cc.\lambda}{r}$; at (Eucl. lib. 2. prop. 13.) $\overline{CA}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CB}^2$

$$- 2AB \cdot BD, \text{ seu } b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac \cdot Cc \cdot \lambda}{r}; \text{ ergo } Cc \cdot \lambda = \frac{r}{2ac} \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$$

$$\text{ut supra; eritque } BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, \text{ \& } DA = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}; \text{ \& } DC =$$

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2a} \cdot \frac{a+b-c}{2a} \cdot \frac{a-b+c}{2a} \cdot \frac{-a+b+c}{2a}}; \text{ adeoque area triangu-$$

$$\text{li} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2a} \cdot \frac{a+b-c}{2a} \cdot \frac{a-b+c}{2a} \cdot \frac{-a+b+c}{2a}}$$

47. Problema quartum. In triangulo ABC data duorum laterum AB, AC (Fig. 10.) summa, dato angulo ab ipsis lateribus non comprehenso B, & data CE intercepta inter angulum alium, & perpendicularem AE ductam ex vertice A in BC, invenire latera omnia, angulos A, C, & aream trianguli. Sint hae denominationes BA = x, CE = b, summa laterum data = a, angulus ABC = π. Erit r : Sc : π :: π : AE = $\frac{x \cdot Sc \cdot \pi}{r}$, AC = a - x; igitur

$$\frac{a-x}{r} = \frac{x^2 \cdot Sc \cdot \pi}{r^2} + b^2, \text{ seu } r^2 - Sc \cdot \pi \cdot x^2 - 2r^2 a x = r^2 \cdot b^2 - a^2; \text{ at}$$

$$r^2 - \sqrt{Sc \cdot \pi} = Cc \cdot \pi; \text{ ergo } x^2 - \frac{2r^2 a x}{Cc \cdot \pi} = \frac{r^2 b^2 - r^2 a^2}{Cc \cdot \pi}, \text{ completoque primi}$$

$$\text{membri quadrato } x^2 - \frac{2r^2 a}{Cc \cdot \pi} x + \frac{r^4 a^2}{Cc \cdot \pi^2} = \frac{r^4 a^2}{Cc \cdot \pi^2} + \frac{r^2 b^2 - r^2 a^2}{Cc \cdot \pi} =$$

$$\frac{a^2 \cdot Sc \cdot \pi}{Cc \cdot \pi^2} + \frac{r^2 b^2}{Cc \cdot \pi} \text{ (est enim scuti } Sc \cdot \pi = r^2 - Cc \cdot \pi, \text{ ita}$$

$$\frac{a^2 \cdot Sc \cdot \pi}{Cc \cdot \pi^2} = \frac{r^4 a^2}{Cc \cdot \pi^2} - \frac{r^2 a^2}{Cc \cdot \pi} = \frac{a^2 \cdot Tc \cdot \pi + r^2 b^2}{Cc \cdot \pi^2}, \text{ quum sit } \frac{r^2 \cdot Sc \cdot \pi}{Cc \cdot \pi^2} =$$

$$\frac{Tc \cdot \pi}{Cc \cdot \pi}; \text{ ergo erit } x = \frac{r^2 a}{Cc \cdot \pi} + \sqrt{\frac{a^2 \cdot Tc \cdot \pi + r^2 b^2}{Cc \cdot \pi^2}} = AB, \text{ \& } AC = a - x$$

$$= a - \frac{r^2 a}{Cc \cdot \pi} + \sqrt{\frac{a^2 \cdot Tc \cdot \pi + r^2 b^2}{Cc \cdot \pi^2}}, BC = \frac{r a}{Cc \cdot \pi} + \sqrt{\frac{a^2 \cdot Tc \cdot \pi + r^2 b^2}{Cc \cdot \pi^2}} + b.$$

48. Animadvertendum hic est ad solutionem problematis, prout initio propo-

positum fuit, oportere signo inferiori radicis uti; secus valde AC, negativus evaderet; adeoque, quum positivi, & negativi summa in subtractionem transeat, esset a equalis non summa, sed differentia laterum AB, AC. Hinc superioris radicis signum problemati inservit, in quo data laterum AB, AC differentia, reliqua, ut supra, querenda proponuntur; dummodo tamen valoris AC signa mutantur, & veluti positivus habeatur. lexum itaque id tibi animo fit, etiam in formulis subsequenibus problema hoc nostrum inferioris signum postulare.

49. Quum igitur nota sint nobis latera, adeoque etiam finium angulorum, qui ipsis opponuntur, ratio; quumque praeterea datus sit anguli B sinus, patet, reliquos angulos pariter notos esse. Valor autem perpendicularis AE

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{S e . \tau}{r} &= \frac{a . T c . \tau}{C c . \tau} + T c . \tau \cdot \frac{\sqrt{T c . \tau \cdot a + b^2}}{r} ; \text{ ergo area Trianguli } A B C \\ &= \frac{A E . B C}{2} = \frac{r a}{2 C c . \tau} + \frac{\sqrt{a^2 \cdot T c . \tau + r^2 b^2}}{2 r} + \frac{b}{2} \\ &= \frac{a . T c . \tau}{C c . \tau} + T c . \tau \cdot \frac{\sqrt{T c . \tau \cdot a + b^2}}{r} . \end{aligned}$$

50. Problema quintum. Data basi $BC = b$, reliquorum laterum summa $BA + AC = a$, & angulo $A = e$, reliqua invenire. Ducatur BD perpendicularis ad AC, sitque $AB = x$, erit $AC = a - x$. Habemus $r : Cc . e :: x :$

$AD = \frac{x . Cc . e}{r}$; sed $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AG . AD$; ergo b^2

$$= x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + \frac{2x^2 . Cc . e}{r} - \frac{2ax . Cc . e}{r} ; \text{ id est } x^2 - ax = \frac{x \cdot b^2 - a^2}{2 \cdot r + Cc . e}$$

ergo $x - \frac{a}{2} = \frac{r \cdot b^2 - a^2}{2 \cdot r + Cc . e} + \frac{ax}{a} = \frac{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc . e}{4 \cdot r + Cc . e}$; &

$x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc . e}}{r + Cc . e} = AB$; igitur $a - x =$

$\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc . e}}{r + Cc . e} = AC$. Ex his formulis inferitur duplex ra-

dicis signum non duplex indicare triangulum, sed idem inversum. Nos proinde deinceps signo tantum superiore utemur.

51. Anguli facillime reperiuntur his adhibitis proportionibus

$b : \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc . e}}{r + Cc . e} :: S e . e \text{ ad finem anguli } C =$

Sc

$$\frac{Sc.e}{2b} \cdot a + \sqrt{\frac{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc.e}{r + Cc.e}}. \text{ Similiter } b: \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc.e}{r + Cc.e}}$$

$$\therefore Sc.e \text{ ad finem anguli } B = \frac{Sc.e}{2b} \cdot a - \sqrt{\frac{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc.e}{r + Cc.e}}$$

52. Superest determinanda area trianguli. Inveniatur igitur normalis B D

$$\text{analogia } r:Sc.e::\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc.e}{r + Cc.e}}; BD =$$

$$\frac{Sc.e}{2r} \cdot a + \sqrt{\frac{2rb^2 - a^2 \cdot r - Cc.e}{r + Cc.e}}, \text{ quz ducta in } \frac{AC}{2} \text{ dabit aream triangula-}$$

$$\text{rem} = \frac{Sc.e}{8r} \cdot a^2 - \frac{2rb^2 + a^2 \cdot r - Cc.e}{r + Cc.e} = \frac{Sc.e \cdot aa - b^2}{4(r + Cc.e)}; \text{ sed } \frac{Sc.e}{r + Cc.e} =$$

$$Tc. \frac{1}{2} \cdot e \cdot \left(\text{prop. 13.} \right); \text{ ergo area} = \frac{Tc. \frac{1}{2} \cdot e \cdot a^2 - b^2}{4r}. \text{ Omnia igitur inven-}$$

ta sunt, quz erant invenienda.
53. Problema sextum. Data laterum BA, AC, BC summa, five trian-
guli ABC perimetro, cujus dimidium vocetur = a, dataque insuper triangu-
li area = ab, & angulo A = e, reliqua invenire. Ducta normali B D, po-
nimus BA = x. Jam vero est r:Sc.e::x:BD = $\frac{x \cdot Sc.e}{r}$, per quam lineam
fi duplum arez, nempe 2ab dividatur, prodibit latus AC; ergo AC =
 $\frac{2rab}{x \cdot Sc.e}$. Præterea est r:Cc.e::x:AD = $\frac{x \cdot Cc.e}{r}$; igitur DC = $\frac{2rab}{x \cdot Sc.e} -$

$$\frac{x \cdot Cc.e}{r}; \text{ sed } BC^2 = BD^2 + DC^2; \text{ ergo } BC =$$

$$\sqrt{\frac{x^2 \cdot Sc.e^2}{r^2} + \frac{x^2 \cdot Cc.e^2}{r^2} + \frac{4r^2 a^2 b^2}{x^2 \cdot Sc.e^2} - \frac{4ab \cdot Cc.e}{Sc.e}}; \text{ at } Sc.e^2 + Cc.e^2 =$$

$$r^2; \text{ ergo } BC = \sqrt{x^2 + \frac{4r^2 a^2 b^2}{x^2 \cdot Sc.e^2} - \frac{4ab \cdot Cc.e}{Sc.e}}. \text{ Igitur } BA + AC + BC = x$$

$$+ \frac{2rab}{x \cdot Sc.e} + \sqrt{x^2 + \frac{4r^2 a^2 b^2}{x^2 \cdot Sc.e^2} - \frac{4ab \cdot Cc.e}{Sc.e}} = 2a. \text{ Fiat } x + \frac{2rab}{x \cdot Sc.e} = x,$$

quæ summam exhibebit laterum BA + AC; & quadrando $x^2 + \frac{4r^2 a^2 b^2}{Sc.e} = x^2 - \frac{4rab}{Sc.e}$; factis substitutionibus multo est simplicior æquatio

$$x + \sqrt{x^2 - 4ab} \cdot \frac{r + Cc.e}{Sc.e} = 2a; \text{ at } \frac{r + Cc.e}{Sc.e} = \frac{r}{Tc.\frac{1}{2}e}; \text{ ergo}$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{4abr}{Tc.\frac{1}{2}e}} = 2a - x, \text{ \& } x^2 - \frac{4abr}{Tc.\frac{1}{2}e} = 4a^2 - 4ax + x^2; \text{ seu } x = a$$

$$+ \frac{rb}{Tc.\frac{1}{2}e} = BA + AC; \text{ adeoque latus } BC = a - \frac{rb}{Tc.\frac{1}{2}e}. \text{ Igitur proble-}$$

ma hoc ad antecedens redactum est, in quo ex data basi, & summa laterum reliquorum cum angulo ab ipsis intercepto, reliqua invenienda proponebantur. Hisce traditis videmus nobis, quantum satis est, principia calculi finium, & cofinium ante oculos posuisse, ejusque usum, qui sane in universa analysi mirus est, indicasse. Superest, ut juvenes, qui hæc addiscunt, etiam atque etiam hortemur, ut in eo se diligenter exercent; quandoquidem deinceps sæpe operam dabimus, ut hinc difficiliorum etiam problematum faciles, elegantisque solutiones obtineamus.

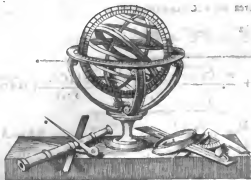


Fig. 2.

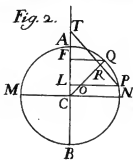


Fig. 4.

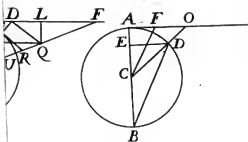


Fig. 6.

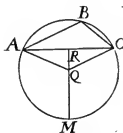


Fig. 8.

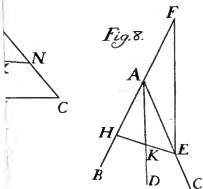


Fig. 10.

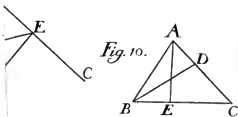
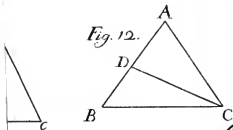
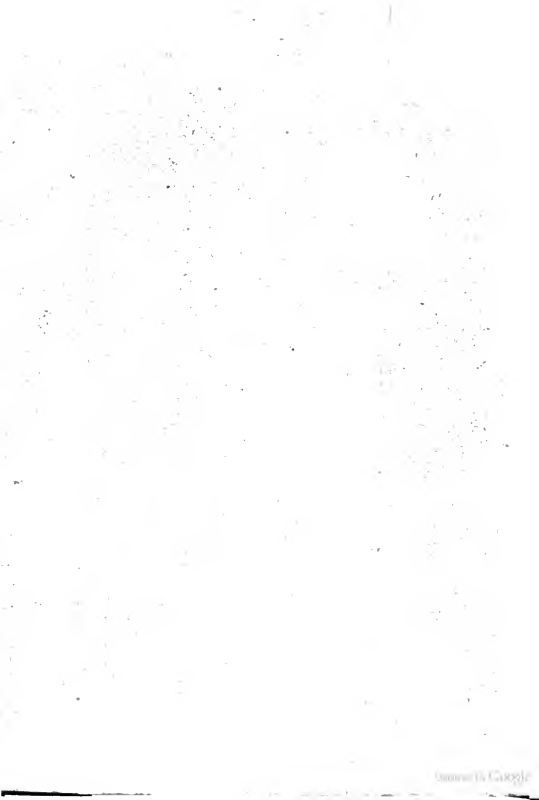


Fig. 12.





LIBER SECUNDUS

DE LINEIS, SEU LOCIS SECUNDI GRADUS

ET DE ÆQUATIONIBUS TERTII GRADUS, ET QUARTI.

CAPUT PRIMUM.

De variis linearum secundi gradus speciebus,
ac peculiariter de Parabola.

Nullam aliam primi gradus lineam esse præter rectam, superiori libro satis est demonstratum, ubi vidimus illius ordinis esse $my + nx + p = 0$ canonicam æquationem, in qua m, n, p vel positivæ, vel negativæ accipi possunt, vel etiam nullæ. Nunc ad lineas secundi gradus accedentes ante omnia canonicam earum æquationem exhibendam ducimus, & accurate perpendendam. Ea autem est $y^2 + lxy + mx^2 + q = 0$. In hac loci omnes hujus ordinis continentur, si illos excipias, ubi desit terminus

y^2 , de quibus postea. Ut curvæ per formulas indicatæ diversæ sint inter se, non sufficit immutatio coefficientium unius termini, aut plurium; fieri enim potest, ut inde oriatur tantum immutatio verticis abscissarum, aut earum linearum, curvæ interim specie eadem profus manente. Itaque ut variz linearum species determinantur, quæ a formula tradita exprimantur, aliquanto majore industria uti opus erit.

2. Sit (Fig. 1.) CED curva quælibet ab æquatione nostra expressa, in qua $AB = x$, $BC = y$. Facile est cognoscere duos esse oportere valores ordinatæ y , & hos in figura exhibere BC, BD. His positis, fiat $y + \frac{l x + n}{2} = u$, unde $y^2 + lxy = u^2 - \frac{l^2 x^2}{4} - \frac{l n x}{2} - \frac{n^2}{4}$. substitutione adhibita erit igitur for-

mula in hanc mutata $u^2 - \frac{l^2}{4} x^2 - \frac{l n}{2} x + q = 0$. Inspiciendum nunc est, ex hac formulæ conversione, quid novi oriatur in figura. Primo quidem ut valorem u inveniamus, addere oportet rectæ BC = y quantitatem $\frac{n}{2}$. Id fiet, si ex puncto A ducatur AF = $\frac{n}{2}$ parallela lineæ CB & ex F ducatur FG parallela AB;

ita

ita enim erit $CG = y + \frac{n}{2}$, existente $FG = AB = x$. Deinde huic inventæ

CG addenda est quantitas $\frac{l \cdot x}{2}$, quod hoc pacto præstabimus. Fiat $FI : IK :: a : l$, posita IK parallela CD , & per duo puncta F, K ducatur FKH ; erit igitur $GH = \frac{l \cdot x}{2}$, adeoque $CH = y + \frac{n}{2} + \frac{l \cdot x}{2} = u$, FG permanente $= x$.

3. At quoniam æquatio habetur inter duas $CH = u$, $FG = x$, quæ veræ coordinatæ non sunt, quum in lineam abscissarum non desinant, ideo querenda erit æquatio inter $CH = u$, & FH , quam vocabimus $= z$; supponamus itaque rationem $FI : FK$, quæ nota est ex constructione, esse ut $a : k$; ergo erit $x : z :: a : k$, & $x = \frac{2z}{k}$, qui valor in formula substitutus dabit

$$u^2 - \frac{l^2}{k^2} z^2 - \frac{l \cdot n \cdot z}{k} - \frac{n^2}{4} + \frac{4m}{k^2} z^2 + \frac{2p}{k} z + q = 0. \text{ Manifestum cuilibet esse potest, nos in hac æ-$$

quatione inveniendi nihil præstitisse aliud, quam generalem æquationem a linea abscissarum AB ad FH transferre. Hinc æquatio nuper inventa, licet in ea duo termini desint, non ideo universalis est minus, aut minus curvas omnes secundi gradus complectitur.

4. Ex æquatione constare potest, duos esse u valores inter se æquales alterum positivum, alterum negativum; ergo sicuti $CH = DH$, ita lineæ omnes parallele CD ad curvam hinc inde terminatæ bifariam secantur a linea FH , quæ ideo diameter appellatur. Hinc si ex vertice L ducatur linea parallela ad CD , ea erit tangens; si enim curvam in aliquo alio puncto secaret, jam non bifariam a diametro divideretur.

5. In ultimo inventa æquatione summa cura necesse est perpendere coefficientem secundi termini, seu quadrati z^2 ; ex eo scilicet integra pendet curvarum divisio. Coefficientis ille est $\frac{4m}{k^2} - \frac{l^2}{k^2}$. Jam vero tres casus esse possunt; nempe ut sit $m = \frac{l^2}{4}$, in qua hypotesi secundus terminus fit zero; deinde ut sit $m > \frac{l^2}{4}$, secundo termino positivo manente, aut tandem ut sit $m < \frac{l^2}{4}$, & secundus terminus per consequens negativus. Nunc mutata u in y , & x in x tres propositi casus tribus hinc formulis continentur.

$$y^2 - b x - c = 0 \text{ posita quantitate } 4m = l^2$$

$$y^2 + a x^2 - b x - c = 0 \text{ posita } -\frac{l^2}{k^2} + \frac{4m}{k^2} = a$$

$$y^2 - a x^2 - b x - c = 0 \text{ posita } \frac{l^2}{k^2} - \frac{4m}{k^2} = a$$

& in

& in omnibus assumpta $\frac{1n-2p}{k} = b$, & $\frac{n^2}{4} - q = c$. Species a semper positiva accipi debet, duz reliquæ b , c vel positivæ, vel negativæ prout lubet, vel etiam nullæ.

6. In prima e tribus formulis, si x in infinitum augeri intelligatur, & ambæ b , & x positivæ sint, aut ambæ negativæ, constat duos esse valores y reales & inter se æquales alterum positivum, alterum negativum, at si altera ex speciebus b , x sit positiva, & altera negativa, valores y fore imaginarios; ergo habebit curva duos tantum ramos in infinitum a se invicem recedentes. In secunda æquatione si x aut positiva, aut negativa fiat infinita, valores y semper prodeunt imaginarii; ergo curva nullum habet infinitum ramum, & determinatis limitibus continetur. In tertia tandem si x vel positiva vel negativa in infinitum augeatur, semper y duos habebit reales valores; curva ergo quatuor prædita erit ramis in infinitum abeuntibus.

7. Quoniam evidens omnino est; curvam, quæ duos habeat ramos infinitos, eandem non esse ac illam, quæ nullum hujusmodi ramum habet, & harum neutram cum ea convenire, quæ quatuor infinitis ramis gaudet, hinc tres inter se diversæ curvarum species oriuntur, quæ loca secundi gradus appellantur. Prima species eas curvas amplectitur, quæ duobus tantum ramis abeunt in infinitum, & Parabolæ vocantur: species altera est earum, quæ nullum infinitum habent ramum & Ellipses dicuntur: tertia & postrema continet Hyperbolas, eas scilicet curvas, quæ ramis quatuor tendunt in infinitum.

8. Verum ad generalem formulam paulisper revertamur. Ostensum est mo-

do, curvam esse parabolam, quoties sit $m = \frac{f^2}{4}$; at in hac hypothese termino-
mæ simul sumpti, in quibus ambarum indeterminatarum exponentium sum-
ma = 2, idest $y^2 + lxy + mx^2$, est perfectissimum quadratum, adeoque in
duos æquales factores resolvi potest; igitur quotiescumque hæc formula possit in

duos æquales factores resolvi, curva erit parabola. Si vero sit $m < \frac{f^2}{4}$ quantitas

positiva, quo in casu ellipsem exhiberi diximus, tunc $y^2 + lxy + mx^2$ in duos
reales factores resolvi non poterit; ergo quum ea formula in reales factores re-
solvi non poterit, curva semper erit ellipsis. Tandem formula $y^2 + lxy + mx^2$

in reales factores resolvitur, si fiat $m > \frac{f^2}{4}$ quantitas negativa, quam hypothe-
sim ad hyperbolam pertinere jam vidimus; ergo quum formula resolvi poterit
in duos reales factores inæquales, æquationis curva erit hyperbola. Hujusmo-
di animadversio efficit, ut in ipsa generali formula tres ipsas curvarum species
nullo possimus negotio deprehendere.

9. Sed jam de singularis curvis ut agamus, a parabola initium ducimus. E-
jus formula est igitur $y^2 - bx - c = 0$, seu translatis terminis $y^2 = bx + c = b$.
 $x + \frac{c}{b}$. Ponamus $x + \frac{c}{b} = z$, quam suppositionem nihil aliud præstare vi-

di-

dimus, quam ab uno ad aliud punctum abscissarum verticem transferre; erit igitur $y^2 = bx$, seu, si littera x pro z utamur $y^2 = bz$. Si (Fig. 2.) AF sit linea abscissarum, & earum vertex A, quum in eo ipso puncto A sit $x=0$, necesse est etiam eidem respondere $y=0$; at crescente x duos esse constat valores y æquales inter se positivum alterum, alterum negativum; veluti si fiat AF= x ; erit FD y positiva æqualis FE, quæ est y negativa, ita ut quo major sit abscissa, eo etiam magis ordinarum valor augeatur, & si illa infinita sumatur, hæc quoque evadant infinitæ, unde duos exoriri oportet ramos in infinitum abeuntes. Si vero x negativa accipiat ex A versus T, jam valor y erit imaginarius, igitur etiam curva erit imaginaria. Hæc in hypothese dicta sunt, in qua b (quam deinceps parametrum parabolæ vocabimus, quæque rectangulum efficit cum abscissa æquale quadrato ordinatæ) sit positiva. Etenim si negativa esset, ut formulam haberemus $y^2 = -bx$, tunc reales y valores responderent negativis abscissis, imaginarii autem positivis.

10. Recta AF cordas omnes parallelas DE bifariam secans diameter appellatur, & axis si præterea secet perpendiculariter. Punctum A est vertex diametri, seu axis, per quem si recta ducatur ordinatis parallela, ea erit tangens curvæ; si enim alio in puncto eam secaret, jam non omnes parallelæ DE bifariam dividerentur. Etsi angulus ordinarum quicumque esse possit, tamen ut magis elegantie demonstrationum, & simplicitati consulamus, eum hic rectum initio assumimus, ita ut diameter AF sit axis, & duo rami AD, AE ita in omnibus similes & æquales, ut, si alter alteri superimponatur, perfecte congruant.

11. His præmissis, sit recta quælibet DG, quæ cum axe angulum quemlibet efficiat $DGF = \mu$, ut æquationem queramus inter AG, DG. Sit AG = z , DG = u ; habebimus $r : Sc.\mu :: u : y = \frac{u.Sc.\mu}{r}$, & præterea $r : Cc.\mu :: u : FG = \frac{u.Cc.\mu}{r}$; ergo erit $x = z - \frac{u.Cc.\mu}{r}$, & inventis valoribus in formula $bx = y^2$ substitutis, nova exurget æquatio $bz - \frac{bu.Cc.\mu}{r} = \frac{u^2.Sc.\mu^2}{r^2}$, quam querabamus.

12. Suppone modo z , idest AG imminui paulatim, & eodem tempore lineam DN semper hinc inde curva definitam, motu sibi parallelo sequi punctum G; constat, quum facta fuerit $z=0$, DN transisse in AH. At ex æquatione, si fiat $x=0$, duos invenimus valores $u=0$, $u = -\frac{bu.Cc.\mu}{Sc.\mu}$; igitur $AH = \frac{br.Cc.u}{Sc.\mu}$. Signum negativum ostendit, lineam cadere in partes negativæ; u vero positiva evanuit, quod ex ipso motu lineæ satis ostenditur.

13. Sed æquationem nostram ita exponamus $\frac{r^2bz}{Sc.\mu} = u^2 + \frac{rbu.Cc.\mu}{Sc.\mu}$, & addi-

addito dimidii coefficientis quadrato $\frac{r^2 b}{Sc \cdot \mu} \cdot z + \frac{b \cdot Cc \cdot \mu}{4 \cdot Sc \cdot \mu} = u + \frac{rb \cdot Cc \cdot \mu}{2 \cdot Sc \cdot \mu}$

Fiat $u + \frac{rb \cdot Cc \cdot \mu}{2 \cdot Sc \cdot \mu} = y$, ut sit $\frac{r^2 b}{Sc \cdot \mu} \cdot z + \frac{b \cdot Cc \cdot \mu}{4 \cdot Sc \cdot \mu} = y^2$, & inspiciamus

quid oriatur novi ex hac substitutione. Ut y obtineatur, necesse est tantum addere quantitati $u = DG$ quantitatem $\frac{rb \cdot Cc \cdot \mu}{2 \cdot Sc \cdot \mu}$, quæ est dimidium rectæ AH,

igitur AH bifariam divisa in K, & ducta KL axi parallela, erunt KL = x , DL = y ; hoc ergo unum accidit; ut æquatio ad aliam abscissarum lineam transferatur priori parallelam.

14. Si fiat nunc hypothesis $y = 0$ invenimus $z = -\frac{b \cdot Cc \cdot \mu}{4 \cdot Sc \cdot \mu}$; igitur pro-

ducta LK donec in I curvam fecerit, erit KI = $\frac{b \cdot Cc \cdot \mu}{4 \cdot Sc \cdot \mu}$, signo — indicante, quantitatem illam ex parte x negativæ sumi oportere. Sit hypothesis altera

$z + \frac{b \cdot Cc \cdot \mu}{4 \cdot Sc \cdot \mu} = x$, in qua punctum immutatur originis abscissarum; oritur

æquatio $\frac{r^2 b}{Sc \cdot \mu} \cdot x = y^2$; & quoniam IK = $\frac{b \cdot Cc \cdot \mu}{4 \cdot Sc \cdot \mu}$, erit IL = x . Igitur

IL est diameter bifariam dividens quascumque DN, cujus vertex I, & cum qua ordinatæ angulum efficiunt = μ , parametro = $\frac{r^2 b}{Sc \cdot \mu}$, quam vocabimus

= m , ut sit æquatio $m x = y^2$ illi perfecte similis, quæ axem respicit.

15. Plura hic omitimus problemata, quæ addi possent, quæque ex præmissis calculo facillime solverentur. Duo tamen silentio præterire non licet, quippe quorum usus sit maximus in analyticis inquisitionibus. Dato axe AF, illius vertice A, & parametro = b , invenire diametrum, cum qua ordinatæ angulum continent = μ , ejusque parametrum. Ex A axis vertice ducatur in angulo HAF = μ linea AH, eaque fiat = $\frac{br \cdot Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu}$. Hac divisa bifariam

in K ducatur axi parallela KL, quæ erit diametri positio. Capiatur deinde

Q

KI

$KI = \frac{b \cdot Cc \cdot \mu^2}{4 \cdot Sc \cdot \mu}$, quo facto prodit necessario parameter $= \frac{br^2}{Sc \cdot \mu}$: & omnis,

que postulabatur, inventa sunt. Sicuti autem AH ex utraque axis parte duci potest, ita constat, duas esse problematis solutiones.

16. Problema alterum fit: data diametro IL, ejus vertice I, parametro $= m$ & angulo ordinarum $= \mu$, axem, axis verticem, ipsiusque parametrum invenire: Quoniam $\frac{r^2 b}{Sc \cdot \mu} = m$, erit $b = \frac{m \cdot Sc \cdot \mu^2}{r^2}$, unde axis parameter de-

terminatur. Hoc habito si abscindatur $IK = \frac{b \cdot Cc \cdot \mu^2}{4 \cdot Sc \cdot \mu}$, & in dato angulo

ducatur $KA = \frac{rb \cdot Cc \cdot \mu}{2 \cdot Sc \cdot \mu} = \frac{m \cdot Cc \cdot \mu^2}{2r}$, erit A vertex quaesitus, ex quo

demissa AF parallela ad IL, ea erit axis. Animadvertendum tamen est, punctum A verticem non esse axis, nisi angulus IKA sit acutus.

17. Quod ad tangentem spectat, hæc tantum addimus. In æquatione, quam supra invenimus inter lineas quascunque $AG = z$, & $DG = n$, idest in æquatione $\frac{r^2 bz}{Sc \cdot \mu} = n^2 + \frac{rbn \cdot Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu}$, duos valores n tunc facto calculo æquales esse

seprehendentur, quum erit $\frac{r^2 bz}{Sc \cdot \mu} + \frac{r^2 b^2 \cdot Cc \cdot \mu^2}{4 \cdot Sc \cdot \mu^4} = 0$, seu quum erit

$z = -\frac{b \cdot Cc \cdot \mu^2}{4 \cdot Sc \cdot \mu}$. Si ergo accipiatur $AT = \frac{b \cdot Cc \cdot \mu^2}{4 \cdot Sc \cdot \mu}$ (signum enim — indicat, eam quantitatem sumendam ex parte negativæ) & ducatur IT, hæc

parabolam tanget in puncto I, adeoque ordinatis DN erit parallela. Ex eodem puncto I ad axem ordinetur IS, voceturque $AS = x$, $IS = y$, $AT = z$,

unde fit $x = \frac{b \cdot Cc \cdot \mu^2}{4 \cdot Sc \cdot \mu}$, & $TS = x + z$. Quoniam ex similitudine triangulorum TIS, DGF, $x + z : y :: Cc \cdot \mu : Sc \cdot \mu$, erit $\frac{x+z}{y} = \frac{Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu}$; ergo

$$z = \frac{b \cdot x + z^2}{4y}; \text{ sed } bx = y^2; \text{ ergo } z = \frac{x + z^2}{4x}, \text{ seu } 4xz = x^2 + 2xz + z^2,$$

seu $x^2 - 2xz + z^2 = 0$, & radice extracta $x - z = 0$, unde $x = z$, five AT = AS. Hinc relate ad axem pulcherrima tangentis fit nota proprietas, nempe si ex quocumque puncto I curvæ tangens ducatur, quæ axi occurrat in T, & in axem ordinata IS demittatur, discimus, lineam TS semper a parabolæ vertice A bifariam dividi. Hinc etiam sequitur, quod si AR parabolam tangat in vertice A, & producat LI in R, recta ipsa AR a tangente IT bifariam secabitur in puncto Q. Etenim ex similibus triangularis est TA:AQ:: TS:SI; atqui TA est dimidium TS; ergo AQ erit dimidium SI=AR.

18. Hujusmodi proprietas ad quæcumque diametros pertinet. Sit AF diameter quædam, cum qua ordinatæ DF=y angulum faciant DFA = π, & æquatio illius $m \cdot x = y^2$. Ducatur linea quæcumque DG in angulo DGF = μ, unde erit angulus GDF = π - μ. Ut æquationem habeamus inter AG = s, & DG = u, fiat $y : m :: Sc. \mu : Sc. \pi$; ergo $y = \frac{u \cdot Sc. \mu}{Sc. \pi}$; iterum $u : FG ::$

$$Sc. \pi : Sc. \pi - \mu; \text{ ergo } FG = \frac{u \cdot Sc. \pi - \mu}{Sc. \pi}; \text{ ergo } x = z = \frac{u \cdot Sc. \pi - \mu}{Sc. \pi}.$$

Facta itaque valorum substitutione, erit æquatio $mz = \frac{m \cdot u \cdot Sc. \pi - \mu}{Sc. \pi} =$

$$\frac{u^2 \cdot Sc. \mu^2}{Sc. \pi^2}, \text{ seu } \frac{mz \cdot Sc. \pi}{Sc. \mu} = u^2 + \frac{m \cdot u \cdot Sc. \pi \cdot Sc. \pi - \mu}{Sc. \mu}. \text{ Ex hujus resolu-}$$

tione deprehendetur, valores u æquales esse non posse (quod sane requiritur, ut ordinata in tangentem transeat), nisi fit $\frac{m \cdot Sc. \pi}{Sc. \mu} z + \frac{m^2 \cdot Sc. \pi \cdot Sc. \pi - \mu}{4 \cdot Sc. \mu}$

$$= 0, \text{ five } z = -\frac{m \cdot Sc. \pi - \mu}{4 \cdot Sc. \mu}. \text{ Itaque si, ut signum - ostendit, accipiatur}$$

$$AT = \frac{m \cdot Sc. \pi - \mu}{4 \cdot Sc. \mu}, \text{ & ducatur TI, hæc curvam tanget in puncto I. Vocetur nunc TA = z, ut fit } s = \frac{m \cdot Sc. \pi - \mu}{4 \cdot Sc. \mu}, \text{ ordinata IS = y, abscissa AS}$$

= u. Habebimus quemadmodum antea $z + x : y :: Sc. \pi - \mu : Sc. \mu$; ergo

$$\frac{z+x}{y} = \frac{sc + p}{sc + \mu}, \text{ \& } z = \frac{m \cdot z+x}{4y} = \frac{z+x}{4x}, \text{ unde } z=x, \text{ \& reli}$$

qua fluent confectura.

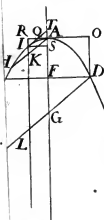
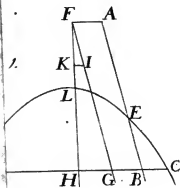
19. Posita AO tangente, & A vertice diametri AF cujuslibet, ducatur DO ipsi diametro parallela ex puncto D, ex quo pariter intelligamus ductam ordinatam DF. Quoniam demonstratum est rectangulum ex parametro, & abscissa aquare quadratum ordinatæ, verum erit pariter, rectangulum sub parametro, & recta DO aquare quadratum AO; Igitur vocatis, AO = x, OD = y, & parametro = m, erit x = my. Patet hanc æquationem ad parabolam pertinere, sed abscissas x in tangente accipendas, & ordinatas y esse re-
ctas diametro parallelas.

20. Hinc facile est demonstrare, æquationem generalissimam semper esse ad parabolam, quotiescumque desit in ea præter quadratum y² etiam rectangulum xy. His enim terminis deficientibus poterit ea æquatio semper ad hanc formam redigi x² + px + ny + q = 0; ergo addito & subtracto $\frac{p^2}{4}$, erit x² + px + $\frac{p^2}{4}$ + ny + q = 0. Si fiat x + $\frac{p}{2}$ = z, quæ substitutio immutat tantum

$$\text{verticem abscissarum, habebimus } z^2 + ny + q = 0, \text{ seu } z^2 = \frac{p^2}{4} - q - ny$$

= n. $\frac{p^2}{4n} - \frac{q}{n} - y$. Si ponamus iterum $\frac{p^2}{4n} - \frac{q}{n} - y = u$, quæ substitutio quæ nihil præstet aliud, quam ex nota recta abscindere y, æquationem ad lineam

abscissarum priori parallelam transferet; orietur x² = nu æquatio ad parabolam, in qua abscissæ z in tangente capiuntur, ordinatæ autem u parallelæ ducuntur diametro, cujus est parameter = n. Animadvertere hic plane oportet, curvam realem esse, si posita n positiva, n enim positiva accipiat, & contra si n sit negativa, curvam esse imaginariam. Viceversa si ponas n negativam, & n positivam accipias, curva erit imaginaria, si negativam realis. Hæc patent vel leviter consideranti. Hactenus de Parabola egimus omnium linearum secundi gradus facillima; ad alias nunc est transeundum, quæ majorem sane requirunt industria.



CAPUT SECUNDUM.

De Ellipsi.

1. **I**nficiamus jam formulam secundam (Cap. I. N. 5.) $y^2 + ax^2 - bx - c = 0$,
 five $\frac{y^2}{a} + x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} = 0$, seu $\frac{y^2}{a} + x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$,
 quam ad ellipsem pertinere diximus ramis infinitis carentem. Si transferamus o-
 riginem abscissarum facto $x - \frac{b}{2a} = z$, oritur æquatio simplicior $\frac{y^2}{a} + z^2$
 $-\frac{b^2}{4a^2} = 0$, seu $\frac{y^2}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - z^2$. Patet y adeoque etiam curvam imagina-
 $-\frac{c}{a} + \frac{c}{a}$
 riam necessario fore, quotiescumque $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$ fit quantitas negativa. Nunc ut
 æquationem ad commodiorem formam perducamus, fit b^2 loco $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$, &
 $\frac{b^2}{c^2}$ loco $\frac{1}{a}$, & x loco z : ita erit $y^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot \overline{b^2 - x^2}$.

2. Radice extracta est $y = \pm \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$, unde discimus, ordinatæ y
 duos esse valores positivum alium, alium negativum. (Fig. 1.) Si $x = 0$, erit
 $y = \pm c$; ergo posita linea abscissarum CF , & C earum initio, si accipiat
 linea $CB = Cb = c$ in quocumque tandem angulo cum linea abscissarum, pun-
 cta B , b ad curvam, de qua loquimur, pertinebunt. Si nunc supponamus x
 non amplius esse $= 0$, sed paulatim crescere, five id fiat positive, five negative,
 quod rem non immutat, quantitas $\frac{c}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$ minui quoque paulatim de-
 bet, atque adeo etiam y , donec fit prorsus nulla, quum facta est $x = b$. Igitur si
 in linea abscissarum secemus $CA = Ca = b$, puncta A , a erunt in curva, ul-
 tra quos limites y , & curva fieret imaginaria. Necessè est ergo, curvam hanc
 spatio finito contineri, atque in se ipsam redire, ut in figura apparet.

3. Linea Aa , quia rectas omnes parallelas ad Bb , & hinc inde ad curvam
 terminatas bifariam dividit, vocatur diameter, & eadem de causa diameter ap-
 pellabitur Bb , quæ pariter bifariam dividit parallelas omnes ad Aa . Rem ita se
 habere facillimum est ostendere; nam acceptis CF , & cf æqualibus, ex æquat-
 one constat eisdem utrique respondere valores y ; ergo $FD = fd$, atque dD
 æqualis, & parallela ad FF ; atqui FF bifariam dividitur a Bb in puncto C ;
 ergo

ergo etiam dD bifariam ab eadem dividetur in puncto O. Demonstrationem cuiuslibet alii parallelæ applicari posse, manifestum est. Dux diametri Aa, Bb, quarum quælibet bifariam dividit rectas ad aliam parallelas, dicuntur diametri conjugatæ. Sciendum est etiam, quotiescumque diameter usurpatur tamquam linea determinata, intelligi etiam hinc inde per curvæ interfectionem definitam, ejusque ita acceptæ dimidium semidiametrum appellari.

4. Si antecedentem æquationem in analogiam vertamus, erit $b^2 - x^2 : y^2 :: b^2 : c^2$; unde constat, sumpta quacumque CF = x esse rectangulum aFA : FD² :: CA² : CB². Tertia proportionalis post Aa, Bb, quam voco = e, dicitur parameter diametri Aa; unde habebimus $b^2 - x^2 : y^2 :: ab : e$. Eadem æquatio potest ita disponi $\frac{b^2}{c^2} \cdot c^2 - y^2 = x^2$; igitur $c^2 - y^2 : x^2 :: c^2 : b^2$, seu

rectang. bOB : OD² :: CB² : CA². Et inventa tertia proportionali post Bb,

Aa, quæ vocabitur parameter diametri Bb, erit $c^2 - y^2 : x^2 :: ac$ ad parametrum inventam. Ex his facile apparet, eandem æquationem, eisdemque proprietates ad utramque conjugatam diametrum pertinere. Nos deinceps parametris omiffis formulas tantum, quæ respiciunt diametros, retinebimus.

5. Quamvis autem coordinatarum angulus pro libito assumi possit, illum tamen, ut in parabola præstitimus, rectum accipiemus, quo in casu diametri axes appellantur. Ratio cur id faciamus est, quod recto angulo assumpto, & eadem demonstrantur, quæ etiam ad obliquos angulos pertinent, & nitidiores profuunt calculi. In hac hypothefi si duos ellipseos semiaxes CA, CB æquales

sint, quum sit $b = c$, erit etiam $b^2 - x^2 = y^2$; adeoque $b^2 = x^2 + y^2$, & $b = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Atqui si ducatur CD, ea erit $= \sqrt{x^2 + y^2}$; ergo CD = b = CA, quæ est circuli natura; ellipseos igitur, cujus duo axes æquales sint, est circulus.

6. Positis, ut antea CF = x, FD = y, CA = b, CB = c æquationem nostram $\frac{b^2 y^2}{c^2} = b^2 - x^2$ attente pertractemus. Ducatur recta DG, quæ cum axe

Aa efficiat angulum DGa = μ, sitque sinus totus = r. Vocabis CG = z, DG = u; habebimus $u : y :: r : Sc.μ$, unde $y = \frac{u \cdot Sc.μ}{r}$; pariter $r : Cc.μ :: n :$

$FG = \frac{n \cdot Cc.μ}{r}$; ergo $CG = z = x + \frac{n \cdot Cc.μ}{r}$, adeoque $x = z - \frac{n \cdot Cc.μ}{r}$.

Si valores isti x, y, quos modo invenimus, in æquatione substituantur, fiet illa

$$\frac{b^2 n^2 \overline{Sc.μ}^2}{c^2 r^2} = b^2 - z^2 + \frac{2zn \cdot Cc.μ}{r} - \frac{n^2 \overline{Cc.μ}^2}{r^2}; \text{ ergo}$$

$$n^2 \cdot \frac{b^2 \cdot Sc.u^2 + c^2 \cdot Cc.u^2}{r^2 c} - \frac{2zn \cdot Cc.\mu}{r} = b^2 - z^2.$$

7. Ex C, quod centrum ellipsos deinceps vocabimus, ducatur CM parallela DG, & supponamus punctum G successively moveri in linea CA, & DG motu sibi parallelo punctum G comitari, ita tamen ut semper hinc puncto G, illinc curva terminetur; patet quum G in C incidet, hoc est quum facta erit CG = z = 0, lineam DG incidere in CM; at in hac hypothefi æquatio ne-

$$stra ultima est $n^2 \cdot \frac{b^2 \cdot Sc.u^2 + c^2 \cdot Cc.\mu}{r^2 c} = b^2$; ergo$$

$$u = \frac{r c b}{\sqrt{b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2}} = CM, \text{ quam brevitatis gratia vocabimus}$$

$$= n. \text{ Ita æquatio erit } \frac{b^2}{n^2} \cdot n^2 - \frac{2zn \cdot Cc.\mu}{r} = b^2 - z^2. \text{ Nunc si fit } z = b$$

constat esse $\frac{b^2}{n^2} \cdot n^2 = \frac{2bn \cdot Cc.\mu}{r}$; unde duo oriuntur valores $n = 0$,

$$u = \frac{2n^3 \cdot Cc.\mu}{r b}; \text{ igitur si ex puncto A ducatur AH parallela DG, erit AH}$$

$$= \frac{2n^3 \cdot Cc.\mu}{r b}, \text{ quam dicemus } = 2p.$$

8. Nostra æquatio, si primus terminus a coefficiente liberetur, est

$$u^2 - \frac{2n^3}{b^2} \cdot \frac{Cc.\mu}{r} \cdot zn = n^2 - \frac{n^2 z^2}{b^2}, \text{ \& introducta } 2p \text{ in hanc formam mu-}$$

tabitur $u^2 - \frac{2p}{b} \cdot zn = n^2 - \frac{n^2}{b^2} \cdot z^2$, additoque dimidii coefficientis quadrato

$$\frac{p^2 z^2}{b^2} \text{ \& posita quantitate } u - \frac{pz}{b} = y, \text{ erit } y^2 = n^2 - z^2 \cdot \frac{n^2 - p^2}{b^2}, \text{ (hæc } y$$

tamen longe alia est ab ea, quæ usi sumus num. 1., quæque respondet lineis DF ad axem ordinatis: propterea vide ne eas invicem confundas). Eito igitur CKI

recta secans LG = $\frac{pz}{b}$, sequetur esse DL = y, cujus patet ex æquatione duos

esse valores, eisdemque inter se æquales, alterum scilicet positivum, negativum alterum; ergo lineæ omnes DN bifariam in L dividuntur, adeoque bifariam di-

vilia

vifa erit AH in K, & AK = p; quod etiam ex eo fit manifestum, quod, posita in æquatione $x = b$, supersit $y^2 = p^2$.

9. Ut autem æquationem ad lineam CI perducamus, vocetur angulus ICA = π , unde sequitur, esse angulum DLC = $\pi + \mu$. Ex his denominationibus est b : p : $Sc.\mu + \pi$: $Sc.\pi$; adeoque $p = \frac{b.Sc.\pi}{Sc.\mu + \pi}$. Præterea $Sc.\mu + \pi$: $Sc.\mu$: b : $Sc.\mu + \pi$

CK = $\frac{b.Sc.\mu}{Sc.\mu + \pi}$. Jam vero si vocetur CL = x , erit n : x : $Sc.\mu + \pi$: $Sc.\mu$,

ergo $x = \frac{x.Sc.\mu - \pi}{Sc.\mu}$, unde æquatio in hanc vertetur $y^2 = n^2 - \frac{x^2.Sc.\mu + \pi^2}{Sc.\mu^2}$.

$\frac{n^2 - p^2}{b^2}$. Facta $y = 0$ invenimus $x^2 = \frac{n^2 b^2.Sc.\mu^2}{n^2 - p^2.Sc.\mu + \pi^2}$; ergo

$x = \frac{nb.Sc.\mu}{Sc.\mu + \pi \sqrt{n^2 - p^2}} = CI$, qui valor vocetur = m , unde necessario

sequitur $\frac{Sc.\mu + \pi \cdot n^2 + p^2}{b^2.Sc.\mu^2} = \frac{n^2}{m^2}$. Æquatio erit $y^2 = n^2 - \frac{n^2 x^2}{m^2}$, seu

$\frac{m^2 y^2}{n^2} = m^2 - x^2$, illi perfecte similis, quam ad axes spectare jam vidimus;

quare necesse est, CI, CM duas esse semidiametros conjugatas.

10. Antequam progrediamur ulterius, queramus quinam sit angulus ICM a duabus diametris comprehensus. Ut id assequamur, animadvertendum est, duos esse valotes p numeris 7, & q inventos, nempe $p = \frac{n^2.Cc.\mu - b.Sc.\pi}{rb.Sc.\mu + \pi}$; qua-

propter quoniam supra invenimus $n^2 = \frac{r^2 c^2 b^2}{b^2.Sc.\mu^2 + c^2.Cc.\mu^2}$, æquationem

hanc obtinebimus $\frac{r^2 c^2 b^2.Cc.\mu}{rb.b^2.Sc.\mu^2 + c^2.Cc.\mu^2} = \frac{b.Sc.\pi}{Sc.\mu + \pi}$, hoc est

$r^2 c^2.Sc.\mu + \pi.Cc.\mu = Sc.\pi.b^2.Sc.\mu^2 + c^2.Cc.\mu^2$; at cap. 10. lib. 1. sci-
mus $r.Sc.\mu + \pi = Sc.\mu.Cc.\pi + Sc.\pi.Cc.\mu$; ergo $c^2.Sc.\mu.Cc.\mu.Cc.\pi$
+

+ $c^2 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2 \cdot Sc \cdot \pi = b^2 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 \cdot Sc \cdot \pi + c^2 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2 \cdot Sc \cdot \pi$, doletisque terminis, qui invicem eliduntur, & divisione facta per $Sc \cdot \mu$, erit $c^2 \cdot Cc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi = b^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi$; sed ex eodem cap. constat $Cc \cdot \mu \cdot Cc \cdot \pi - Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi = r \cdot Cc \cdot \mu + \pi$, seu $Cc \cdot \mu \cdot Cc \cdot \pi = r \cdot Cc \cdot \mu + \pi + Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi$; ergo substitutione facta $c^2 r \cdot Cc \cdot \mu + \pi + c^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi = b^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi$, seu

$$Cc \cdot \mu + \pi = \frac{b^2 - c^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi}{c^2 r}$$

11. Si $b = c$, qua in hypothesi ellipsis in circulum vertitur, cosinus anguli DLC = $\mu + \pi$ nullus est; atqui angulus, cujus cosinus sit nullus, est rectus; ergo in circulo diametri omnes axes erunt. Posito angulo DGC = μ acuto, si $b > c$, cosinus anguli DLC = $\mu + \pi$ erit positivus; ergo ipse angulus DLC acutus, adeoque MCL ejus ad duos rectos complementum erit obtusus. Contra accidit si $b < c$. Hinc sequitur ita sibi invicem occurrere diametros conjugatas, ut earum acutus angulus a majore axe dividatur, obtusus a minore. Idem inferitur etiam si angulus (Fig. 2.) DGC = μ sit obtusus. Etenim tunc angulus GCL = π erit negativus, & negativus pariter erit ejus sinus, angulus vero DLC æquabit $\mu - \pi$,

ergo erit formula $Cc \cdot \mu - \pi = - \left(\frac{b^2 - c^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi}{c^2 r} \right)$; Ideo si $b > c$, co-

sinus anguli DLC = $\mu - \pi$ est negativus; ergo angulus DLC obtusus, & MCL acutus, qui secatur ab axe majore CA; oppositum accideret, si $b < c$. Animadvertendum est (Fig. 1.) angulum π esse angulum, quem diameter CI efficit cum axe, & angulum μ esse angulum MCA, quam diameter conjugata MC facit cum axe eodem CA in partem alteram producto.

12. Ex æquationibus, quas superiori calculo obtinimus, facile alter angulorum μ , π ex altero inveniri poterit, suppositis axibus b , c . Aperite id constat ex æquatione $c^2 \cdot Cc \cdot \mu \cdot Cc \cdot \pi = b^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi$. At in hunc finem

commodius accidit, rem ad tangentes transferre: itaque quum sit $\frac{c^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot \pi}{b^2 \cdot Cc \cdot \mu \cdot Cc \cdot \pi}$

& ex (lib. 1. cap. 10.) $\frac{Sc}{Cc} = \frac{Tc}{r}$, necesse est esse $\frac{c^2}{b^2} = \frac{Tc \cdot \mu \cdot Tc \cdot \pi}{r^2}$, ubi

adnotandum, r per tangentem divisum cotangentem æquare. At si quis sinus, & cosinus retinere cuperet, idem assequi poterit, etsi minus aliquantulum ampliâ expressione, hoc scilicet pacto. Paulo ante exposita æquatio ad quadratum per-

ducta est $b^4 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 \cdot Sc \cdot \pi^2 = c^4 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2 \cdot Cc \cdot \pi^2 = c^4 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2 \cdot r^2 - Sc \cdot \pi^2$;

ergo $b^4 \cdot \overline{Sc \cdot \mu}^2 + c^4 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2 \cdot Sc \cdot \pi^2 = r^2 c^4 \cdot \overline{Cc \cdot \mu}^2$; ergo $Sc \cdot \pi =$

$\frac{rc^2.Cc.\mu}{\sqrt{b^2.Sc.\mu^2 + c^2.Cc.\mu^2}}$, unde dato angulo μ angulus π eruitur, & metho-
do eadem ex dato angulo π angulus μ invenietur.

13. At si dato angulo $\mu + \pi$, quem diametri duæ comprehendunt, quaerantur anguli μ, π , quos efficiunt cum axe b , hac via incedere possumus. Assumpta iterum æquatione $b^2.Sc.\mu.Sc.\pi = c^2.Cc.\mu.Cc.\pi$, animadvertimus

$$r.Cc.\mu + \pi = Cc.\mu.Cc.\pi - Sc.\mu.Sc.\pi, r.Cc.\mu - \pi = Cc.\mu.Cc.\pi + Sc.\mu.Sc.\pi. \text{ Harum æquationum facta additione, \& subtractione, oriuntur}$$

$$r.\frac{Cc.\mu + \pi + Cc.\mu - \pi}{2} = Cc.\mu.Cc.\pi, r.\frac{Cc.\mu - \pi - Cc.\mu + \pi}{2} =$$

$Sc.\mu.Sc.\pi$, qui valores in reassumpta æquatione substituti dabunt b^2 .

$$Cc.\mu - \pi - Cc.\mu + \pi = c^2.Cc.\mu - \pi + Cc.\mu + \pi; \text{ ergo } b^2 - c^2 =$$

$Cc.\mu - \pi = b^2 + c^2.Cc.\mu + \pi$. Hinc dato angulo $\mu + \pi$ habebitur angulus $\mu - \pi$; at summa data ac differentia, statim quantitates fiunt cognitæ; ergo cogniti fiant anguli μ, π . Si effet $c = b$ manifeste apparet futurum $Cc.\mu + \pi = 0$, unde deducitur angulus $\mu + \pi$ semper reclus; hinc impossibile est in hac hypothesis, in qua se omnes diametri conjugatæ orthogonaliter secant, angulos determinare, quos ipsæ efficiunt cum axe. Quod si $c > b$, quum $\mu + \pi$ recto major esse debeat, ejus cosinus erit negativus, adeoque positivus valor $Cc.\mu - \pi$. Hisce inspectis, quæ ad angulos pertinent, nonnullas diametrorum conjugatarum proprietates demonstrare opus est, quæ usum habent quam maximum.

14. Accipiantur iterum valores n, m & duplex valor p , scilicet

$$n = \frac{rbc}{\sqrt{b^2.Sc.\mu^2 + c^2.Cc.\mu^2}}, m = \frac{nb.Sc.\mu}{Sc.\mu + \pi.\sqrt{n^2 - p^2}},$$

$$p = \frac{n^2.Cc.\mu}{rb} = \frac{b.Sc.\pi}{Sc.\mu + \pi}. \text{ Si primus ex his valoribus } p \text{ in valorem } m \text{ intro-$$

ducatur, habemus $m = \frac{nb.Sc.\mu}{Sc.\mu + \pi.\sqrt{n^2 - \frac{n^4.Cc.\mu^2}{r^2b^2}}}$

$$= \frac{rb^2.Sc.\mu}{Sc.\mu + \pi.\sqrt{r^2b^2 - n^2.Cc.\mu^2}}, \text{ in qua formula posito valore } n, \text{ erit}$$

$$m = \frac{r b^2 \cdot Sc.\mu}{Sc.\mu + \pi} ; \text{ergo } m = \frac{\sqrt{b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2}}{Sc.\mu + \pi}$$

$$\text{Hinc multiplicando } m \text{ per } n \text{ fit } mn = \frac{rbc}{Sc.\mu + \pi}, \text{ seu } \frac{mn \cdot Sc.\mu + \pi}{r} = bc$$

Offendit hæc ultima æquatio, ductis duabus rectis MI, BA triangula MCI, BCA æquata esse, quod sane est evidens. Namque quum sit $MC = n$, $CI = m$, & perpendicularis cadens ex M in IC productam, si opus fuerit, semper esse debeat $= \frac{n \cdot Sc.\mu + \pi}{r}$, erit semper ex vi æquationis $\frac{mn \cdot Sc.\mu + \pi}{r} = bc$.

Hinc etiam sequitur æqualia esse inter se parallelogrammata omnia, quæ ellipti inscribi possunt ita, ut eorum diagonales sint duæ diametri conjugatæ, quæ proprietas diligenter est animadvertenda.

15. Ex duobus valoribus p , quos supra invenimus, & ex valore n scimus

$$\text{esse } Sc.\mu + \pi = Sc.\pi \cdot \frac{b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2}{rc \cdot Cc.\mu}, \text{ qui valor si in}$$

$$\frac{\sqrt{b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2}}{Sc.\mu + \pi} = m \text{ substituatur, erit}$$

$$m = \frac{rc \cdot Cc.\mu}{Sc.\pi \cdot \sqrt{b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2}} ; \text{ergo } m^2 = \frac{r^2 c^2 \cdot Cc.\mu^2}{Sc.\pi^2 \cdot (b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2)}$$

$$\text{sed ex num. 12. est } \frac{r^2 c^2 \cdot Cc.\mu^2}{Sc.\pi^2} = b^4 \cdot Sc.\mu^2 + c^4 \cdot Cc.\mu^2 ; \text{ergo substitutio}$$

$$\text{ne adhibita erit } m^2 = \frac{b^4 \cdot Sc.\mu^2 + c^4 \cdot Cc.\mu^2}{b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2} ; \text{ sed } n^2 = \frac{r^2 b^2 c^2}{b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2} ;$$

$$\text{ergo æquationibus summatis erit } m^2 + n^2 = \frac{b^4 \cdot Sc.\mu^2 + c^4 \cdot Cc.\mu^2 + r^2 b^2 c^2}{b^2 \cdot Sc.\mu^2 + c^2 \cdot Cc.\mu^2} ;$$

$$\text{sed est } r^2 = Sc.\mu^2 + Cc.\mu^2 ; \text{ igitur } m^2 + n^2$$

$$\frac{b^4 \cdot \text{Sc. } \mu + b^2 c^2 \cdot \text{Cc. } \mu + b^2 c^2 \cdot \text{Sc. } \mu + c^4 \cdot \text{Cc. } \mu}{b^2 \cdot \text{Sc. } \mu + c^2 \cdot \text{Cc. } \mu} = b^2 + c^2. \text{ Ex qua}$$

finali æquatione illud est manifestum, quadrata duo semidiametrorum conjugatarum duo æquare quadrata semiaxium, adeoque etiam quadrata duo prima in quibuscumque diametris conjugatis constantem summam exhibere.

16. Hæc duæ proprietates, quas demonstravimus, plurimum problematum solutioni viam præbent, quorum in curvæ hujus usu maxima est utilitas. Hoc primum esto. Datis duobus semiaxibus b, c , duas semidiametros invenire, quarum angulus dato $\mu + \pi$ sit equalis. Duæ sunt æquationes inventæ: $m^2 + n^2 = b^2 + c^2$, $m n = \frac{r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi}$. Si primæ addatur, & deinde subtrahatur secun-

da per 2 multiplicata, duæ habentur æquationes $m^2 + 2 m n + n^2 = b^2 + \frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} + c^2$, $m^2 - 2 m n + n^2 = b^2 - \frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} + c^2$, ex quibus extractis radicibus, oriuntur $m + n = \sqrt{b^2 + \frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} + c^2}$, $m - n = \sqrt{b^2 - \frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} + c^2}$, unde juxta sæpe explicatam methodum est.

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + \frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} + c^2} + \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - \frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} + c^2}$$

$$n = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + \frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} + c^2} - \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - \frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} + c^2}. \text{ Q. E. I.}$$

Si $\frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} = b^2 + c^2$, quam radix secunda fiat = 0, duæ semidiametri m, n æquales sunt, nempe $= \sqrt{b^2 + c^2}$, & sinus anguli in quo concurrunt erit: $\frac{\text{Sc. } \mu + \pi}{r} = \frac{2 b c}{b^2 + c^2}$. At si $\frac{2 r b c}{\text{Sc. } \mu + \pi} > b^2 + c^2$, semidiametri evadunt imaginariæ. Impossibile igitur est duas habere diametros in angulo concurrentes, cujus sinus per sinum totum divisus minor sit quam $\frac{2 b c}{b^2 + c^2}$. Duarum

semidiametrorum conjugatarum quantitate inventa, earum positio determinatur determinatis angulis μ, π , quos efficiunt cum axe, quemadmodum num. 13. est demonstratum.

17. Problema alterum. Duabus semidiametris m, n datis, & earum angulo $\mu + \pi$, semiaxes b, c invenire. Duæ æquationes ita disponantur $b^2 + c^2 = m^2 + n^2$, $b c = \frac{m n \cdot \text{Sc. } \mu + \pi}{r}$, postrema hæc multiplicata per 2 primæ ad-

datur, & subtrahatur successive; & habebimus $b^2 + 2bc + c^2 = m^2$
 $+ \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2, b^2 - 2bc + c^2 = m^2 - \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2$

ergo eductis radicibus, $b + c = \sqrt{m^2 + \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2}$
 $b - c = \sqrt{m^2 - \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2}$, unde $b = \frac{1}{2} \left(\sqrt{m^2 + \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2} + \sqrt{m^2 - \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2} \right)$
 $+ \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2}$, $c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{m^2 + \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2} - \sqrt{m^2 - \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2} \right)$
 $- \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - \frac{2mn \cdot Sc \cdot \mu + \pi}{r} + n^2}$, Q. E. I. Quoniam semper $Sc \cdot \mu + \pi < r$

(supponuntur enim m, n non esse axes) fieri nunquam poterit, ut radices sint imaginariæ; ergo quæcumque sint semidiametri, datur, & quicumque unus angulus, semper determinatur semiaxes. Diametrorum vero magnitudo, & anguli, in quo concurrant, non curvæ naturam, sed magnitudinem tantum axium, eorumque proportionem immutat. Posset etiam problema solvi, quo ex datis duobus diametris eorumque angulo, due quarantur alie diametri, quæ angulum alium datum efficiant. At quoniam ex problemate secundo discimus ex diametris axes inveniri, & ex primo quascumque diametros ex axibus; ideo superfluum ducimus in hæc tempus terere.

18. Esti monuimus rectam ab extremitate axis vel diametri cujuscumque ductam, quæ parallela sit axi vel diametro conjugatæ, etlyosim tangere; nihilominus utile fuit simplicissimo calculo ostendere, tangentem ad quamcumque aliam diametrum translata pulcherrima donatam esse proprietate, quæ hic sane silentio tegi non debet. Ut id primo demonstremus quoad axem, in memoriam revocare oportet, accepta in axe $CG = x, DG = y$, quæ cum axe efficiat angulum $= z$, nos inventisse sem. num. 6. valere hanc æquationem

$$\frac{b^2 \cdot Sc \cdot \mu + c^2 \cdot Cc \cdot \mu - 2xy \cdot Cc \cdot \mu}{-2xy} = \frac{x^2 b^2 - y^2 c^2}{b^2 \cdot Sc \cdot \mu + c^2 \cdot Cc \cdot \mu}$$

Ex hac facile est

inferre, posita quæcumque z , duos fore x valores. Donec sit $z < CA$, valorum alter erit positivus, alter negativus, posita $z = CA$ unus e valoribus erit $= 0$, realis alter; facta demum $z > CA$ uterque valor aut positivus erit, aut negativus; ita ut adhuc crescente z valores ad æqualitatem accedant, deinde æquales fiant; ultra quem limitem sit uterque imaginarius. Sit CT illa abscissa z , cui duo æquales respondent valores x , tunc sint T & L esse tangentem curvæ. Dacatur IS normalis axi CA . Ut proprietatem tangentis TL investigariamus, videndum est, quinam debeat esse z valor, ut due æquationis nostre radices æquales fiant. Hac de causa addito quadrato dimidii coefficientis, erit

$$\begin{aligned} \text{sit } z &= \frac{rc \cdot cc \cdot \mu \cdot z}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} = \frac{r^2 c^2 b^2}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} \\ + \frac{r^2 c^2 \cdot cc \cdot \mu \cdot z}{r^2 c^2 \cdot cc \cdot \mu} &= \frac{r^2 c^2}{rbc} \\ \frac{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} &= \frac{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} \\ + \frac{r^2 c^2 \cdot cc \cdot \mu - rbc \cdot sc \cdot \mu - r^2 c^2 \cdot cc \cdot \mu}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} &= \frac{r^2 c^2}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} \\ - \frac{r^2 c^2 \cdot sc \cdot \mu}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} &= z^2 \end{aligned}$$

Jam vero, ut duz radices, seu duo valores z æquales sint, necesse est ut homogeneum comparationis evadat $= 0$, hoc est, sit

$$\frac{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} = \frac{r^2 c^2}{b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu} \cdot z^2; \text{ ergo tunc habebimus}$$

$$b^2 \cdot sc \cdot \mu + c^2 \cdot cc \cdot \mu = sc \cdot \mu \cdot z^2, \text{ seu } z^2 = b^2 + c^2 \cdot \frac{cc \cdot \mu}{sc \cdot \mu}. \text{ In hac hyp}$$

pothesi vocata $CS = x$, $SI = y$, $ST = z - x$, habemus $y : z - x :: sc \cdot \mu : cc \cdot \mu$; ergo substitutione facta in valore z^2 supra invento, erit $z^2 = b^2$

$$+ c^2 \cdot \frac{z-x}{y}; \text{ sed ex curvæ indole, ut initio capitis observatum est, } \frac{c}{y}$$

$$= \frac{b^2}{b^2 - x^2}; \text{ ergo } z^2 = b^2 + b^2 \cdot \frac{z-x}{b^2 - x^2}, \text{ idest } b^2 z^2 - x^2 z^2 = b^4 - b^2 x^2 + b^2 z^2$$

$$- a^2 x z, \text{ deletisque terminis, qui mutuo eliduntur, } b^4 - a^2 x z + x^2 z^2 = 0; \text{ un}$$

de radice extracta $b^2 - xz = 0$ prodit $b^2 = xz$; ergo $x : b :: b : z$, idest $CS : CA :: CA : CT$. Hinc ex quocumque puncto I tangente ducta, quæ cum axe in aliquo puncto T concurrat, & ex contactu demissa ad eundem axem normali IS , erunt semper CS , CA , CT continue proportionales.

19. Hoc theorema non in solis axibus locum habet, sed ad diametros eam quæcumque pertinet. CA , CB diametros conjugatas esse supponamus non ortho-

orthogonaliter, sed oblique sibi occurrentes, easque vocemus m , n , ad quas, ut jam novimus, spectat æquatio $m^2 y^2 = n^2 m^2 - x^2$. Angulus DFC fit $=v$, & ducatur quælibet DG cum CA efficiens angulum DGC $=\mu$, unde evadat angulus FDG $=v-\mu$, & queratur æquatio respectu linearum.

CG $=z$ & DG $=u$. Habebimus $y:n::Sc.\mu:Sc.v$; ergo $y = \frac{n.Sc.\mu}{Sc.v}$. Præterea erit $u:FG::Sc.v:Sc.v-\mu$; ergo $FG = \frac{u.Sc.v-\mu}{Sc.v}$; ergo $x = z - \frac{n.Sc.v-\mu}{Sc.v}$, qui valores x & y in æquatione substituti dant $\frac{m^2 n^2 Sc.\mu^2}{Sc.v^2}$

$= n^2 m^2 - z^2 + \frac{2zn.Sc.v-\mu}{Sc.v} - \frac{n^2.Sc.v-\mu^2}{Sc.v^2}$, seu

$\frac{m^2.Sc.\mu^2 + n^2.Sc.v-\mu^2}{Sc.v^2} - z^2 - \frac{2n^2.Sc.v-\mu}{Sc.v} - \frac{z^2 n^2.Sc.v-\mu^2}{Sc.v^2}$, $z^2 n^2.Sc.v-\mu^2 = m^2 n^2 - n^2 z^2$,

seu $z^2 - \frac{2n^2.Sc.v-\mu}{Sc.v} - \frac{z^2 n^2.Sc.v-\mu^2}{m^2.Sc.\mu^2 + n^2.Sc.v-\mu^2} = \frac{m^2 n^2.Sc.v-\mu^2}{m^2.Sc.\mu^2 + n^2.Sc.v-\mu^2}$. Ut dux

hujus æquationis radices æquales sint, necesse omnino est, ut homogeneum comparationis una cum quadrato dimidii coefficientis u fit $=0$. Hinc divisione facta per $n^2.Sc.v$, & multiplicatione per $m^2.Sc.\mu + n^2.Sc.v-\mu$, orietur $\frac{n^2.Sc.v-\mu^2}{m^2.Sc.\mu + n^2.Sc.v-\mu} z^2 - z^2 + m^2 = 0$, seu m^2

$= \frac{m^2.Sc.\mu^2 z^2}{m^2.Sc.\mu + n^2.Sc.v-\mu}$, seu $m^2 + \frac{n^2.Sc.v-\mu^2}{Sc.\mu} = z^2$. Jam vero

fit in hac hypothefi CT $=z$, TI tangens, & IS ordinata. Vocetur CS $=x$, IS $=y$, ST erit $=z-x$. Habebimus $y:z-x::Sc.\mu:Sc.v-\mu$; ergo

$\frac{z-x}{y} = \frac{Sc.v-\mu}{Sc.\mu}$, adeoque substitutione valorum facta $z^2 = m^2 + \frac{n^2 z-x^2}{m^2-x^2}$;

at ex æquatione num. 9. est $\frac{n^2}{y} = \frac{m^2}{m-x^2}$; ergo $z^2 = m^2 + \frac{m^2 z-x^2}{m^2-x^2}$, unde

ficati

sicuti antea (num. 8.) eruitur $m^2 = z^x$, seu $x:m::m:z$, idest $CS:CA::CA:CT$. Q. E. D. Eadem de causa si diameter conjugata CB producta intelligatur donec tangentem IT fecerit in puncto t , erit $IS:CB::CB:Cr$; ergo $IS:$

$Cr = CB^2$.
 20. Ex punctis A , a diametri Aa verticibus tangentes ducantur AX , ax parallelæ diametro conjugatæ Bb , quæ cum tangen. IT concurrant in punctis X , x . Ob superiorem demonstrationem valet $CS:CA::CA:CT$; ergo dividendo $CS:SA::CA:AT$, & permutando $CS:CA::SA:AT$, & componendo $CS+CA=aS:CA::ST:AT$, & permutando $aS:ST::CA:AT$, & componendo $aT:ST::CT:AT$; atqui hæcæ quatuor propter triangulorum similitudinem proportionales sunt ax , IS , Cr , AX ; ergo $ax:IS::Cr:AX$; ergo $AX.a x = IS.Cr$; at paullo ante probatum est $IS.Cr =$

CB^2 ; ergo $AX:CB::CB:ax$, quæ pulcherrima est tangentium proprietas.

CAPUT TERTIUM.

De Hyperbola:

1. Superest ut tertiam formulam aggrediamur $y^2 - ax^2 - bx - c = 0$ pertinentem ad curvam quatuor in infinitum abeuntibus ramis præditam, quam hyperbolam vocari diximus. Equationem dividamus per a , ut sit $\frac{y^2}{a^2} - x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} = 0$, hæc si addamus simul & subtrahamus $\frac{b^2}{4a^2}$ quadratum dimidii coef-

ficientis incognitæ x , habebimus $\frac{y^2}{a^2} - x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$, & substi-

tutione $x + \frac{b}{2a} = z$ facta $\frac{y^2}{a^2} - z^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$. Jam vero quæ tria

possint accidere, nempe ut $\frac{b^2}{4a^2}$ sit major quantitas, quam $\frac{c}{a}$, vel æqualis, vel minor, singula hic erunt perpendenda.

2. Ordiamur a primo casu. Ut formula commodiorem accipiat formam, loco quantitatis $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ scribatur b^2 , & loco $\frac{1}{a}$ sit $\frac{b^2}{c}$, & z vertatur in x , erit

Vertical line or mark on the right side of the page.



erit æquatio $\frac{b^2}{c^2} y^2 - x^2 + b^2 = 0$, seu $y^2 = \frac{c^2}{b^2} x^2 - b^2$; ergo extracta radi-

ce, $y = \pm \frac{c}{b} \sqrt{x^2 - b^2}$, unde duos esse discimus valores y inter se æquales,

alterum positivum, alterum negativum. Si fit $x = 0$, erit y imaginaria, imo imaginaria erit, quoties x vel positiva, vel negativa accipietur minor quam b . Igitur, posito C initium abscissarum (Fig. 1.) si abscindantur CA, CA = b , inter puncta A, a nulla erit curva: ipsi vero punctis A, a, quoniam tunc $x = \pm b$, respondebunt $y = 0$. At crescentibus adhuc abscissis x vel positive vel negative, patet fore etiam, ut crescant ordinatæ y tum positive, tum negative, adeoque quatuor illi efformentur rami, de quibus diximus, quorum duo ad x negativas, duo ad positivas pertinebunt.

3. Ex puncto C, quod centrum appellabimus, ducatur Bb parallela ordinatis. Linea Aa ex utraque parte producta quum bifariam secet cordas hyperbolæ omnes, quæ parallelæ sunt ad Bb, qualis esset corda DE, diameter dicitur. Si lineæ ducantur Dd diametro Aa parallelæ, hæc bifariam secabuntur a recta Bb, quæ, ut vidimus, numquam occurret hyperbolæ. Ratio est manifesta; nam duabus acceptis æqualibus abscissis CF positiva, & Cf negativa, patet ex formula eundem prodire valorem y ; ergo FD, fd inter se parallelæ æquales sunt; ergo Dd parallela erit, & æqualis lineæ Ff; ergo Quum hæc bifariam dividatur a CB, quæ est parallela ordinatis, etiam Dd necessario ab eadem dividetur bifariam in puncto O. Igitur etiam Bb erit diameter, & Aa Bb vocabuntur diametri conjugatæ, ita ut, quæ curvam secat, nempe Aa dicatur prima, alia vero secunda.

4. In ellipsi sermonem habuimus sæpe de diametris conjugatis, veluti de lineis determinatis, & ex revera duabus curvæ sectionibus definitbantur. At hoc pacto in hyperbola nequit determinari nisi diameter Aa = $2b$, secunda vero nequaquam, quum nulquam curvam inveniat. Ut tamen determinetur ex quadam analogia ad ellipsim, fiat $x = 0$, & habebimus $y = c\sqrt{-1}$, quæ est quantitas imaginaria. Mutemus itaque signum quantitatis sub radice existentis, & erit $y = \pm c$, quam tamen cave, ne existimes esse ordinatam curvæ. Ita acceptis CB, Cb = c erit nobis deinceps Bb diameter secunda hyperbolæ.

5. Ex æquatione habemus analogiam $x^2 - b^2 : y^2 :: b^2 : c^2$, quæ nos monet rectangulum aFA esse ad quadratum FD :: CA : CB. Si post aA, bB inveniatur tertia proportionalis, quæ sit = e , hæc vocabitur parameter diametri aA, & analogia poterit in hanc verti $x^2 - b^2 : y^2 :: 2b : e$. Potest etiam æquatio hac forma exhiberi $\frac{b^2}{c^2} y^2 + c^2 = x^2$, unde $y^2 + c^2 : x^2 :: c^2 : b^2$;

ergo summa quadratorum CO, CB est ad quadratum OD, ut CB : CA. Inventa autem tertia proportionali post bB, aA, quæ erit secundæ diametri parameter, nova consurget analogia, quæ ostendet esse CO² + CB² : OD², ut bB ad suam parametrum.

6. Proprietas hæc, quæ ad secundam diametrum pertinet, non ita leviter est prætereunda, quia maximi est usus. Vocata igitur $CO = x$, $OD = y$, & reliquis ut supra denominationibus retentis, erit $x^2 + c^2 = \frac{c^2 y^2}{b^2}$. Revoce-
 mus æquationem $\frac{y^2}{a^2} - x^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$, & supponamus $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ esse quanti-

tatem negativam, de qua hypothefi nondum est actum. Si pro $\frac{y}{a}$ scribamus $\frac{c^2}{b^2}$, & c^2 pro $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$, & x pro x , habemus $\frac{c^2 y^2}{b^2} = x^2 + c^2$. Hæc igitur formula non ad aliam curvam spectabit, sed ad hyperbolam, eo tantum discrimine, quod ubi in priore formula x accipiebantur in prima diametro, & y erant secundæ parallelæ, in hac x accipiendæ sunt in diametro secunda, positæ y primæ parallelis. Altera igitur formularum in alteram vertitur, si abscissæ in ordinatas transeant, & vicissim ordinatæ in abscissas.

7. Reliquum est, ut agamus breviter de hypothefi tertia, in qua $\frac{b^2}{c^2} = \frac{c}{a}$. Posito $\frac{b^2}{c^2}$ pro $\frac{y}{a}$, & x pro x , oritur æquatio $\frac{b^2}{c^2} y^2 = x^2$, & extracta radi-

ce $y = \pm \frac{c}{b} x$, quæ formula duplicem rectam indicat. Facta CF linea abscissarum, sit $CA = b$, & parallelæ ordinatis ducantur $AP = AQ = c$: si jungantur CP , CQ , hæc lineæ in infinitum protractæ erunt locus æquationis, in quo CF erant x , FX erant y positivæ, FY negativæ.

8. Jam vero si hyperbolam cum rectis, quas modo descripsimus, conferre velimus, primo dicimus semper fore $FX > FD$. Etenim quum ex superioribus habeamus $FX = \frac{c}{b} x$; & $FD = \frac{c}{b} \sqrt{x^2 - b^2}$, quumque sit $x > \sqrt{x^2 - b^2}$, necessario etiam erit $\frac{c}{b} x > \frac{c}{b} \sqrt{x^2 - b^2}$, seu $FX > FD$. Igitur lineæ CP , CQ hyperbolam amplectuntur, totæque extra curvam cadunt. Deinde quoniam invenimus $DX = \frac{c}{b} x - \sqrt{x^2 - b^2}$, $DY = \frac{c}{b} x + \sqrt{x^2 - b^2}$, erit rectangulum

$XDY = \frac{c^2}{b^2} x^2 - x^2 + b^2 = c^2 = AP^2 = \text{rect. } PAQ$. Ergo rect. XDY

est constans; sed patet DF , atque adeo etiam DY crescere, quo major fit x ; ergo DX debet imminui, & quoniam DF , DY in infinitum crescunt, crescent in infinitum x , ita DX in infinitum minuetur, & per consequens recta CP semper ad curvam magis accedet, quin tamen illam umquam tangat.

9. Idipsum ex secundæ diametri proprietatibus facile demonstrari potest. Etenim

tenim vocata $CO = x$, erit $OR = \frac{b}{c} \cdot x$, & $OD = \frac{b}{c} \sqrt{x^2 + c^2}$; atqui

$\sqrt{x^2 + c^2} > x$; ergo $\frac{b}{c} \cdot \sqrt{x^2 + c^2} > \frac{b}{c} \cdot x$, seu $OD > OR$. Hinc erit

$RD = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{x^2 + c^2} - x$, & $rD = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{x^2 + c^2} + x$; ergo rect. rDR

$= \frac{b^2}{c^2} \cdot x^2 + c^2 - x^2 = b^2 = CA^2 = \text{rect. a CA constanti}$; sed crescente in infinitum

$CO = x$ crescunt in infinitum OD , & rD ; ergo in infinitum decrescat oportet RD ; ergo CP semper curvæ propinquior fiet, sed numquam ad contactum deveniet. Hæ lineæ, quæ hoc pacto ad quatuor curvæ ramos accedunt, quin unquam illos assequantur, hyperbolæ asymptoti dicuntur.

10. Interim ad primam diametram redeunt illam tamquam axem consideremus, supposito angulo coordinatarum recto, qua in hypothesi, si duo axes æquales sint, hyperbola vocatur æquilatera. Sit recta DG , quæ cum axe angulum efficiat $= \mu$, & iisdem, quæ supra retentis denominationibus, vocetur $CG = z$, $DG = u$. Occurrunt continuo hæ analogiæ $u : y :: r : Sc. \mu$, unde $y = \frac{u \cdot Sc. \mu}{r}$; $r : Cc. \mu :: u : FG = \frac{u \cdot Cc. \mu}{r}$; unde $x = z - \frac{u \cdot Cc. \mu}{r}$. His

valoribus substitutis in æquatione $\frac{b^2}{r^2} \cdot y^2 = x^2 - b^2$, orietur $\frac{b^2 u^2 \cdot Sc. \mu^2}{r^2 c^2} = z^2$

$-\frac{2zu \cdot Cc. \mu}{r} + \frac{u^2 \cdot Cc. \mu^2}{r^2} - b^2$. Angulus μ is modo sit, ut habeamus

$b \cdot Sc. \mu > c \cdot Cc. \mu$. Supponamus $z = 0$, & inveniemus

$b^2 = u^2 \cdot \frac{c^2 \cdot Cc. \mu^2 - b^2 \cdot Sc. \mu^2}{r^2 c^2}$; ergo $u = \frac{rcb}{\sqrt{c^2 \cdot Cc. \mu^2 - b^2 \cdot Sc. \mu^2}}$, qui

valor in ea, in qua sumus hypothesi, imaginarius quæ sit, sequitur numquam futurum, ut CM parallela rectæ DG curvam inveniat. Nihilominus, ut analogiam cum ellipfi servemus, signa quantitatis sub radicali existentis immutemus, fitque $CM = \frac{rcb}{\sqrt{b^2 \cdot Sc. \mu^2 - c^2 \cdot Cc. \mu^2}}$, quam deinceps vocabimus

$= n$. Hinc inventa æquatio fiet $\frac{b^2}{r^2} \cdot n^2 + \frac{2zu \cdot Cc. \mu}{r} = z^2 - b^2$.

11. Si nunc constituamus esse $z = b$, duos invenimus valores $u = 0$,

$u = -\frac{2n^2 \cdot Cc. \mu}{rb}$, quam nos expeditius dicemus $= 2p$. Signum $-$ indicat lineam

lineam cadere in partes n negativæ. Introducta p in æquationem, eam sic exponimus $n^2 + \frac{2p}{b} \cdot x n = \frac{n^2 z^2}{b^2} - n^2$, addito utrinque dimidii coefficientis qua-

drato, & posita $n + \frac{p}{b} \cdot x = y$, habebimus $y^2 = z^2 \cdot \frac{n^2 + p^2}{b^2} - n^2$. Eflo

CIK linea, quæ fecit $GL = \frac{p^2}{b}$, erunt tunc DL, NL duo æquales valores y alter positivus, alter negativus; igitur omnes DN bifariam secabuntur in L, atque adeo etiam AH bifariam dividitur in K, atque est AK = p; & revera si fiat $x = b$, prodit ex æquatione $y = \pm p$.

12. Sed ut æquationem ad lineam CK transferamus, vocetur angulus KCA = ν , unde angulus CLG = $\mu - \nu$. Ex his denominationibus est $b : p ::$

$$Sc. \mu - \nu : Sc. \nu, \text{ novusque oritur valor } p = \frac{b \cdot Sc. \nu}{Sc. \mu - \nu}. \text{ Præterea est } Sc. \mu - \nu :$$

$$Sc. \mu :: CA : CK; \text{ ergo } CK = \frac{b \cdot Sc. \mu}{Sc. \mu - \nu}. \text{ Vocata nunc } CL = x, \text{ erit } x ::$$

$$Sc. \mu - \nu : Sc. \mu; \text{ ergo } x = \frac{x \cdot Sc. \mu - \nu}{Sc. \mu}. \text{ Hinc superior æquatio in hanc tran-}$$

$$sibit $y^2 = \frac{x^2 \cdot Sc. \mu - \nu^2}{Sc. \mu^2} \cdot \frac{n^2 + p^2}{b^2} - n^2$. Nunc facta $y = 0$, erit $x^2$$$

$$= \frac{n^2 \cdot Sc. \mu - \nu^2}{n^2 + p^2 \cdot Sc. \mu - \nu^2}; \text{ ergo } x = \frac{nb \cdot Sc. \mu}{\sqrt{n^2 + p^2 \cdot Sc. \mu - \nu^2}} = CI. \text{ Hanc vo-}$$

cabimus = m , ut fit $\frac{n^2 + p^2 \cdot Sc. \mu - \nu^2}{b^2 \cdot Sc. \mu^2} = \frac{n^2}{m^2}$; unde $y^2 = \frac{n^2 x^2}{m^2} - n^2$, seu $\frac{m^2 y^2}{n^2} = x^2 - m^2$, quæ æquatio perfecte similis illi est, quæ ad axem CA pertinet; adeoque constat CI, CM duas esse semidiametros conjugatas.

13. Comparemus jam inter se duos valores p , ut aliqua inveniatur æqualitas inter quantitates ad angulos μ , ν pertinentes. Habemus igitur $\frac{n^2 \cdot Cc. \mu}{r b}$

$$= \frac{b \cdot Sc. \nu}{Sc. \mu - \nu}, \text{ \& subrogato valore } n^2 = \frac{r^2 c^2 b^2}{b^2 \cdot Sc. \mu - c^2 \cdot Cc. \mu^2}, \text{ æquatio est}$$

$r^2 \cdot Cc. \mu \cdot Sc. \mu - \nu = Sc. \nu \cdot b^2 \cdot Sc. \mu^2 - c^2 \cdot Cc. \mu^2$. Itaque quotiescumque hæc æquatio locum habeat, semper linea CIL diameter erit in æquales partes secans quancumque cordam DN.

14. Relicta hic paullisper hyperbola animum ad asymptotos iterum conver-
tamus. Sint lineæ (Fig. 2.) CP, CQ, quarum angulum PCQ bifariam di-
vidit recta CAG, quæ pariter eadem ratione dividit quascumque PQ ad ipsam
perpendiculares. Ducatur quolibet PGN faciens angulum PGC = μ , quæritur
quænam erit linea CL, quæ ipsam PN, atque illi parallelas omnes bifariam
fecat. Denominemus angulum GCL = ν , CA = b , AP = AQC = c , & du-
camus QM parallelam lineæ AG; propter similita triangula PAG, PQM
erit PG = GM, & QM = 2GA. His positis habemus $Sc. \mu : \nu : c : PG = \frac{c\nu}{Sc. \mu}$,

& $Sc. \mu : Cc. \mu :: c : AG = \frac{c.Cc. \mu}{Sc. \mu}$, ergo $QM = \frac{2c.Cc. \mu}{Sc. \mu}$. Triangula
vero similia CGN, QMN dant CG : QM :: GN : MN, & dividendo
CG - QM : QM :: GM : MN, seu CA - AG : 2AG :: PG : MN, & ana-

lytice $b - \frac{c.Cc. \mu}{Sc. \mu} : \frac{2c.Cc. \mu}{Sc. \mu} :: \frac{c\nu}{Sc. \mu} : MN = \frac{2rc^2.Cc. \mu}{Sc. \mu.b.Sc. \mu - c.Cc. \mu}$;

At PN est dupla PL, & PM dupla PG; ergo erit MN = 2GL; ergo GL
= $\frac{rc^2.Cc. \mu}{Sc. \mu.b.Sc. \mu - c.Cc. \mu}$. Jam vero quum sit angulus GLC = $\mu - \nu$, præ-

ter futurum $Sc. \mu - \nu : Sc. \nu :: CG : GL$, sed $Sc. \mu - \nu : Sc. \nu :: b + \frac{c.Cc. \mu}{Sc. \mu}$;

$\frac{rc^2.Cc. \mu}{Sc. \mu.b.Sc. \mu - c.Cc. \mu}$; ergo $Sc. \mu - \nu : Sc. \nu :: b.Sc. \mu + c.Cc. \mu$;

$\frac{rc^2.Cc. \mu}{b.Sc. \mu - c.Cc. \mu}$, & $rc^2.Cc. \mu.Sc. \mu - \nu = Sc. \nu.b^2.Sc. \mu - c^2.Cc. \mu$.

Quum hæc æquatio illi, quam supra vidimus ad lineam CIL (Fig. 1.) perti-
nere, perfecte identica sit, sequitur lineam eandem CIL, quæ cum axe con-
stituat angulum ICA = ν , bifariam partiri quascumque parallelas ad Mm ef-
ficientes cum axe eodem angulum = μ , five hæ ramis curvæ, five asymptotis
terminentur. Hinc producta ntrinque DN in W, U, erit semper DU = NW.

15. Caremus modo, ut asymptotorum æquationem reperiamus. Quoniam (Fig. 2.)

$PG = \frac{rc}{Sc. \mu}$, $GL = \frac{rc^2.Cc. \mu}{Sc. \mu.b.Sc. \mu - c.Cc. \mu}$, erit $PL = \frac{rc}{Sc. \mu}$

+ $\frac{rc^2.Cc. \mu}{Sc. \mu.b.Sc. \mu - c.Cc. \mu} = \frac{rcb}{b.Sc. \mu - c.Cc. \mu}$; sed habemus $Sc. \nu :$

$Sc. \mu :: GL = \frac{rc^2.Cc. \mu}{Sc. \mu.b.Sc. \mu - c.Cc. \mu} : CL$; ergo $CL = \frac{rc^2.Cc. \mu}{Sc. \nu.b.Sc. \mu - c.Cc. \mu}$

Acceptis igitur in recta CL abscissis = x , & parallelis ad LP ordinatis = y ,

valebit hæc analogia $\frac{rc^2.Cc. \mu}{Sc. \nu.b.Sc. \mu - c.Cc. \mu} : \frac{rcb}{b.Sc. \mu - c.Cc. \mu} :: y : c.Cc. \mu$

$c.Cc.\mu; b.Sc.v; x; \pm y$. Hæc est æquatio, quæ inter abscissas (Fig. 1.) $CL = x$, & ordinatas ad asymptotum $LU = y$ intercedit.

16. Sed videamus nonnulla, quæ ex antecedenti formula deducuntur, sunt enim plurima, quibus haud frustra utemur in posterum. Formula est $rc^2.Cc.\mu$.

$Sc.\mu - v = Sc.v. b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2$; atqui (ex cap. 10. lib. 1.) r .

$Sc.\mu - v = Sc.\mu.Cc.v - Sc.v.Cc.\mu$; ergo $c^2.Sc.\mu.Cc.\mu.Cc.v - c^2$.

$Sc.v.Cc.\mu^2 = b^2.Sc.v.Sc.\mu^2 - c^2.Sc.v.Cc.\mu^2$, & ejectionis terminis, qui

eliduntur, & divisione facta per $Sc.\mu$, oritur $c^2.Cc.\mu.Cc.v = b^2.Sc.\mu$.

$Sc.v$. Ex hac simplici æquatione, quæ maxime nobis utilis futura est, ad æ-

liam transcamus media formula (cap. 10. lib. 1. inventa) $Cc.\mu.Cc.v = r$.

$Cc.\mu - v = Sc.v.Sc.\mu$, ex qua, & superiore prodit $rc^2.Cc.\mu - v$

$= b^2 + c^2.Sc.v.Sc.\mu$; seu $Cc.\mu - v = \frac{b^2 + c^2.Sc.v.Sc.\mu}{rc^2}$.

17. Hæc habitis, demonstrabimus, quod si per punctum I, in quo diame-
ter curvam fecat, ducatur linea TIS occurrens asymptotis in T, S, erit
IT = IS = n, id est æqualis secundæ semidiametro. Etenim, quoniam æqua-
tio ad asymptotum inventa est $c.Cc.\mu; b.Sc.v; x; \pm y$, posita $x = CI = m$,
erit $TI = y = \frac{mb.Sc.v}{c.Cc.\mu}$, & substituto valore $m = \frac{nb.Sc.\mu}{Sc.\mu - v. \sqrt{n^2 + p^2}}$,

$TI = \frac{nb^2.Sc.\mu.Sc.v}{c.Cc.\mu.Sc.\mu - v. \sqrt{n^2 + p^2}}$. Ex inventis paulo supra valoribus, habe-

mus $n^2 + p^2 = \frac{rc^2b^2}{b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2} + \frac{b^2.Sc.v^2}{Sc.\mu - v}$; atqui (num. 14.) b^2 .

$Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2 = \frac{rc^2.Cc.\mu.Sc.\mu - v}{Sc.v}$; ergo $n^2 + p^2 = \frac{rb^2.Sc.v}{Cc.\mu.Sc.\mu - v}$

$+ \frac{b^2.Sc.v^2}{Sc.\mu - v} = \frac{b^2.Sc.v.Sc.\mu - v + Cc.\mu.Sc.v^2}{Cc.\mu.Sc.\mu - v}$, sed (ex cap. 10. lib. 1.)

$r.Sc.\mu - v + Cc.\mu.Sc.v = Sc.v.Cc.v$; ergo $n^2 + p^2 = \frac{b^2.Sc.\mu.Sc.v.Cc.v}{Cc.\mu.Sc.\mu - v}$;

atqui $b^2.Sc.v.Sc.\mu = c^2.Cc.\mu.Cc.v$; ergo $n^2 + p^2 = \frac{c^2.Cc.v^2}{Sc.\mu - v}$, adeo-
que

que $\sqrt{n^2 + p^2} = \frac{c \cdot Cc \cdot v}{Sc \cdot \mu \cdot v}$; ergo $TI = \frac{nb^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot v}{c^2 \cdot Cc \cdot \mu \cdot Cc \cdot v} = n \cdot Q \cdot E \cdot D$.

Ad hyperbolam redeuntes si ducamus rectam D₁G parallelam asymptoto CQ, angulus μ , idest angulus B₂GC æquabit angulum ACQ = ACP, qui est dimidium anguli ab asymptotis intercepti. Erit igitur $Sc \cdot \mu : Cc \cdot \mu :: c : b$, & $b \cdot Sc \cdot \mu = c \cdot Cc \cdot \mu$. Si per hanc æquationem dividatur formula $b^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot v = c^2 \cdot Cc \cdot \mu \cdot Cc \cdot v$, habebimus $b \cdot Sc \cdot v = c \cdot Cc \cdot v$, unde est analogia $Sc \cdot v : Cc \cdot v :: c : b$; ergo necesse est, ut angulus v , quem diameter lineæ D₂G cum axe efficit, æquet semiangulum asymptotorum ACQ; adeoque constet diametrum C₂L cum ipso asymptoto confundi, neque curvam secare nisi in puncto infinite distanti. Quum itaque quantum ad hanc diametrum inutilis sit æquatio, quam alius interire vidimus, iterum de æquatione ad asymptotos loqui nos oportebit.

18. Si linea DG angulum faciat DGC = μ majorem angulo ACQ = ACP, erit $Sc \cdot \mu : Cc \cdot \mu > c : b$; ergo $b \cdot Sc \cdot \mu > c \cdot Cc \cdot \mu$, & per hanc divisa formula $b^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot v = c^2 \cdot Cc \cdot \mu \cdot Cc \cdot v$, habebimus $b \cdot Sc \cdot v < c \cdot Cc \cdot v$; ergo $Sc \cdot v : Cc \cdot v < c : b$; ergo angulus $v = \angle CA$ minor erit quam angulus ACQ, adeoque diameter CI secabit angulum ACQ, & quod consequens est, etiam hyperbolam in puncto I. De hoc casu hætenus.

19. Intelligatur modo ducta D₃G parallela CIL. Hæc producta secabit asymptotum CP, ramumque hyperbolæ ad in puncto n, & D₃n bisariam dividet in zL a secunda diametro CM, ita ut spectetis tamquam abicillis C₃L = x , & tamquam ordinatis $zLD = y$, sit æquatio ad secundam diametrum pertiñens $x^2 + n^2 : y^2 :: n^2 : m^2$. Linea D₃G efficit cum axe angulum D₃GC = μ minorem angulo PCA; ergo $Sc \cdot \mu : Cc \cdot \mu < c : b$, & $b \cdot Sc \cdot \mu < c \cdot Cc \cdot \mu$. Hæc erit hypothesis, de qua nihil hætenus dictum est. Postea ea quidem eadem methodo, qua supra usi sumus, pertractari, verum expeditius ex antecedentibus eruatur. Itaque si linea quæcumque D₃G cum axe angulum interceptiat semiangulo asymptotorum minorem, ducatur illi parallela CIL, quæ hyperbolam secabit in aliquo puncto I, datusque erit angulus ACI, quem vocabimur = v , unde vi formulæ $b^2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Sc \cdot v = c^2 \cdot Cc \cdot \mu \cdot Cc \cdot v$ determinabitur angulus μ . Hinc lineæ omnes D₃Ln, quæ facient cum axe angulum A₃GD = μ , bisariam a secunda diametro CM secabuntur, quæ parallela est DG.

20. Hisce de hyperbola demonstratis, ut reliqua detegamus, non aliam sequemur methodum ab illa, qua usi sumus quum de ellipsi ageremus; verum quum calculi similes perfecte sint, eos tantum hic innere sufficet, ut brevius rem conficiamus. Quamvis in antecedente æquatione anguli μ, v , quos utraque diameter cum axe efficit, alter per alterum determinantur; expeditior nihilominus erit for-

mula, si ea ad tangentes transferatur; ita enim fiet $\frac{c^2}{b^2} = \frac{Tc \cdot \mu \cdot Tc \cdot v}{p^2}$. Quod

si sinus, & cosinus retinere malimus, eadem prodibunt formulæ, quas invenimus in ellipsi (Cap. 2. n. 12.). Interim præ oculis habeatur æquatio $\frac{r^2 c^4}{Cc \cdot \mu^2}$.

$\overline{Cc.\mu} = \overline{Sc.\nu} \cdot b^2 \cdot \overline{Sc.\mu} + c^2 \cdot \overline{Cc.\mu}$, qua brevi necesse habebimus.

21. Dato angulo $\mu - \nu$, quem intercipiunt duæ diametri conjugatæ, ut angulos μ, ν determinemus ex calculo ellipsicos (Cap. 2. num. 13.) ad æquationem

hanc deveniemus $b^2 - c^2 \cdot \overline{Cc.\mu - \nu} = b^2 + c^2 \cdot \overline{Cc.\mu + \nu}$; cujus ope ex angulorum differentia data $\mu - \nu$, nota fit eorum summa $\mu + \nu$; sed summa, & differentia quantitatum habita, etiam ipse quantitates notæ sunt; ergo noti erunt anguli μ, ν . In hyperbola æquilatera, in qua $c = b$, erit

$\overline{Cc.\mu - \nu} = b^2 + c^2 \cdot \overline{Cc.\mu + \nu}$; ergo quum $\overline{Cc.\mu - \nu}$ infinitus esse non possit, necessario erit $\overline{Cc.\mu + \nu} = 0$, idest angulus $\mu + \nu$ rectus. At si fiat $c > b$, quod in iis hyperbolis accidit, in quibus angulus asymptotorum curvam amplectens obtusus est, $\overline{Cc.\mu + \nu}$ negativus erit, & quod consequens est, angulus $\mu + \nu$ recto major.

22. Nunc ut diametrorum, quæ conjugatæ dicuntur, proprietates demonstrari possint, revocemus valores n, m , & utrumque valorem p , idest $n =$

$$\frac{rbc}{\sqrt{b^2 \cdot \overline{Sc.\mu} - c^2 \cdot \overline{Cc.\mu}}}, m = \frac{nb \cdot \overline{Sc.\mu}}{Sc.\mu - \nu \cdot \sqrt{n^2 + p^2}}, \text{ \& } p = \frac{n \cdot \overline{Cc.\mu}}{rb}$$

$= \frac{b \cdot \overline{Sc.\nu}}{Sc.\mu - \nu}$. Horum primus substituatur in valore m , qui ita fiet

$$m = \frac{nb \cdot \overline{Sc.\mu}}{Sc.\mu - \nu \cdot \sqrt{n^2 + \frac{n^4 \cdot \overline{Cc.\mu}^2}{r^2 b^2}}} = \frac{rb^2 \cdot \overline{Sc.\mu}}{Sc.\mu - \nu \cdot \sqrt{rb^2 + n^2 \cdot \overline{Cc.\mu}^2}}$$

& substituto valore n , erit $m = \frac{rb^2 \cdot \overline{Sc.\mu}}{Sc.\mu - \nu \cdot \sqrt{rb^2 + \frac{r^2 b^2 c^2 \cdot \overline{Cc.\mu}^2}{b^2 \cdot \overline{Sc.\mu}^2 - c^2 \cdot \overline{Cc.\mu}^2}}}$

$\frac{\sqrt{b^2 \cdot \overline{Sc.\mu} - c^2 \cdot \overline{Cc.\mu}}}{Sc.\mu - \nu}$. Hinc si multiplicemus m per n , habebimus $mn =$

$$\frac{rbc}{Sc.\mu - \nu}, \text{ five } \frac{mn \cdot \overline{Sc.\mu - \nu}}{r} = bc, \text{ ex qua æquatione discimus, ductis rectis MI, BA, triangula MCI, BCA æqualia esse, \& æqualia pariter esse parallelogramata quæcumque, quorum diagonales sint duæ diametri conjugatæ.}$$

23. Ope formulæ num. 14. $\overline{Sc.\mu - \nu} = \frac{Sc.\nu \cdot b^2 \cdot \overline{Sc.\mu} - c^2 \cdot \overline{Cc.\mu}}{rc \cdot \overline{Cc.\mu}}$ eli-

mina-

minato $Sc.\mu - r$ ex sequenti æquatione $m = \frac{\sqrt{b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2}}{Sc.\mu - r}$, in-

venimus $m = \frac{rc^2.Cc.\mu}{Sc.r.\sqrt{b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2}}$; ergo

$$m^2 = \frac{r^2c^4.Cc.\mu^2}{Sc.r.b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2}. \text{ At monuimus num. 20. esse } \frac{r^2c^4.Cc.\mu^2}{Sc.r}$$

$$= b^4.Sc.\mu^2 + c^4.Cc.\mu^2; \text{ ergo } m^2 = \frac{b^4.Sc.\mu^2 + c^4.Cc.\mu^2}{b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2}; \text{ est autem}$$

$$n^2 = \frac{r^2b^2c^2}{b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2}; \text{ ergo hac æquatione ex superiore detracta erit}$$

$$m^2 - n^2 = \frac{b^4.Sc.\mu^2 + c^4.Cc.\mu^2 - r^2b^2c^2}{b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2}, \text{ sed } r^2 = Sc.\mu^2 + Cc.\mu^2; \text{ ergo}$$

$$m^2 - n^2 = \frac{b^4 - cb^2.Sc.\mu^2 + c^4 - cb^2.Cc.\mu^2}{b^2.Sc.\mu^2 - c^2.Cc.\mu^2} = b^2 + c^2. \text{ Hinc monetur, dif-}$$

ferentiam inter quadrata duarum quarumlibet diametrorum conjugatarum differentie quadratorum axium æquari, atque adeo constantem esse.

24. In hyperbola æquilatera quum sit $b = c$, sequitur, $bb - cc = 0$; ergo etiam $mm - nn = 0$. In hac igitur quolibet diameter sibi conjugata æqualis est; qua in hypothesi angulus asymptotorum rectus est. Si vero eorundem angulus, qui curvam respicit, acutus sit, primus semiaxis b erit major secundo c ; ergo etiam $m > n$, & quæcumque diameter prima major conjugata. Contra si ille angulus obtusus fuerit, tunc quum sit $c > b$, erit etiam $n > m$, & secunda diameter major prima.

25. Ex duabus æquationibus $m^2 - n^2 = b^2 - c^2$, $\frac{mn.Sc.\mu - r}{r} = br$, pro-

blema solvitur, quo quis ex datis axibus $2b$, $2c$ duas quæret diametros facientes angulum $= \mu - r$, & ejus inversum, ex datis duabus diametris conjugatis cum eorum angulo $= \mu - r$ axes invenire. Ut hæc resolvamus, incipimus quantitates imaginarias in calculum introducere, quæ methodus deinceps videbitur non contemnenda. Supponamus igitur primo datos axes. Equatio al-

tera $mn = \frac{rbc}{Sc.\mu - r}$ multiplicetur per $2\sqrt{-1}$, & primæ successive addatur, & ex illa subtrahatur. Habemus

$$\begin{aligned} m^2 + 2mn\sqrt{-1} - n^2 &= b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2 \\ m^2 - 2mn\sqrt{-1} - n^2 &= b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{extra} \\ \text{hisque} \\ \text{radicali-} \\ \text{bus} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} m+n\sqrt{-1} &= \sqrt{\frac{b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2}{Sc.\mu-v}} \\ m-n\sqrt{-1} &= \sqrt{\frac{b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2}{Sc.\mu-v}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{quarum} \\ \text{summa} \ \& \ \text{differentia} \\ \text{præbet} \end{array} \right\}$$

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2}{Sc.\mu-v}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2}{Sc.\mu-v}}$$

$$n\sqrt{-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2}{Sc.\mu-v}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2}{Sc.\mu-v}}, \text{ seu}$$

$$n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2}{Sc.\mu-v}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu-v} - c^2}{Sc.\mu-v}}, \text{ quæ}$$

formulæ etſi imaginaria involvant, tamen reales ſunt. Quod ſi placeat, illas ad formam redigere, quæ careat imaginariis, eleva ad quadratum

$$m^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{Sc.\mu-v} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{Sc.\mu-v} + \frac{4r^2bc^2}{Sc.\mu-v}^2} \quad \left. \begin{array}{l} \& \ \text{radicibus} \\ \text{iterum} \\ \text{extractis} \end{array} \right\}$$

$$n^2 = \frac{-1}{2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{Sc.\mu-v} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{Sc.\mu-v} + \frac{4r^2bc^2}{Sc.\mu-v}^2}$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{Sc.\mu-v} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{Sc.\mu-v} + \frac{4r^2bc^2}{Sc.\mu-v}^2}}$$

$$n = \sqrt{\frac{-1}{2} \cdot \frac{b^2 - c^2}{Sc.\mu-v} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{Sc.\mu-v} + \frac{4r^2bc^2}{Sc.\mu-v}^2}}$$

in quibus nihil non eſt reale. Si $b=c$, invenimus non minus m , quam n , id eſt æquales inter ſeſe; ſi $b > c$, etiam $m > n$; tandem ſi $b < c$, erit quoque $m < n$.

26. Transimus ad problema alterum, & ex datis semidiametris m, n , cum eorum angulo μ , quæramus semiaxes b, c . Eadem, qua antea, methodo obtinebimus æquationes

$$b^2 + 2bc\sqrt{-1} - c^2 = m^2 + \frac{2mn.Sc.\mu - \pi.\sqrt{-1}}{r} - n^2$$

$$b^2 - 2bc\sqrt{-1} - c^2 = m^2 - \frac{2mn.Sc.\mu - \pi.\sqrt{-1}}{r} - n^2; \text{ ergo}$$

$$b + c\sqrt{-1} = \sqrt{m^2 + \frac{2mn.Sc.\mu - \pi.\sqrt{-1}}{r} - n^2}$$

$$b - c\sqrt{-1} = \sqrt{m^2 - \frac{2mn.Sc.\mu - \pi.\sqrt{-1}}{r} - n^2}; \text{ Ergo}$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + \frac{2mn.Sc.\mu - \pi.\sqrt{-1}}{r} - n^2} + \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - \frac{2mn.Sc.\mu - \pi.\sqrt{-1}}{r} - n^2}$$

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + \frac{2mn.Sc.\mu - \pi.\sqrt{-1}}{r} - n^2} - \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - \frac{2mn.Sc.\mu - \pi.\sqrt{-1}}{r} - n^2}$$

quæ formulæ reales sunt, quæque ad realem etiam formam reducuntur, ut supra prælitum est. Longitudine diametrorum, aut axium detecta, eorum quoque positio facile determinatur, si anguli μ, ν , quos diametri cum axe primo constituunt, inveniantur.

27. Oportet nunc eam tangentis proprietatem, quam ad diametros in Ellipsi pertinere vidimus, in hyperbolæ quoque diametris demonstrare. Primo quidem esto CAG primus axis, linea DG cum eo angulum faciat $= \mu$. Vocatis $CG = z$, $DG = \mu$, demonstratum est num. 10., hanc valere æquationem

$$\mu^2 \frac{b^2.Sc.\mu - c^2.Cc.\mu}{r^2} = z^2 - \frac{2z\mu.Cc.\mu}{r} - b^2, \text{ seu}$$

$$\mu^2 + 2\mu \frac{r^2.Cc.\mu.z}{r^2.Cc.\mu} = \frac{z^2 z^2 - r^2 b^2 c^2}{r^2 z^2 - r^2 b^2 c^2}. \text{ Ex hac colli-$$

gimus, duos esse valores μ . Donec $z > CA$, eorum alter est positivus, alter negativus; si $z = CA$, ex valoribus unus $= 0$; si denique $z < b$, valor uterque aut positivus erit, aut negativus; decrescente magis z valores μ ad æqualitatem accedunt, qua habita tangens quoque habetur. Hæc sit TI (Fig. 3.) & ducatur IS ad axem normalis. Necessè est, valorem z determinare, quo posito duæ æquationis radices æquales sunt. Id ut eveniat esse debet

$$r^2 c^2 b^2 - z^2 = \frac{r^2 c^2.Cc.\mu.z^2}{b^2.Sc.\mu - c^2.Cc.\mu}, \text{ seu } z^2 = b^2 - \frac{c^2.Cc.\mu}{Sc.\mu}; \text{ sed voca-$$

tis $CT = z$, $CS = x$, $SI = y$, $ST = x - z$, habemus $y : x - z :: Sc.\mu : Cc.\mu$

Cc, μ ; ergo substitutione facta $z^2 = b^2 - \frac{c^2 \cdot x - z^2}{y^2}$, sed ex curvæ æquatio-

ne est $\frac{c^2}{y^2} = \frac{b^2}{x^2 - b^2}$; ergo $z^2 = b^2 - \frac{b^2 \cdot x - z^2}{x^2 - b^2}$, seu $z^2 x^2 - b^2 z^2 = b^2 x^2 - b^4 + 2b^2 z x - b^2 z^2$, & in unam partem reductis terminis, iis, qui $-b^2 x^2$ delectur, deletis $z^2 x^2 - 2b^2 z x + b^4 = 0$, & radice extracta $zx - b^2 = 0$, seu $zx = bb$; ergo $x : b :: b : z$, sive $CS : CA :: CA : CT$.

28. Haud ita tamen hæc proprietates axem sequitur, ut reliquis diametris respicere videatur. Intelligantur enim esse CA, CB duæ diametri conjugatæ non se orthogonaliter secantes, quæ vocentur m, n . Ad has spectat æquatio $m^2 y^2 = n^2 x^2 - m^2$. Vocetur angulus $DFC = v$, & ducatur DG efficiens cum CA angulum $DGC = \mu$, ut sit angulus $FDG = v - \mu$. Quærat æquatio inter $CG = z$, & $GD = u$. Habebimus $y : u :: Sc, \mu : Sc, v$; ergo $y = \frac{u \cdot Sc, \mu}{Sc, v}$.

Præterea est $u : FG :: Sc, v : Sc, \pi - \mu$; ergo $FG = \frac{u \cdot Sc, \mu - \pi}{Sc, v}$; ergo $x = z - \frac{u \cdot Sc, \mu - \pi}{Sc, v}$, quibus valoribus in æquatione substitutis ea est

$$\frac{m^2 z^2 \frac{u^2}{Sc, v^2}}{Sc, v^2} = n^2 z^2 - \frac{2zn \cdot Sc, \pi - \mu}{Sc, v} + \frac{n^2 \frac{u^2}{Sc, v^2} - m^2}{Sc, v^2}$$

$$\text{seu } \frac{m^2 \frac{u^2}{Sc, v^2} - n^2 \frac{u^2}{Sc, v^2}}{Sc, v^2} \cdot u^2 + \frac{2zn \cdot Sc, \pi - \mu}{Sc, v} = n^2 z^2 - m^2 n^2$$

$$\text{seu } u^2 + \frac{2n^2 \cdot Sc, v \cdot Sc, \pi - \mu \cdot zu}{m^2 \cdot Sc, \mu - n^2 \cdot Sc, v - \mu} = \frac{n^2 z^2 \cdot Sc, v^2 - m^2 n^2 \cdot Sc, v^2}{m^2 \cdot Sc, \mu - n^2 \cdot Sc, v - \mu}$$

ut duæ radices, idest, duo valores u æquales sint, necesse est, ut quadratum dimidii coefficientis u , una cum homogeneo comparationis sit $= 0$. Ideo expurgata

$$\text{formula reperietur } \frac{n^2 \cdot Sc, v - \mu \cdot z^2}{m^2 \cdot Sc, \mu - n^2 \cdot Sc, v - \mu} + z^2 - m^2 = 0; \text{ ergo}$$

$$\frac{m^2 \cdot Sc, \mu \cdot z^2}{m^2 \cdot Sc, \mu - n^2 \cdot Sc, v - \mu} = m^2; \text{ ergo } z^2 = m^2 - \frac{n^2 \cdot Sc, v - \mu}{Sc, \mu} \text{ in}$$

in hac hypothefi $CT = z$, TI tangens, voceturque $CS = x$, ordinata $IS = y$,
 $ST = x - z$: habemus $y : x - z :: Sc. n : Sc. n - \mu = \frac{x - z \cdot Sc. u}{y}$; quo va-

lore fubstituto est æquatio $z^2 = m^2 - \frac{n^2 \cdot x - z^2}{y^2}$; fed ex æquatione curvæ est

$$\frac{n^2}{y^2} = \frac{m^2}{x^2 - m^2}; \text{ ergo } z^2 = m^2 - \frac{m^2 \cdot x - z^2}{x^2 - m^2}, \text{ ex qua, ut in num. fupiore,}$$

cructur $z^x = mm$, feu $x : m :: m : z$, idest $CS : CA_1 : CA : CT$.

29. Eandem proprietatem in fecunda etiam diametro locum habere, fic demonftrari potefl. Producat in IT , donec fecundam diametrum fecet in t .

Eft $TS = x - z = \frac{x^2 - m^2}{x} = \frac{m^2 y^2}{n^2 x}$; fed $TS : SI :: CT : Ct$, feu $\frac{m^2 y^2}{n^2 x} : \frac{m^2}{n^2} : Ct = \frac{y}{x}$; ergo $y : n :: n : Ct$; unde, ducta Is parallela CS , habemus

$Cs : CB :: CB : Ct$.

30. Ex verticibus A , a diametro Aa ducuntur tangentæ parallele diameteri conjugatæ, quæ tangenti TI occurrant in punctis X, x . Ut demonftravimus est $CS : CA :: CA : CI$; ergo dividendo

$CS : AS :: CA : TA$, & permutando
 $CS : CA :: AS : TA$, & componendo
 $CS + CA = AS : CA :: TS : TA$, & permutando

$a S : TS :: CA : TA$, & dividendo
 $a T : TS :: CT : TA$; atqui propter triangula fimilia hifce quatuor lineis proportionales funt alix quatuor ax, SI, Ct, AX ; ergo $ax : SI :: Ct : AX$;

ergo $AX. ax = IS. Ct = Cs. Ct = \overline{CB^2}$; igitur $AX. ax = CB^2$, feu $AX : CB :: CB : ax$.

31. Ut ea abfolvamus, quæ ad peculiare hyperbolæ proprietates fpectant, fupereft, ut de illius æquatione ad afymptotos agamus. Sit itaque hyperbola DAE , cujus afymptoti $CH, (Fig. 4.) CK$, axis CAF , & tangens PAQ axi fecundo æqualis. Ordinetur HEK , & vocetur $EK = u, CF = x$. Quæramus æquationem inter x, u . Quoniam ex triangulis fimilibus habemus $FH = FK = \frac{cx}{b}$, erit $EH = \frac{2cx}{b} - u$; fed reftangulum $HEK = PA = c^2$; ergo

$c^2 = \frac{2cxu}{b} - u^2$. Majoris elegantix cauffa fit afymptotorum fimiangulus, idest angulus $ACQ = r$, erit $b : c :: Cc. : Sc. :$; ergo $c^2 = \frac{2 \cdot Sc. : \cdot xn - u^2}{Cc. :}$.

Quam æquationem ut ad abfciffam $CK = z$ transferamus, fufficit advertere, valere analogiam $Cc. : r :: x : z$; unde $x = \frac{Sc. :}{r}$; igitur fubftitutione facta

$c^2 = \frac{2 \cdot Sc. : \cdot zn - u^2}{r^2}$.

32. Ducatur jam quilibet EM, quæ angulum cum asymptoto faciat = μ . Vocato recto angulo = ω , erit angulus MEF = $\omega - \nu + \mu$; ergo sinus anguli MEK =

$$\frac{Sc. \omega - \nu + \mu}{Sc. \omega - \nu + \mu} = \frac{Sc. \omega - \nu + \mu}{Sc. \omega - \nu + \mu} = \frac{Sc. \omega - \nu + \mu}{Sc. \omega - \nu + \mu}$$

$\frac{Cc. \nu \cdot Cc. \mu + Sc. \nu \cdot Sc. \mu}{Cc. \nu \cdot Cc. \mu + Sc. \nu \cdot Sc. \mu} = Cc. \nu \cdot Cc. \mu + Sc. \nu \cdot Sc. \mu$. Hisce positis invenitur æquatio inter

ter CM = x , & ME = y . Habebimus $Cc. \nu : Sc. \nu :: y : x = \frac{y \cdot Sc. \nu}{Cc. \nu}$. Pra-

eterea $y : MK :: Cc. \nu : Cc. \mu$; ergo $z = x + \frac{y \cdot Cc. \mu - 1}{Cc. \nu}$, adeoque substitu-

$$\text{tionum opo } c^2 = \frac{2 \cdot Sc. \nu \cdot xy}{Cc. \nu} + y^2 \frac{Sc. \mu \cdot Cc. \mu - 1}{Cc. \nu^2} - y^2 \frac{Sc. \mu^2}{Cc. \nu^2}$$

$$\text{seu } c^2 = 2xy \frac{Sc. \nu \cdot Sc. \mu}{r \cdot Cc. \nu} + y^2 \frac{2 \cdot Sc. \nu \cdot Sc. \mu \cdot Cc. \mu - 1 - r \cdot Sc. \mu^2}{r \cdot Cc. \nu^2}. \text{ Si re-}$$

ctæ EM sit parallela asymptoto CH, in qua hypothesi $\mu = 2\nu$, & $\mu - \nu = \nu$,

$$\text{erit } c^2 = 2xy \frac{Sc. \nu \cdot Sc. 2\nu}{r \cdot Cc. \nu} + y^2 \frac{2 \cdot Sc. \nu \cdot Sc. 2\nu \cdot Cc. \nu - 1 - r \cdot Sc. 2\nu^2}{r \cdot Cc. \nu^2};$$

$$\text{sed } Sc. 2\nu = \frac{2 \cdot Sc. \nu \cdot Cc. \nu}{r}; \text{ ergo quum terminus ultimus destruat facta}$$

$$\text{substitutione, erit } c^2 = 4xy \frac{Sc. \nu^2}{r^2}, \text{ seu } \frac{c^2}{4 \cdot Sc. \nu^2} = xy, \text{ adeoque constans}$$

est rectangulum coordinatarum. Quapropter si detur æquatio $fg = xy$, statim cognoscimus, eam ad asymptota hyperbolæ pertinere. Igstur si linea abscissarum sit CGK, ducatur CH, quæ angulum faciat HCK complementum ad duos rectos anguli coordinatarum CGB, & accepta deinde CG = f , ductaque GB = g parallela asymptoto CH, hyperbola inter asymptota CH, CK transiens per punctum B locus erit nostræ æquationis.

33. Descriptæ autem hyperbolæ inter data asymptota CH, CK, quæ transeat per datum punctum B, duo axes facillime determinantur. Angulum asymptotorum HCK bisariam dividat recta CF; ea dat primi axis positionem. Per datum punctum B normalis ad CF ducatur LBI, & media proportionalis invenitur inter IB, BL, quæ orthogonaliter applicetur in AP, A Q; dicimus CA esse primum semiaxem, AP, aut A Q secundum, cujus rei demonstratio ex dictis satis patet. Patet etiam rectam CE esse diametrum, quæ dividet bisariam chordas omnes parallelas rectæ tangenti hyperbolam in puncto E. Sit hæc RES. Hæc ex dictis bisariam dividetur in E; ergo quum similia sint triangua SME, SCR, erit CM = MS, quæ est simplex proprietas tangentis hyperbolam.

34. Postulat hic ratio, ut non prius capiti finem imponamus, quam ea de generalissima formula tradiderimus, quæ adhuc videntur desiderari. Hactenus do-

do-

docuimus, eam non ad alias curvas pertinere, præter quam ad parabolam, ad ellipsim, & ad hyperbolam, quotiescumque in ea non desit terminus y^2 . At si ille terminus absit, probandum nunc est, formulam ad hyperbolam tantum spectare. Terminus y^2 deficiente formula semper ita exprimi poterit $xy + mx^2 + px + ny + q = 0$. Si fiat $y + mn + p = u$, nova oriatur æquatio $xu + nu - mnx - np + q = 0$. Nunc videamus, quænam acciderit curvæ mutatio ex hac substitutione. Esto PQ (Fig. 5.) curva æquationis; sint AB = x , BC = y , quæ unicum tantum valorem habet. Ut inveniamus u , oportet prius addere quantitati y quantitatem p ; igitur ex puncto A ducatur AF = p parallela ordinatis, & ex F ducatur FG parallela AB. Erit GC = $y + p$, & FG = $x = AB$. Oportet secundo addere etiam mx , id est lineam quæ ita se habeat ad x quemadmodum m ad unitatem. Sit itaque FO : OK :: 1 : m posita OK parallela ordinatis: duc FK; manifestum est GH parallelam OK esse = mx propter similia triangula; ergo CH = $y + mx + p = u$. Ita inventa est æquatio inter FG, CH. At transfundendum est ad æquationem inter FH, CH, ut ordinatæ desinant in abscissas. Hac de causa fiat FO : FK :: 1 : k , unde vocata FH = z erit $x : z :: 1 : k$, adeoque $x = \frac{z}{k}$; ergo adhibita substitutione $\frac{z}{k} + nu - \frac{mnz}{k} - np + q = 0$, seu $zu + nkz - mnz - nkp + kq = 0$. Nihil itaque mutatum est, sed tantum æquatio translata a linea AB ad FH.

35. Sed substitutiones prosequamur. Sit $z + nk = x$, unde $z = x - nk$.

Substituendo habebimus $xu - mnx + mn^2k - nkp + kq = 0$. Accipiatur ED = nk , erit DH = $z + nk = x$, manente adhuc HC = u . Fiat præterea $u - mn = y$, erit $xy + mn^2k - nkp + kq = 0$. Posita igitur parallela ordinatis DE = mn , & ducta EI parallela DH, erit IC = $u - mn = y$, & EI permanet = x . Ex quibus omnibus patet assumptam æquationem non esse postrema hac magis aniversalem, quæ quum ad hyperbolam inter asymptota pertineat, eodem etiam prima spectabit.

36. Verum quidem est, tria posse evenire in ultima æquatione; fieri enim potest, ut summa terminorum, qui noti sunt vel = 0, vel sit negativa, vel positiva. Sed hæc novam difficultatem non parant. Namque si sit = 0, locus efformabitur a duabus rectis, quæ coincidunt cum asymptotis; si sit quantitas negativa, abscissis positivis respondebunt positivæ ordinatæ, & vice versa abscissis negativis ordinatæ negativæ; si tandem sit positiva, positivæ abscissæ ordinatas habebunt negativæ, & viceversa. Hæc de linearum secundi ordinis divisione, deque peculiaribus earum proprietatibus dicta sufficiant.

CAPUT QUARTUM.

De generalibus quibusdam linearum secundi ordinis proprietatibus, quæ ex earum æquatione eruuntur.

1. **R**evertimur nunc ad generalissimam æquationem, eamque secundum y hoc pacto ordinamus $y^2 + y \cdot \sqrt{lx + n + mx^2 + px + q} = 0$. Hæc secundi gradus quum sit, duos dabit valores ordinatæ y aut ambos reales, aut ambos imaginarios; si casus tamen excipiat, in quo desit terminus y^2 , ubi unicus est valor y semper realls, aut potius e duobus alter sit infinitus. Proprium autem est æquationum secundi gradus, ut radicem duarum summa æquatis sit secundi termini coefficienti signis contrariis accepto. Itaque duarum valorum y summa erit $= -lx - n$. Estio linea secundi gradus FKE, (Fig. 1.) in cujus linea abscissarum AB capiatur $AB = x$, & huic respondeant ordinatæ BD, BE. Habebimus igitur $BD + BE = -lx - n = -l \cdot AB - n$. Accepta deinde alia abscissa AH, cui ordinatæ duæ respondeant HF, HG, erit $HF + HG = -l \cdot AH - n$. Jam vero ductis FP, GQ parallelis lineæ abscissarum, & subtracta secunda æquatione e prima prodit $BD - HF + BE - HG = -l \cdot AB + l \cdot AH$, idest $PD - QE = -l \cdot HB$, seu $QE - PD = l \cdot HB$; ergo differentia inter QE, & PD est ad HB interceptam inter utramque ordinatam in data ratione $l:1$. Accipienda autem est linearum QE, PD differentia, quia quum in partes oppositas tendant, altera respectu alterius haberi debet ut negativa.

2. Cæterum si in easdem abirent partes, eorum summa esset accipienda, ut patet in ordinatis $2H_2F, 2H_2G$. Valebunt namque æquationes $BD + BE = -l \cdot HB - n$, $2H_2F - 2H_2G = -l \cdot A_2H - n$; ergo ductis $2F_2P, 2G_2Q$ parallelis lineæ AB, & subtractione facta secundæ æquationis a prima erit $BD - 2H_2F + BE + 2H_2G = -l \cdot AB + l \cdot A_2H$, seu $2PD + 2QE = l \cdot B_2H$; igitur summa linearum $2PD, 2QE$ ad abscissarum differentiam, sive ad interceptam B_2H erit in data ratione $l:1$.

3. Intelligamus rectam BED sibi semper parallelam moveri, donec tangens fiat, & abeat in LK. Hoc motu constat, puncta sectionis E, D accedere ad seles paulatim, donec in contactus idem punctum K conveniant, in quo radices ambas æquales fieri, satis est manifestum. Nunc ducta KM abscissis parallela, habebimus eodem, quo antea, artificio $ME = MD:LB$, seu $KM::l:1$, idest in ratione data. Sit pariter alia HGF ordinatis parallela, prohibet $NG = NF:KN::l:1$; ergo erit $ME = MD:KM::NG = NF:KN$. Hinc facile inferretur, quod posita $ME = MD$, unde $ME = MD = 0$, erit pariter $NG = NF = 0$, & $NG = NF$. Hinc proprietates illa sequitur, quam superioribus capitibus ad peculiare curvas parabolam, ellipsim, & hyperbolam pertinere jam demonstravimus; scilicet lineam e contactu ductam, quæ bifariam dividat chordam aliquam tangenti parallelam, reliquas omnes eadem ratione dividere.

4. Ex alia quadam linearum æquationum proprietate productum radicem æquat terminum ultimum æquationis; igitur in eadem, qua antea, hypothefi erit $BE \cdot BD = mx^2 + px + q$. Si in generalissima æquatione sit $y = 0$, inveniemus

mus $m x^2 + p x + q = 0$, seu $x^2 + \frac{p}{m} x + \frac{q}{m} = 0$, cujus formulæ si radices am-

bæ reales fuerint, necesse est prorsus, ut linea abscissarum curvam in punctis duobus I, O fecerit, ut ita AI, AO esse possint radices duæ. Igitur erunt $x - AI$, $x - AO$ duo formulæ factores, qui inter se multiplicati formulam

ipsam $x^2 + \frac{p}{m} x + \frac{q}{m}$ restituant; ergo $BE \cdot BD = m \cdot x - AI \cdot x - AO$; sed

$x = AB$; ergo $BE \cdot BD = m \cdot AB - BI \cdot BO = m \cdot BI \cdot BO$. Itaque rectangulum $BE \cdot BD$ est ad rectangulum $BI \cdot BO$:: $m : 1$, seu in data ratione. Quod si alia quoque ordinata priori parallela esse intelligatur HGF, eodem pacto inveniemus $HG \cdot HF : HI \cdot HO :: m : 1$; igitur erit

$BE \cdot BD : BI \cdot BO :: HG \cdot HF : HI \cdot HO$. Idem accidit siue pun-

ctam sectionis intra curvam cadat siue extra; adeoque theorema oritur universale. Si duæ rectæ datis parallele curvam in duobus punctis fecerit, rectangula sub interceptis inter punctum concursus linearum & puncta sectionum cum curva sunt in data ratione.

5. Si duo sectionum puncta in unum concurrant, quod fit, quum secans linea in tangentem vertitur, veluti LK, tunc, factis æqualibus radicibus, erit quadratum LK ad rectangulum OLI :: rect. DBE : rect. OBI, seu in constanti, ut antea, ratione. Si vero diameter habeatur veluti KMR curvæ in duobus punctis K, R occurrens, erit $KN \cdot RN : NF \cdot NG = NF^2 : KMRM$; $MD \cdot ME = MD^2$, quam proprietatem in curvis supra explicatis veram esse, demonstravimus.

6. Ex hisce proprietatibus, quæ ex generalissima æquatione immediate profluunt, aliæ quoque descendunt, quibus omnes pariter secundi gradus lineæ prædictæ reperiuntur. (Fig. 2.) In primis rectæ duæ ex puncto A ductæ curvam in punctis I, O, M, N fecerit. Lineæ AN parallela sit DE, quæ lineam alteram in C interfecit, cui parallela FG fecit AN in H. Si AO fiat lineæ abscissarum, erit $AI \cdot AO : AM \cdot AN :: CI \cdot CO : CD \cdot CE$. Si deinde tangentem lineam abscissarum consideremus AN, habebimus

$AM \cdot AN : AI \cdot AO :: HM \cdot HN : HF \cdot HG$; ergo $CI \cdot CO : CD \cdot CE :: HF \cdot HG : HM \cdot HN$. Igitur si duæ habeantur lineæ si mutuo, & curvam in duobus punctis interfecantes, hisque duæ aliæ sint parallele, quæ idem præsentent, erunt proportionalia rectangula sub interceptis inter punctum intersectionis linearum, & puncta, in quibus secantur a curva, adeoque erunt in ratione aliqua constante.

7. In linea secundi ordinis duæ chordæ sint parallele AB, CD, rectisque AC, BD (Fig. 3.) junctis, claudatur quadrilaterum ABDC, & ex quolibet curvæ puncto M ducatur MN parallela lateribus AB, CD: dicimus interceptas PM, QN æquales fore. Etenim recta, quæ bisariam dividit AB, CD, eadem ratione fecit MN; sed ex vulgari geometria recta eadem bisariam dividit etiam PQ; ergo quum in puncto eodem bisariam dividantur rectæ MN, PQ, erit necessario $PM = QN$, & quod consequens est $MQ = NP$. Itaque si quinque habeamus nota curvæ puncta A, B, D, C, M, facile est sextum N invenire.

8. Demonstratum est paullo ante $MQ \cdot QN : BQ \cdot DQ$ esse in ratione constante; ergo quoniam $NQ = MP$, in ratione eadem fit oportet $MP \cdot MQ : BQ \cdot DQ$. Hæc vera sunt quicumque sit locus puncti M in curva, ut facile

V

appa-

apparet. Quare si quodlibet aliud accipiat punctum K, ex quo chordis AB, CD sit parallela GH occurrens lateribus productis in G, H, erit in constante ratione omnino eadem KH.KG:HB.HD. Si per punctum M ducatur RMS parallela lateri BD, quæ chordis AB, CD occurrat in punctis R, S, quoniam RM=BQ, & MS=QD, erit MP.MQ:MR.MS in constanti ratione. Itaque si ex eodem curvæ puncto M dux rectæ ducantur MQ, RS, quarum prima chordis AB, CD parallela reliqua duo latera fecerit in punctis P, Q, altera vero parallela lateri BD chordas parallelas inveniat in R, S, semper habebimus MP.MQ in ratione constanti ad MR.MS.

9. Si pro CD sit quælibet alia chorda DK, & jungatur AK, & RMS producatur, donec in V fecerit ipsam DK, habemus quadrilateri ABDK latera intersecta a quacumque MQ parallela chordæ AB in punctis T, Q, & ab RV parallela lateri BD in punctis R, V, quæ dux linearum ex eodem veniunt puncto M ad arbitrium sumpto. His positis erit MT.MQ:RM.MV in eadem constanti ratione. Ut id demonstretur, animadvertendum est, esse MP.MQ:BQ.DQ::KG.KH:BH.DH, sive MP.MQ:MR.MS::KG.KH:BH.DH; sed similia sunt triangula APT, AGK, item DSV, DHK; ergo ex primis TP:AP::KG:AG, & AP:BQ::AG:BH; ergo rationibus invicem multiplicatis TP.AP:BQ.AP::KG.AG:BH.AG, seu TP:BQ::KG:BH. Triangula alia exhibent DS=MQ:SV::KH:DH; ergo multiplicatis rationibus TP.MQ:BQ.SV::KG.KH:BH.DH, seu posita MR pro sibi æquali BQ fiet TP.MQ:MR:SV::KG.KH:BH.DH, quam analogiam si comparemus cum superiore

MP.MQ:MR.MS::KG.KH:BH.DH, habebimus MP.MQ:MR.MS::TP.MQ:MR.SV; ergo accepta antecedentium, & consequentium summa, erit MQ.MP+TP:MR.MS+SV::MP.MQ:MR.MS, seu MQ.MT:MR.MV::MP.MQ:MR.MS; igitur duobus ad libitum punctis K, M acceptis in curva, ratio MQ.MT:MR.MV eadem erit semper, dummodo MQ, RV parallelæ sint chordis AB, BD.

10. Nunc si postremæ analogiæ antecedentes dividantur per MQ, & consequentes per MR, oritur MT:MV::MP:MS. Hinc quoniam mutatio puncti K nihil aliud præstat, quæ puncta intersectionum T, V ad alia loca transferre, patet constantem fore rationem MT:MV, ubicumque punctum K accipiat in curva, donec immota maneat punctum M.

11. Ex hisce generalissima quædam infertur linearum secundi ordinis proprietas. Data sint in qualibet ex his curvis puncta quatuor A, B, C, D, (Fig. 4.) quæ jungant rectæ ita, ut quadrilaterum perficiatur ABCD. Si ex quocumque ejusdem curvæ puncto M ad quadrilateri latera rectæ quatuor ductæ intelligantur MF, MK, MG, MH, quæ angulos datos efficiant, erit rectangulum sub duobus tendentibus ad latera opposita in constanti ratione ad rectangulum sub duobus reliquis, hoc est MF.MG:MH.MK in ratione constanti. Hoc ut demonstretur, ex M sint dux rectæ, MQ parallela ad AB secans latera AD, BC in P, Q, & RMS parallela lateri BC reliquis duobus occurrens in K, S. Ex demonstratis constans est ratio MR:MS:MP.MQ; sed propter datos angulos F, G, H, K rationes MR:MR:MS:MG, MP:MH, MQ:MK omnes datæ sunt: ergo MF.MG:MH.MK est in ratione constanti.

12. Sit CBA (Fig. 5.) tangens lineam secundi ordinis, ex qua ductæ

duz parallelæ BE, CG curvam secant in punctis D, E, F, G. Demonstravimus esse $BA^2 : CA^2 :: BD \cdot BE : CF \cdot CG$. Inter duas BD, BE abscindatur media proportionalis BH, & pariter CK media proportionalis inter CF & CG; erit igitur $BD \cdot BE = BH^2$, $CF \cdot CG = CK^2$; ergo $BA^2 : CA^2 :: BH^2 : CK^2$; ergo $BA : CA :: BH : CK$; igitur puncta omnia H, K &c. erunt in linea recta, quæ per contactum transibit. Itaque si recta e contactu discendens ita BE secet in H, ut BH sit media proportionalis inter BD, BE, quamcumque aliam lineam parallelam BE secabit eodem pacto in K, ut sit CK media proportionalis inter CF, CG; & si recta quædam ita dividit BE, CG, ea per contactum transibit. De iis hætenus proprietatibus egimus, quibus maximus Newtonus usus est, ut plurima solveret problemata ad descriptionem linearum secundi ordinis pertinentia. Ex hisce aliz proprietates erui possent; verum quum tribus superioribus capitibus plura de iis dicta sint, ubi de tribus earum speciebus agebamus, ea sufficere existimamus.

CAPUT QUINTUM.

De descriptione linearum secundi gradus.

1 AD describendas lineas secundi ordinis veteres geometrice conum, aut cylindrum plano secuerunt. De sectione cylindri tractavit Serenus philosophus atheniensis; de sectione cono, quomquam ante Apollonium Pergæum, non nemo loquutus fuit, tamen Apollonius ita theoriam hanc perfecit, ut illi nunc referenda esse videatur. Exordiamur a sectione cylindri, & examinemus, quænam linearum secundi gradus ab hac sectione oriuntur. Positis circulis duobus APB, MQN (Fig. 1.) æqualibus, & parallelis, quorum centra jungat linea CD, agantur ad eandem plagam radii CB, DN, qui in eodem plano existant cum linea CD. Jungatur BN, quæ ita moveatur, ut puncta B, N eodem tempore arcus æquales percurrant BP, NQ; solidum, quod comprehenditur inter circulos parallelos, & superficiem genitam a motu lineæ BN, vocatur cylinder, circuli AB, MN bases cylindri, recta CD cylindri axis, recta DX, quæ a centro D ducitur normalis in planum circuli APB, dicitur altitudo cylindri. Si DX coincidat cum DC, cylinder vocatur rectus, si non coincidat, obliquus, seu, scalenus. Ex hac cylindri generi facile colliges, planum secans cylindrum per axem, aut per quamlibet axi parallelam exhibere in superficie cylindrica duas lineas rectas parallelas, similitè planum parallelum basibus præbere circumum isdem basibus æqualem.

2. Secetur jam cylinder plano KRH, (Fig. 2.) quod nec sit parallelum basibus, neque transeat per axem, aut ejus parallelam. Communis sectio hujus plani secantis, & plani basis AB sit recta L. Ducatur illa basis diameter AB, quæ, producta si opus est, incidat in L ad angulos rectos. Per AB, & per axem cylindri transeat planum AMNB, cujus extremæ lineæ AM, BN fignent in plano secante, & in superficie cylindrica puncta K, H. Junctæ KH, sumptoque in illa quolibet puncto Z, in plano AMNB ducatur per ZQP parallela AB, & æqualis. Per hanc rectam QP transeat planum QRP parallelum
 V 2 basi,

basi, quod, ut dictum est, præbebit circulum. Recta vero RZ communis sectio planorum KRH, QRP erit perpendicularis QP, quia L est perpendicularis AB. Divisa KH æqualiter in G, voco GH = b, GZ = x, ZR = y, erit KZ = b - x, HZ = b + x, demum voco QP = zc. Ex similitudine triangulorum KZQ, HZP resultant duæ analogiæ $ab : zc$ seu

$$b : c :: b - x : QZ \\ b : c :: b + x : PZ; \text{ ergo componendo rationes}$$

$$b^2 : c^2 :: bb - xx : QZ.PZ; \text{ atqñ ex proprietate circuli } QZ.PZ = RZ^2 = yy;$$

Ergo $b^2 : c^2 :: b^2 - x^2 : y^2$, quæ est æquatio ad ellipsim, cujus centrum G interior est abscissatum, axes vero conjugati sunt, major KH = 2b, minor = zc scilicet diameter basis. Sectio igitur plani, & cylindri curvam nullam exhibet aliam præter ellipsim.

3. Si æquales essent anguli QPH, KHP, fieret KH = QP seu $b = e$, & æquatio inventa in hanc mutaretur $bb - xx = yy$, quæ est æquatio ad circulum æqualem basi cylindri. Sectio hæc locum habet dumtaxat in cono scaleno, quia in recto quum QP sit normalis restis AM, BN, fieri nequit, ut angulus KHP = angulum rectum QPH. Vocatur autem hæc sectio subcontraria, quia, quem angulum facit QP cum BN, eundem facit HK cum AM. Quamquam in hac sectione planum non sit parallelum basi, tamen communis sectio plani, & cylindri est circulus æqualis circulo basis.

4. Ex his facile cognoscitur, quomodo per sectionem cylindri describatur ellipsis data, cujus axis major = 2b, minor = zc. Descripto enim circulo AB, cujus diameter AB = zc, eleva supra illum cylindrum rectum (sumo rectum, ut facilitati serviam, cæterum eadem valent etiam in scaleno) conceptoque plano quolibet per axem transeunte AMNB, inter parallelas AM, BN accommoda KH = 2b. Per KH transiens planum, quod sit normale plano AMNB, ita secabit cylindrum, ut sectio KRH sit ellipsis quæsitæ.

5. Ad conum transeo. Si ex puncto B (Fig. 3, 4) posito extra planum circuli AC ducatur ad circumferentiam indefinita BA, quæ statuo immobili puncto B in gyrum moveatur circa circuli peripheriam, superficies genita a linea AB dicitur superficies conica, solidum clausum ab hac superficie, & circulo AC dicitur conus, punctum B vertex, circulus AC basis, linea, quæ conjungit basis centrum, & verticem, axis, demum normalis a vertice ducta in basim dicitur altitudo cono, quæ si coincidat cum axe, conus erit rectus; si non coincidat, erit scalenus, aut obliquus. Superfluum judico demonstrare communem sectionem superficiei conicæ & plani ABC transeuntis per verticem B esse duas lineas rectas BA, BC; item communem sectionem ejusdem superficiei, & plani paralleli basi DNF esse circumferentiam circuli.

6. Secetur conus ABC a plano MN, quod nec transeat per verticem, nec sit parallelum basi. Ducatur in basi diameter AC, quæ sit perpendicularis communi sectioni plani secantis, & basis, & per A agatur planum ABC transeiens per verticem B, & Mm sit sectio communis hujus plani, & plani secantis. Ex punctis M, m parallelæ AC ducantur MR, mr, sumptoque in MN quocumque puncto N, per hoc agatur planum DN parallelum basi. Lineæ DNF erit peripheria circuli, cujus diametro DF erit perpendicularis NX communis sectio planorum MN, DNF. Vocetur Mm = s, MR = b, mr = c, NX = y, MX = x; quare in fig. 3. $mX = s + x$, in 4. $mX = s - x$. Ut utramque

com-

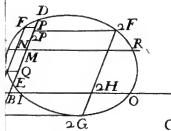


Fig. 3.

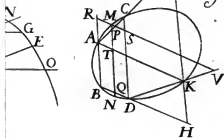
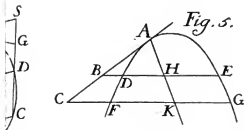
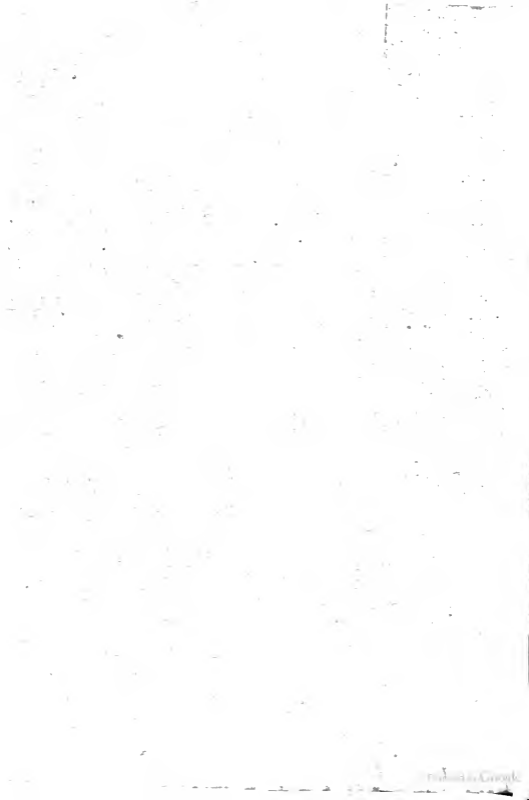


Fig. 5.





pletar voco $mX = a \pm x$, signum superius pertinet ad tertiam figuram, inferius ad quartam. Manifestum est, valere has analogias

$$a:b::a \pm x:XF \\ a:c::x:DX$$

ergo componendo rationes
 $aa:bc::ax \pm xx:DX.XF$; sed $DX.XF = XN^2 = y^2$ ex natura circuli; igitur $aa:bc::ax \pm xx:yy$. Si valeat signum superius, æquatio est ad hyperbolam, cujus axis primus $= a$, secundus $= \sqrt{bc}$; si valeat signum inferius, est ad ellipsim, cujus axis unus $= a$, alter $= \sqrt{bc}$. In utraque initium abscissarum est in vertice axis. Itaque si planum secet conos oppositos, generatur hyperbola; si unus tantum conus secetur, generatur ellipsis.

7. In hoc secundo casu, quum Mm secat latera BA, BC (Fig. 4.) in punctis M, m ad eandem partem verticis B , si angulus BmM sit $= BDF$, quæ sectio dicitur subcontraria, similia erunt triangula MXD, FXm : Ergo $XM:XD::XF:mX$; ergo rect. $MX.mX = DX.FX$; sed $DX.FX =$

NX^2 ; Ergo $MX.mX = NX^2$, quæ est proprietas circuli, cujus æquatio $ax - xx = yy$. Itaque perspicuum est in hac sectione $bc = aa$, seu $MR.mr = Mm$. Hæc sectio licet non parallela basi, per quam circulus generatur, locum non habet in cono recto, sed solum in scaleno.

8. Si punctum m in infinitum recederet a B , & Mm fieret parallela Bm , tum rectangulum $Xm.MX$ æquaret rectangulum $Mm.MX$, id est $ax \pm xx = ax$; igitur æquatio inventa $\frac{bc}{a} \cdot \frac{ax \pm xx}{a} = yy$ in hac muteretur $\frac{bc}{a}$.

$m = yy$, quæ est ad parabolam, cujus parameter $= \frac{bc}{a} = \frac{MR.mr}{Mm}$. In

hac parametri expressione duæ existunt lineæ infinitæ, quæ tamen proportionem habeant finitam, quæ proportio lineis finitis exprimenda, ut infinita ejiciantur. Puncto m in infinitum recedente $Mm = Bm$; sed $Bm:mr::BR:RM$; ergo

$Mm:mr::BR:RM$; ergo $\frac{mr}{Mm} = \frac{RM}{BR}$; ergo parameter parabolæ $= \frac{MR}{BR}$.

Itaque per sectionem plani, & cono omnes lineæ secundi ordinis obtinentur, quæ proinde sectionum conicarum nomen sortitæ sunt.

9. Dicendum nunc est, quomodo lineæ data secundi ordinis sit (Fig. 3.) per sectionem cono delineanda. Sit primum describenda hyperbola, cujus axis primus $= a$, secundus $= b$. Pone $Mm = a$, & ex punctis M, m ad eandem partem lineæ Mm , duæ ejusmodi parallellas MR, mr , quarum rectangulum $= bb$. Junge Rm, Mr sese necessario interfecantes in B . Formetur conus habens verticem B , cujus basis sit circulus descriptus diametro MR . Conus hic secetur per planum transiens per Mm ita, ut communis ejus sectio cum plano basis sit normalis diametro MR , lineæ MN , $m n$ in superficie conica signatæ cunctæ hyperbolæ præditæ axibus conjugatis a, b . Similis methodus tenenda est in ellipsi, cujus axis major $= a$, minor $= b$ (Fig. 4.); & hoc tantum observandum discrimen, quod lineæ MR, mr ducendæ sunt ad contrarias plagas respectu Mm . Reliqua ut supra peragenda (Fig. 3, 4). In hac descriptione possunt accipi lineæ MR, mr æquales inter se & singulæ æquales axi b . Quod si fiat, obtinetur in fig. 3 conus, qui ut antea factus dat hyperbolam, cujus axis æquantur Mm, MR ;

MR: in fig. 4. conus convertitur in cylindrum, & ea obtinetur descriptio ellipsis, de qua supra loquuti sumus.

10. Hæc hyperbolæ, & ellipsis descriptio plerumque nos ducit ad conum scalenum. Quod si quis conum rectum exoptaret, ita constituendæ essent parallelæ MR, mr, ut junctæ RM, Mr æquales fiat inter se. Problema hoc non est difficile, quum datæ supponantur MR, mr. En paucis solutionem. Pro casu hyperbolæ, in quo MR, mr (Fig. 5.) debent ad eandem partem jacere, super Mm describe semicirculum, applica MP æqualem semidifferentiæ inter MR, mr, quam producat, donec sit data MR, cui sit parallela mr. Pro casu ellipsis descripto semicirculo super Mm (Fig. 6.) applica mP, quæ sit æqualis majori mr, dempta semidifferentia inter mr, MR; producat mP. in r, donec habeatur data mr, cui sit parallela data MR. Cætera si peraguntur ut supra, ellipsis, & hyperbola obtinebitur per sectionem cono recti. Omitto facilem, & cuique obviam demonstrationem.

11. Nihil est facilius, quam delineare parabolam per cono sectionem. Nam duc quælibet MR, (Fig. 3, 4) cum qua faciat angulum recta RB tertia proportionalis post parametram, & RM, jungat BM. Formetur conus, cujus vertex sit B, basis circulus diametri RM; conum fecerit planum ita, ut communis hujus sectionis cum triangulo BRM sit parallela BR, & transeat per punctum M cæteris conditionibus ut antea servatis, curva genita in superficie cono erit parabola dati parametri. Si velis MR æqualem esse parametro, huic eidem ponenda: si æqualis RB. Ut autem obtineas conum rectum, divide RM in O bitariam, & eidem RM intellige erectam ex O perpendicularem. Accommoda inter punctum R, & perpendicularem hanc RB, quæ sit tertia proportionalis post parametrum, & RM, & conus formatus vertice B, super basi, cujus diameter sit RM, rectus erit. Si RM æquet parametrum, triangulum RBM erit æquilaterum.

12. Si quis peteret, ut per sectionem cono dati data curva describeretur, non semper hoc præstari posse, responderem: quando autem id possit, ostendendum est. Ac primum de hyperbola, atque ellipsi, cujus axis primus = a, secundus = b (Fig. 3, 4, 7). Conus datus sit ABC. Super Mm = a describatur circuli segmentum MV m capiens cono angulum MBm, qui in hyperbola est externus cono, in ellipsi internus: diameter circuli normalis Mm sit YV. Fiat $\frac{BA \cdot BC \cdot bb}{AC^2 \cdot YV} = Q\dot{B}$, quæ in segmento MVm applicetur norma-

liter ad Mm, ut signet in circumferentia punctum B. Jungatur BM, cui setetur æqualis BM; tum centro M intervallo Mm = a signetur punctum m, quod pro hyperbola sit in cono opposito, pro ellipsi in eodem. Si per Mm agatur planum, cujus sectio cum plano basis sit normalis AC, linea MN in superficie conica signata illa ipsa est, quæ quaeritur. Nam ex puncto B per centrum Z ducatur diameter BH, junganturque Hm, mB. Duo triangula HmB, BMQ præter angulos rectos habentia angulos æquales in H, M sunt similia; igitur H B, seu YV: Bm :: BM: BQ; ergo YV.BQ = Bm.BM; er-

$$\text{go } Bm \cdot BM = \frac{BA \cdot BC}{AC^2} \cdot b^2, \text{ five}$$

$$bb = \frac{AC^2 \cdot Bm \cdot BM}{BA \cdot BC}, \text{ \& quom } BM = Bm, Bm = Bm \text{ erit}$$

$$bb = \frac{AC^2 \cdot Bm \cdot BM}{AB \cdot BC}. \text{ Atqui habemus } mr : Bm :: AC : CB, \text{ ergo compo-}$$

$$MR : BM :: AC : AB, \text{ ergo compo-}$$

$$\text{nendo rationes proveniet } MR : Bm \cdot BM :: AC^2 : AB \cdot BC; \text{ igitur}$$

$$MR \cdot mr = \frac{AC^2 \cdot Bm \cdot BM}{AB \cdot BC} = bb; \text{ igitur axes sectionis delineatz sunt } a, b$$

Q. E. F.

13. Si recta BQ inveniatur minor, aut ad summum æqualis PV, quum

BQ possit in segmento applicari, constructio locum habebit, & per datum conum data hyperbola, vel ellipsis describetur. At si BQ inveniatur major PV, neque constructio perficietur, neque hyperbola aut ellipsis per datum conum delineabitur. Ut BQ sit > PV, debet $\frac{BA \cdot BC \cdot bb}{AC^2 \cdot YV} > PV$, seu $\frac{BA \cdot BC \cdot bb}{AC^2}$

$$> YV \cdot PV = YM^2; \text{ ergo extracta radice } \frac{b \sqrt{BA \cdot BC}}{AC} > VM, \text{ \& facta divi-}$$

$$\text{fione per } a, \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{BA \cdot BC}}{AC} > \frac{VM}{a}; \text{ atqui vocato angulo, qui continetur in}$$

segmento MVm = μ , & angulo recto = ω , est Mm = $a \cdot VM :: Sc \cdot 2\mu$:

$$Sc \frac{2\omega - 2\mu}{2} = Cc \cdot \mu; \text{ ergo } \frac{VM}{a} = \frac{Cc \cdot \mu}{Sc \cdot 2\mu} = \frac{r \cdot Cc \cdot \mu}{2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Cc \cdot \mu} = \frac{r}{2 \cdot Sc \cdot \mu}; \text{ ergo si}$$

$$\text{fit } \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{BA \cdot BC}}{AC} > \frac{r}{2 \cdot Sc \cdot \mu}, \text{ impossibile est curvam datam describere per da-}$$

tum conum, si autem fit \leq , aut æqualis, descriptio obtinebitur. Si conus fuerit rectus, palam est BA = BC; ergo si $\frac{b}{a} \cdot \frac{BA}{AC}$ sit $> \frac{r}{2 \cdot Sc \cdot \mu}$ constructio

non perficietur, secus voti compotes siemus. In ellipsi quum angulus segmenti

$$MVm = \mu = CBA, (\text{Fig. 4, 7}) \text{ erit } BA : \frac{1}{2} AC :: r : Sc \cdot \mu, \text{ erit } \frac{BA}{AC} =$$

$$\frac{r}{2 \cdot Sc \cdot \mu}; \text{ ergo solum descriptio fiet impossibilis, quom } \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{2 \cdot Sc \cdot \mu} > \frac{r}{2 \cdot Sc \cdot \mu}$$

sive quom $b > a$; quod semper evitare licet, possumus enim ponere datæ ellipsis axem majorem = a ; ergo licebit semper per datum conum rectum ellipsim datam delineare. (Fig. 3, 7) Non ita accidit in hyperbola, in qua angulus seg-

menti MVm non est æqualis angulo ABC, sed ejus complemento ad duos rectos;

rectos; ergo $BA : \frac{1}{2} AC :: r : Sc. \mu - \mu = Cc. \mu$; ergo $\frac{BA}{AC} = \frac{r}{2. Cc. \mu}$; igitur impossibilis est constructio, quoniam $\frac{b}{a} \cdot \frac{r}{2. Cc. \mu} > \frac{r}{2. Sc. \mu}$; seu quoniam $b > \frac{a. Cc. \mu}{Sc. \mu}$; in reliquis vero casibus data hyperbola per datum conum rectum describitur.

14. Quod spectat ad parabolam datam, illa quocumque dato cono facile delineatur. (Fig. 3, 4) Triangulum transiens per axem coni, & diametrum basis sit BAC. Sit vertex parabolæ M, qui inquiritur, & parallelam AC duc MR, quam voca = α . Habemus AC:BC:: α :BR = $\frac{BC. \alpha}{AC}$; ergo ex dictis parameter parabolæ, quam voco = a , erit = $\frac{AC. \alpha}{BC}$; ergo $\alpha = \frac{a. BC}{AC}$. Inter latera BC, BA applica MR, quæ sit quarta proportionalis post AC, BC, & parametrum datam, & per punctum M duc planam, cujus sectio communis cum basi sit normalis CA, cujusque sectio cum triangulo BAC sit parallela BC, sectio plani, & superficiæ conicæ erit parabola data. Ex his palam fit, non posse nos per datum conum obtinere lines omnes secundi gradus, sed solummodo omnes parabolas, & adhibita cautione, de qua diximus numero superiori, omnes elipses; verum hyperbolæ omnes per unum determinatum conum obtineri non possunt.

15. Tamen si per sectionem cono omnes lines secundi ordinis possimus delineare, tamen geometræ præsertim recentiores in id animum intenderunt, ut easdem lines describerent per semitam puncti, quod hoc instrumenti movetur opportunis quibusdam conditionibus conservatis. Nos hic eos modos seligimus, qui faciliores sunt, & praxi maxime accommodati. Primum modum delineandi parabolam describemus. Repræsentet recta DB (Fig. 8.) regulam immobilem, cui ad angulos rectos insilat alia regula CE ita mobilis, ut ubique in motu sitam retineat parallelum. Fili FMC, cujus longitudo æquat CE, extremitas una firmetur in puncto immobili F, altera alligetur regulæ mobili in puncto C. Ex F in DB duc normalem FR. In eam sitam transferatur EC, ut transeat per punctum F. Filum stilo distendatur, qui in prima positione dividet rectam FR bisariam in A; nam punctum C in hac positione quæ incidat in K, KA+AF ex præparatione = KR; ergo ablata communi KA remanebit AF=AR. Moveatur jam regula OE, & stilus partem fili MC retinens adjectam regulæ describat curvam AM, ajo, hanc fore parabolam, cujus vertex A, & cujus parameter = 2FR = 4AF. Ex puncto M ad angulos rectos ordina M P, quam voca = y , AP = x , AF = AR = b . Quoniam MC+MF = CE, dempta parte MC, remanebit MF = ME = RP; atqui RP = $b+x$, FP = $x-b$, & FM = $\sqrt{x^2 - 2bx + bb + yy}$; ergo $b+x = \sqrt{x^2 - 2bx + bb + yy}$, seu $bb + 2bx + xx = xx - 2bx + bb + yy$, seu $4bx = yy$, quæ est ad parabolam verticis A, & parametri = 4b. Igitur ut hac methodo delineetur parabola, nihil facienum est aliud, nisi ut secetur A F, AR singulæ æquales quartæ parti parametri, & reliqua ut antea peragantur.

16. Punctum F, ubi extremitas fili firmata est, dicitur focus, seu umbilicus parabolæ, qui a vertice A distat per quartam partem parametri. Recta DB
di-

distans pariter a vertice per parametri partem quartam, dicitur directrix. Itaque proprietates parabolæ hæc est, ut recta FM, quæ a quolibet puncto curvæ M ducitur ad focum F, sit æqualis ME, quæ ab eodem puncto M ducitur normalis in directricem. Agatur tangens MQ, & producatur in S, quæ, ut demonstratum est, abscindit AP = AQ; ergo habebimus QF = RP = ME = MF; igitur quum triangulum QFM sit isosceles, angulus FMQ = FQM; sed FQM = CMS; ergo FMQ = CMS, quæ est elegans proprietates tangentis parabolam.

17. Ellipsis describitur hoc modo. Firmentur duæ fili extremitates in duobus punctis immobilibus F, f (Fig. 9.); tum filus M retinens distentum filum in gyrum agatur, curva AMA ab ipso descripta erit ellipsis. Ex quolibet puncto M in Ff demittatur normalis MP = y, longitudo fili vocetur = 2a, divisa Ff bifariam in C, vocetur CF = b, CP = x; ergo FP = b - x, fP = b + x. Differentia inter Mf, MF vocetur = 2z; ergo MF = a - z, Mf = a + z. Ex angulo recto habemus MF² = FP² + MP², Mf² = fP² + MP²; aa - 2az + z² = bb - 2bx + xx + yy, ergo dempta prima æquatione ex aa + 2az + z² = bb + 2bx + xx + yy) secunda

$$4az = 4bx, \text{ sive } z = \frac{bx}{a}, \text{ qui valor in primam æquationem introductus præbebit}$$

$$aa - 2bx + \frac{b^2x^2}{a^2} = bb - 2bx + xx + yy, \text{ sive}$$

$$aa - bb - xx \cdot \frac{aa - bb}{aa} = yy, \text{ sive}$$

aa - xx : yy :: aa - bb, quæ est æquatio ad ellipsim, cujus semiaxis major = a, semiaxis minor = $\sqrt{aa - bb}$. Quapropter axis major est æqualis longitudini fili. Semiaxis minor sit CB, agatur FB, constat hanc esse æqualem dimidio longitudinis fili; ergo CB = $\sqrt{aa - bb}$, ut ex ipsa æquatione colligitur. Facillimum igitur est, ellipsim delineare, cujus dati sint axes. Sume si um æquale axi majori Aa, quem interseca per axem minorem Bb, ut punctum C utrumque dividat bifariam; inter angulos rectos ACB, a CB applica dimidium longitudinis fili in BF, Bf, puncta F, f illa ipsa erunt, in quibus extremitates fili sunt alligandæ.

18. Hæc puncta F, f vocantur foci, seu umbilici ellipseos. Quapropter si a focus ad quodlibet ellipsis punctum ducantur duæ FM, fM, harum summa æquabit axem majorem Aa. Si accipiat CR tertia proportionalis post CF, CA, ut CR = $\frac{aa}{b}$, & per punctum R agatur SR primo axi normalis; idemque

fiat ad alteram partem, ut inveniatur fr, istæ lineæ SR, fr dicuntur directrices, & referuntur ad focum sibi propiorem. Jam vero si ex quolibet puncto M curvæ ducantur MS normalis directrici, & MF ad suum focum, ajo fore MS:

$$MF :: a : b. \text{ Nam quoniam } CR = \frac{aa}{b}, \text{ erit } RP = MS = \frac{a^2 - bx}{b}; \text{ sed}$$

$$MF = \sqrt{b-x+y}^2 = \sqrt{b-x + \frac{aa-bb \cdot aa-xx}{aa}}$$

X

=

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2}{a^4 - a^2 x^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^2 - bx}{a^4 - 2a^2 bx + b^2 x^2}} = \frac{a^2 - bx}{a^2}$$

Ergo MS:MF:: $\frac{a^2 - bx}{b}$: $\frac{a^2 - bx}{a}$::a:b:AC:FC. Itaque puncto M ca-

dente in A habebimus AR:AF::AC:CF. Si b, hoc est FC=0, quæ hypothesis convertit ellipsim in circulum, fiet CR infinita. Circulus igitur est ellipsis, in qua foci coincidunt cum centro, directrices positæ sunt in infinita distantia. Si foret b=a, seu FC=AC, ut focus sit in vertice, nullest secundus axis, nempe CB=0; ergo ellipsis convertitur in lineam rectam directrici normalem. Si agatur tangens qMT, ajo angulum TMF=qMf. Ex duabus proportionibus CF:CA::CA:CR, CP:CA::CA:CT provenit tertia CF:CT::CP:CR, & dividendo CF:CT-CF=TF::CP:PR, & duplicando antecedentes Ff:FT::2CP:PR; atqui 2CP=CR+CP-PR=rP-PR; ergo Ff:FT::rP-PR:PR, & componendo fT:FT::Pr:PR: sed ductis in tangentem normalibus FQ, fq est fT:FT::fq:FQ; ergo fq:FQ::Pr:PR seu::Ms:MS; atqui Ms:MS::Mf:MF; ergo fq:FQ::Mf:MF; igitur triangula rectangula Mfq, MFQ sunt similia, adeoque angulus qMF=QMF, per quam proprietatem novus modus sese nobis offert ducendi tangentem ellipsis.

19. Simili prout modo delineatur hyperbola. In plani immobilis puncto f ita firmetur extremitas regulæ fMX, (Fig. 10.) ut circa punctum f libere regula rotari possit. In altero ejusdem plani puncto Falligetur filum, cujus altera extremitas alligetur regulæ punto X: longitudo vero filii sit minor regula fX ita, ut differentia sit minor Ff. Ponatur regula super Ff, & filum distendatur stilo qui cadet in A. Interim dum regula convertitur circa f, stilus retinens applicatam regulæ partem filii, illudque distendens describet hyperbolam AM. Ex puncto M duc in fF perpendicularem MP, divide Ft bifariam in C, & Aa, quæ pariter sit bifariam divisa in C, sit differentia regulæ, & filii. Voca CA=a, CF=b, CP=x, PM=y, summa reftarum Mf+MF=2x, erit MF=x-a, Mf=x+a. Triangula FMP, fMP præbent æqualitates duas

$$MF^2 = MP^2 + PF^2 \quad \text{five} \quad aa - 2ax + x^2 = yy + bb - 2bx + xx$$

$$Mf^2 = MP^2 + Pf^2 \quad \text{five} \quad aa + 2ax + x^2 = yy + bb + 2bx + xx$$

Detrahatur prima ab altera, & fiet 4ax=4bx, vel x= $\frac{bx}{a}$. Hic valor in pri-

ma æquatione collocetur, ut nascatur $aa - 2bx + \frac{b^2 x^2}{a^2} = yy + bb - 2bx + xx$

+xx, seu reducra æquatione xx-aa:yy::aa:b²-a²: quæ est æquatio ad hyperbolam, cujus semiaxis primus =CA=a, secundus = $\sqrt{bb-aa}$. Quapropter habes methodum describendi hyperbolam datam. Sit axis primus Aa, quem divide bifariam in C, ex A normalem CA duc AB dimidio secundi axis æq ualem, junge CB, cui fac æquales CF, Cf. In f pone regulam ut supra

pra, accipe filum, quod fit minus longitudine regulæ fX differentia Aa, extremitatibus fili firmatis in F, X per motum jam expositum hyperbola data delineabitur.

20. Puncta F, f dicuntur foci, seu umbilici hyperbolæ. Si ex quolibet puncto curvæ M ad focos agantur lineæ Mf, MF, harum differentia erit constans & æqualis primo axi. Si accipiantur CR, Cr, quarum singulæ = $\frac{a^2}{b}$, hoc est fiat tertiæ proportionales post CF, CA, & axi Aa normales agantur rectæ RS, rs, istæ dicuntur directrices, & illum habent focum, qui sibi est propior. Si ex quolibet puncto M normalis directrici RS sit MS, & ad suum focum F agatur MF, ajo fore MS:MF::a:b. Etenim quando CR = $\frac{a^2}{b}$, erit RP

$$= MS = \frac{bx - aa}{b}; \text{ atqui } MF = \sqrt{x^2 - b^2 + yy} = \sqrt{x^2 - b^2 + \frac{bb - ca, xx - aa}{aa}}$$

$$= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^1 x^2 - 2a^1 bx + a^1 b^2}{b^2 x^2 - a^2 b^2} + a^4} = \frac{1}{a} \sqrt{bx^2 - 2ba^1 x + a^4} = \frac{bx - aa}{a};$$

Ergo MS:MF:: $\frac{bx - aa}{b}$: $\frac{bx - aa}{a}$:: a:b:: AC:FC. Si CA = a = o,

tunc puncta A, R cadent in centro C, & hyperbolæ simul cum directricibus confundentur cum linea recta, quæ a centro C ducitur normalis Ff. Si b = a, hoc est coeant foci cum verticibus, secundus axis provenit = o; quare hyperbolæ coincident cum axe ex utraque parte producto. Duc tangentem MQq, ajo angulum fMQ = FMQ. Tangens lecet axem primum in T. Quoniam, CF:CA::CA:CR, item CP:CA::CA:CT, erit CF:CT::CP:CR & dividendo CF:CF - CT = TF::CP:PR, & duplicatis antecedentibus fF:TF::2CP:PR; atqui 2CP = CR + CP + RP = rP + RP; ergo fF:TF::rP + RP:RP, & dividendo

fT:FT::rP:RP; sed ductis in tangentem normalibus FQ, fq est fT:FT::fq:FQ; ergo fq:FQ::rP:RP, five Ms:MS; atqui Ms:MS::Mf:MF; ergo Mt:MF::fq:FQ. Triangula itaque rectangula fMq, FMQ sunt similia; ergo angulus qMf = QMF.

21. In præparatione instrumenti posui, filum minorum regulæ fX. Quod si filum majus regula acciperetur ita, ut differentia = 2a, stilus filum distendens motu suo delinearit hyperbolam oppositam am. Demonstrationem, quæ eadem est prorsus, lectorum industria relinquo. Si differentia inter regulam, & filum nulla esset, existente 2a = o, puncta A, a caderent in puncto medio C: in hoc casu stilus, qui filum distenderet, iter faceret per lineam rectam perpendicularem Ff.

22. Quamquam methodus hæc describendi tres sectiones conicas genuinæ est, & sæpe ad praxim perducî potest; tamen nonnihil deficiet, si exactissima desideretur curvarum descriptio. Nam si instrumentis aptentur filia, quum modo majorem, modo minorem pariantur distractionem a filo distrahente, non eandem ubique longitudinem conservabunt, adeoque exacte sectio conica non delineabitur. Si filis substituamus catenulas, vitabimus quidem distractionis periculum,

culum, sed non describemus curvam, sed polygonum multorum laterum licet exiguum, quod erit polygonum curvæ describendæ inscriptum. Illud instrumentum cæteris erit antelerendum, quod constat firmis solidisque regulis, quæ moventur; hoc enim adnotatis incommodis non laborabit. Quod pertinet ad hyperbolam, nullum, quantum mihi constat, suppetit instrumentum rigidis virgis compositum, quod quidem simplex sit, & praxi accommodatum. Duo autem ellipsis describendæ suppetunt fundata in duabus hujus curvæ proprietatibus, quæ modo sunt demonstrandæ; post, unum addemus idoneum parabolæ delineandæ.

23. Si inter rectas lineas ACa , BCb (Fig. 11.) facientes angulum rectum concipiatur moveri data linea ST : ajo quodlibet ejus punctum M describere ellipsim. Agatur MP parallela CB , & vocetur $SM = a$, $TM = b$, $CP = x$, $PM = y$. Quoniam valet proportio $SM : PC :: TM : PT$ five

$$a : x :: b : PT = \frac{bx}{a}; \text{ igitur propter rectangula triangula quum sit}$$

$$TM^2 = PT^2 + PM^2 \text{ habebimus æquationem}$$

$$b^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} + yy, \text{ five } a^2 - x^2 : y^2 :: a^2 : b^2, \text{ quæ est ad ellipsim, cujus semi-}$$

maxis unus est $CA = SM = a$, alter est $CB = TM = b$. Si punctum describens M cadat inter puncta S , T , ut in N , vocata $SN = a$, $NT = b$, nihil mutatur æquatio. Quod si N dividat ST bifariam, quum in hoc casu $c = b$, curva descripta erit circulus. In hac proprietate innotuit instrumentum ellipsis describendæ idoneum, quod circinus ellipsis solet appellari. Duobus modis data ellipsis per hoc delineatur. Primo modo capienda est $ST = a - b$, $SM = a$ (a , b sunt semiaxes dati), quare $TM = b$, & punctum describens erit M . Secundo modo capienda est $ST = a + b$, $SN = a$, ut $TN = b$, & punctum describens erit N .

24. Ad secundam methodum venio. Sit linea CL (Fig. 12.) mobilis circa punctum C , & circa punctum L in CL positum mobilis sit alia linea LTM . Abicinde $LT = CL$; tum punctum T jubeatur moveri in data recta CA transeunte per punctum C : ajo, lineæ LTM quodlibet punctum M descripturum ellipsim. Integra linea CLM vocetur $= a$, $TM = b$; ergo $CL + LT = a - b$, & $LT = CL = \frac{a-b}{2}$. Ex punctis M , L ducantur MP , LO normales in CT ; patens est CT fore divisam bifariam in puncto O . Vocetur $CP = x$, $PM = y$; ergo $TP = \sqrt{bb - yy}$, & $CT = x - \sqrt{bb - yy}$, & $CO = TO = \frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2}$; atqui est $LT : TM :: TO : TP$; ergo $\frac{a-b}{2} :$

$$b :: \frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2} : \sqrt{bb - yy}, \text{ five duplicando antecedentes, \& componendo}$$

$a : b :: x : \sqrt{bb - yy}$, & quadrando $a^2 : b^2 :: x^2 : b^2 - y^2$, quæ est ad ellipsim, cujus semiaxis major $CA = a$, minor $CB = b$. Si punctum describens caederet inter puncta L , T ut in N , curva descripta esset similiter ellipsis, cujus primus semiaxis foret $CL + LN$, secundus TN . Si punctum describens esset L , curva descripta evaderet circulus. Si punctum describens situm esset post punctum

puncta T, L ut in H; vel $LH = CL$, & tunc describitur linea recta normalis CA; vel $LH < CL$, & describitur ellipsis, cujus semiaxis minor $CQ = CL - LH$, & major $= CL + LH$; vel $LH > CL$, & ellipsis descripta habet semiaxem secundum $CR = LH - CL$, & primum $= CL + LH$. Hæc omnia eadem methodo demonstrantur. Itaque si per instrumentum ex hac lege constructum data sit describenda ellipsis, cujus semiaxis primus $= a$, secundus $= b$, accipiatur omnis longitudo $CLM = a$, $TM = b$, & fiet $CL = LT = \frac{a-b}{2}$; aut accipiatur $CL = LT = \frac{a+b}{2}$, $CL + LN = a$, ut

$NT = b$; aut sumatur $CL = LT = \frac{a+b}{2}$, $LH = \frac{a-b}{2}$; aut tandem.

$LH = \frac{a+b}{2}$, $CL = LT = \frac{a-b}{2}$; atque in omnibus hisce casibus data

ellipsis delineabitur. Quæ quum ita sint, perspicuum est ellipsim per instrumenta ex regulis solidis constructa, tutissime delineari.

25. Ad parabolam delineandam construi poterit aliud instrumentum, cujus fundamentum paucis aperiam. Linea CD (Fig. 13) perpendicularis datæ AB ita accommodetur, ut libere moveri possit motu sibi ipsi parallelo. Recta MN parallela sit datæ AB. In dato puncto A constituitur norma KAL mobilis circa punctum A. Ita moveatur norma, ut concursus linearum AL, CD semper permaneat in linea MN: æque concursus linearum AK, CD descripturum parabolam AFI, quæ in A tangetur a linea AB. Nam propter angulum rectum FAH erit $GH:AG::AG:GF$; ergo $GH.GF = AG^2$. Quum GH sit constans, fiat $= a$, $AG = x$, $GF = y$, igitur $ay = x^2$, quæ est æquatio parabolæ, cujus parameter $= a$, & cujus abscissæ $= x$ sumendæ sunt in tangente. Atque hæc sufficiant de descriptione linearum secundi gradus.

CAPUT SEXTUM.

De locis geometricis secundi gradus.

1. **L**ocus geometricus æquationis indeterminatæ continentis variables duas, si y est linea vel recta, vel curva, cujus coordinatarum proportio ab illa æquatione exprimitur. Locus geometricus æquationum primi gradus est linea recta; loci vero geometrici æquationum secundi gradus sunt sectiones conicæ. Theoria locorum secundi gradus certam ostendere debet methodum, quæ cognoscamus, ad quamnam sectionem conicam secundi gradus æquatio pertineat, loquesque tradere, quibus coordinatas æquationi respondentes assignemus. Plures excogitatæ fuerunt methodi ab analysi, ut id assequerentur, quas inter merentur laudem & ea, quam Craigius proposuit, & Marchio Hospitalius ornavit, & ea, quam Tom. 1. Ac. Pet. dedit Hermannus, quamque Vincentius Riccatus Tom. 1. Opus. in epistola ad Fantonum, suppletis quibusdam casibus difficilioribus ab Hermanno omisiss, perficit. Nos tamen, quamquam has ingeniosas, & utiles esse non inficiamur, eam hic amplectimur methodum; cujus auctor fuit Cl. Wit, non ideo tantum, quia hanc plerique sequuntur, sed quia

methodis est similior, quibus hæcenus usi sumus. Hujus autem methodi vis o-
mnis sita est, ut, opportunis adhibitis substitutionibus, æquatio proposita ad
aliquam e simplicioribus sectionum conicarum æquationibus perducatur; deinde
ut, curva descripta, & substitutionibus rite consideratis, abscissæ, & ordinatæ
determinentur, quæ propositæ æquationi satisfaciunt.

2. Primo igitur simplicissimas cujunque sectionis æquationes inspicere oportet,
atque alte animo inspicere. Si de Parabola sermo sit, ejus æquatio est
 $ax=yy$, in qua a est parameter, y ordinatæ, x abscissæ in diametro acceptæ,
quarum origo est in curva; quod si abscissæ in tangente accipiantur, æquatio
erit $ay=xx$. Si proponantur æquationes $-ax=yy$, $-ay=xx$, constat
eas esse ad eandem parabolam, & id haberi tantum discriminis, quod curva
primæ æquationis ad partem negativarum abscissarum erit describenda, secundæ
vero abscissa quæcumque vel positiva, vel negativa ordinatam habet negativam.

Quoad ellipticam, positæ semidiametris b, c , si abscissæ sumantur in diametro
 $=ab$, & incipiant in centro, æquatio est $\frac{c^2}{b^2} \cdot b^2 - x^2 = y^2$; si vero originem
habeant in puncto curvæ, $\frac{c^2}{b^2} \cdot 2bx - xx = yy$; qua in hypothesi si abscissæ ac-

cipiantur in tangente fiet $\frac{c^2}{b^2} \cdot 2by - yy = xx$. Hinc si sit $c=b$, & coordina-

tarum angulus rectus, quæ duo natura circuli postulat, erunt æquationes ipsius
circuli $bb - xx = yy$, $2bx - xx = yy$, $2by - yy = xx$. In prima x inci-
piunt in centro, in duabus aliis in puncto curvæ, sed in secunda diametrum,
in tertia tangentem occupant abscissæ. Quoad hyperbolam demum abscissis sum-
ptis in prima diametro, & incipientibus in centro valet æquatio

$\frac{c}{b} \cdot xx - bb = yy$, sumptis vero in diametro secunda

$\frac{b}{c} \cdot xx + cc = yy$. Si x incipiant a vertice hyperbolæ, & si sumantur in dia-

metro, æquatio erit $\frac{c}{b} \cdot 2bx + xx = yy$, si sumantur in tangente

$\frac{c}{b} \cdot 2by - yy = xx$. Si x incipiant a vertice hyperbolæ oppositæ valebunt æ-

quationes $\frac{c}{b} \cdot xx - 2bx = yy$, $\frac{c}{b} \cdot yy - 2by = xx$; in prima x accipiendæ

sunt in diametro, in secunda vero in tangente. Si $c=b$, hyperbola erit æqui-
latera. Æquatio hyperbolæ inter asymptota sic se habet $xy=bc$, & si coordi-
natæ sint ad angulum rectum, spectat ad hyperbolam æquilateram. Ad has
itaque omnes alie æquationes sunt reducendæ.

3. Ut recto cum ordine theoria progrediatur, in duas classes tribuo æqua-
tiones indeterminatas secundi gradus. Prima classis eas continebit, in quibus
adest alterutrum, aut utrumque quadratum coordinatarum sine eorumdem rectan-
gulo, vel sine ullo quadrato coordinatarum rectangulum, quod planum solet
vocari. Classis altera complectetur eas æquationes, in quibus existit planum si-
mul cum uno, aut duobus coordinatarum quadratis. Quæ in prima classe sunt
facil-



Fig. 2.

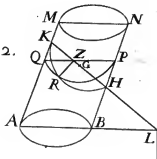


Fig. 4.



Fig. 5.

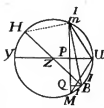
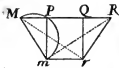


Fig. 7.

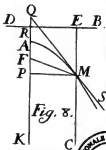
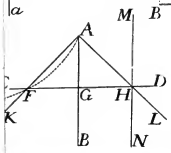
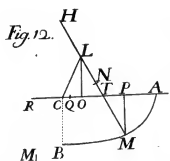
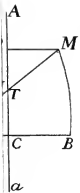
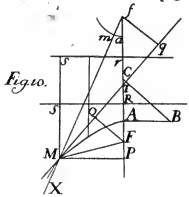


Fig. 8.







facillime ad simplicissimas reducuntur, si pro una variabili addita, demptave constante altera variabilis substituatur, ad quam substitutionem faciendam sepe complenda erunt quadrata per additionem quadrati dimidii coefficientis. Ubi simplicissimam inveneris, curvam describe, tum per singulas substitutiones regredere, & determina propozitæ æquationis coordinatas. Exemplis theoria, quæ non est difficilis, planissime declarabitur.

4. Exemplum primum. Dato angulo coordinatarum proponenda construat æquatio $ax + ab = yy$. Quando $ax + ab = a \cdot x + b$ fiat $x + b = z$; ergo facta substitutione proveniet $az = yy$, quæ est ad parabolam. Diametro AB, (Fig. 1.) parametro $= a$, describe parabolam, cujus coordinatæ datum faciunt angulum, erunt $AB = z$, $BC = y$; sed $x = z - b$. Secetur ergo $AD = b$, erunt $DB = z - b = x$. Punctum D igitur erit origo abscissarum, quæ positivæ sunt ad partem M, negativæ ad oppositam plagam. Ordinatæ $= y$ erunt BC ad unam partem positivæ ad alteram negativæ. Si æquatio fuisset $ax - ab = yy$, adhibenda fuisset substitutio $x - b = z$, adeoque $x = z + b$; ergo producta diametro in E, ut $AE = b$, in puncto E inciperent abscissæ $= x$ positivæ ad plagam M.

5. Exemplum alterum. Æquatio construenda sit $xy + ax = aa - ay$. Fac primum $y + a = z$, & $y = z - a$; ejice ab æquatione y , ut fiat $zx = 2aa - az$, five translatis terminis $zx + az = 2aa$. Fac deinde $x + a = p$, & habebis $pz = 2aa$ æquationem hyperbolæ inter asymptota. Rectæ MM, NN (Fig. 2.) se intersecunt in dato coordinatarum angulo, abscindæ $CA = a$, $AB = 2a$, & inter asymptota MM, NN describe hyperbolam transeuntem per punctum B; erunt $CF = p$, $FG = z$; sed $x = p - a$; ergo $AF = x$, quæ abscissæ initium habent in A. Præterea quum sit $y = z - a$, divide AB bisariam in D, & per D duc DH parallelam CA, erunt $HG = z - a = y$. Quam vero $DH = AF$, $DH = x$, $HG = y$. Ex constructione discimus $y = a$, si $x = 0$; si x est positiva, & $< a$, ordinatæ positivæ sunt; si $x = a$, est $y = 0$; si $x > a$, ordinatæ sunt negativæ, positæque x infinita, y negativa $= a$. Si x sunt negativæ, & $< a$, ordinatæ positivæ sunt; si x negativa $= a$, ordinata est infinita; ædemum si $> a$, ordinatæ negativæ reperiuntur. Si æquatio foret $xy + ax = -aa + ay$, substitutiones $y + a = z$, $x - a = p$, exhiberent $pz = -2aa$. Quare posita $CA = a$, sumenda esset $AE = 2a$ ad partem coordinatarum negativarum, & coordinatæ forent DH, HI, sed HI esset negativa tendens deorsum.

6. Supposui hæcenus, quantitates constantes æquationis ejusmodi esse, ut locum præbeant congruis substitutionibus. Quod si essent magis compositæ, aliis introductis speciebus ad simpliciores revocabimus. Sit æquatio $aa - bx = yy$. Fac primum $aa = bc$, ut habeas $b \cdot c - x = yy$, tum $c - x = p$, ut habeas

$bp = yy$ æquationem ad parabolam. Ita in æquatione $\frac{af}{m} + cx = yy$, pone

$bb = cf$, ut æquatio fiat $c \cdot \frac{af}{m} + x = yy$. Hæc æquatio posita $\frac{af}{m} + x = p$ ad

simplicissimam redigetur. In æquatione magis composita $\frac{a^2x - bhx + m^3}{a + b} = yy$, pone $m^2 = aa - bb$. c & resultabit $a - b \cdot x + a - b \cdot c = yy$; demum utere substitutione $x + c = p$. Similiter in æquatione $xy + ax = bb - cy$ utere primum substitutione $y + a = z$, & fiet $xz + cz = bb + ac$, tum alia substitutione

tione $x+c=p$, ut sit $px=bb+ac$. In hac fac $bb=ae$, & habebis $px=ae+c$

7. Exemplum tertium. Sit $xx+2ax=ay+by$. Adde utrique parti quadratum dimidii coefficientis, nempe aa , ut obtineas $xx+2ax+aa=$

$aa+ay+by$; pone $x+a=p$ & proveniet $pp=aa+ay+by=\overline{a+b} \cdot \frac{aa}{a+b} + y$;
pone iterum $\frac{aa}{a+b} + y = z$, & invenies æquationem ad parabolam maxime

simplicem $pp = \overline{a+b} \cdot z$. Parametro $= a+b$ describe parabolam AG (Fig. 3),
cujus tangens sit AF: erunt AF=p, FG=z; sed $p-a=x$: Ergo secta AC=a,
erunt CF=x: item quum sit $y = z - \frac{aa}{a+b}$, & quum CD ex natura parabolæ
bois $= \frac{aa}{a+b}$, per punctum D agatur tangenti AF parallela DH, erunt
HG=y, & DH = CF=x.

8. Exemplum quartum. Æquatio utrumque quadratum contineat, & sit
 $xx+ax=yy-2by$. Adde primum quadratum $\frac{aa}{4}$, ut habeas $xx+ax$
 $+\frac{aa}{4} = yy-2by+\frac{aa}{4}$; fac $x+\frac{a}{2}=p$, & erit $pp=yy-2by+\frac{aa}{4}$,

sive $\frac{pp}{2} - \frac{aa}{8} = yy - by$. Adde iterum $\frac{bb}{4}$, & pone $y - \frac{b}{2} = z$, ut sit

$\frac{pp}{2} - \frac{aa}{8} + \frac{bb}{4} = zz$, quæ æquatio est semper ad hyperbolam.

9. Triplex distinguendus est casus. In primo ponitur $aa=2bb$, in quo
æquatio fit simplicior, nempe $pp=2zz$, seu extracta radice $p = \pm z\sqrt{2}$, si-
ve $p: \pm z :: \sqrt{2}: 1 :: \sqrt{2bb}: b :: \frac{a}{2}: \frac{b}{2}$. Sit CA = $\frac{a}{2}$, & pone AB=AD
 $= \frac{b}{2}$, (Fig. 4) & duc indefinitas CB, CD, erunt CF=p, FG=z; sed $y = z + \frac{b}{2}$;

ergo per D ducta DH parallela CF, erunt GH=y; item $x = p - \frac{a}{2}$; er-
go AF, seu DH=x. Q. E. L.

10. Si $aa > 2bb$, fiat $aa-2bb=mm$, & habebimus æquationem
 $\frac{pp}{2} - \frac{mm}{8} = zz$, seu $pp - \frac{mm}{4} = 2zz$; ergo $pp - \frac{mm}{4} : 2z :: 2:1 ::$

$\frac{mm}{4} : \frac{mm}{8}$, quæ est ad hyperbolam, & exhibet sequentem constructionem. Po-
nita semidiametro CE = $\frac{m}{2}$, (Fig. 5) secunda CK = $\frac{m}{2\sqrt{2}}$, describe hyperbolam

EG. Erunt CF=p, FG=z. Abscinde CA = $\frac{a}{2}$, erunt AF = $p - \frac{a}{2}$
 $= x$; parallelam secundæ diametro duc AD = $\frac{b}{2}$, & parallelam primæ per D

age DH, erunt HG = $z + \frac{b}{2} = y$; coordinatæ igitur propolitæ æquationis
erunt DH, HG. Q. E. L.

11. De-

11. Demum si $aa < 2bb$, pone $2bb - aa = mm$, ut habeas $\frac{pp}{2} + \frac{mm}{8} = zz$,
 five $pp + \frac{mm}{4} : zz : \frac{mm}{4} : \frac{mm}{8}$, quæ sequentem constructionem præbet.

Posita secunda semidiametro $CK = \frac{m}{2}$, (Fig. 6) prima $CE = \frac{m}{2\sqrt{2}}$, describe
 hyperbolam EG, erunt $CF = p$, $FG = z$; ergo secta $CA = \frac{a}{2}$, erunt
 $AF = p - \frac{a}{2} = x$. Sit $AD = \frac{b}{2}$ parallela CE, erunt $HG = z + \frac{b}{2} = y$;
 ergo DH, HG erunt coordinatæ quæsitæ.

12. Quoniam methodus Cl. Witt, tametsi fuerit a pluribus scriptoribus il-
 lustrata, implicator est aliquanto in æquationibus secundæ classis continentibus
 planum xy , idcirco eorum rationem deferens, advocabo methodum quantitatum
 indeterminatarum, & artificium adhibebo, quod constructionem reddit per quam
 facilem. Primum ita ordino æquationem, ut una pars contineat yy affectum
 signo +, & omnis coefficientis exers simul cum rectangulo ex y & suo mul-
 tiplicatore; in aliam æquationis partem terminos reliquos rejicio. Deinde ad-
 dito quadrato dimidii ejus quantitatis, quæ multiplicat y , compleo quadratum
 integrum, cujus radici novam indeterminatam facio æqualem, quam voco x ,
 factæque substitutione sese offert æquatio, a qua abest planum xz . Si construam
 curvam indeterminatarum x, z , ut revocatis substitutionibus determinem y ; fieri
 numquam poterit, ut y definant in lineam abscissarum x , sed definent in li-
 neam, cujus abscissæ erunt ad x in data ratione. Quare ita construo æquatio-
 nem, ut tamquam abscissas non sumam x , sed mx , quæ species m designat
 rationem indeterminatam deinceps determinandam. Ad hunc finem efficiam, ut
 x in æquatione, quæ turbari non debet, ubique inveniatur multiplicata per m ,
 & describam curvam, cujus abscissæ $= mx$, ordinatæ $= z$. Hoc effectu ab ini-
 tio abscissarum mx lineam rectam ducam ejusmodi angulum facientem, ut ordi-
 natæ z aut addatur, aut dematur ea quantitas, quam calculus indicat, & ad-
 dita detractave constante, si opus est, determinabo y . Postremo definiam valo-
 rem speciei m , qui efficit, ut ordinatæ y definant in abscissas $= x$, atque de-
 terminabo, quinam debeant esse omnes anguli, ut coordinatæ x, y datum an-
 gulum faciant. Theoriam hanc, quæ hoc modo proposita videtur non ita faci-
 lis, exempla reddent clarissimam.

13. Exemplum quintum. Sit æquatio, ut par est, ordinata $yy - 2ay +$
 $2xy = aa + 4ax - xx$. Addo utrique parti $aa - 2ax + xx$ quadratum di-
 midji coefficientis y , ut habeam $y - a + x = 2aa + 2ax$. Pono $y - a + x = z$;
 & invenio $xz = 2aa + 2ax$, quæ est ad parabolam; Verum ita curva construenda
 est, ut ejus abscissa non sit x , sed mx . Quare æqualitate custodita ita formu-
 lam dispono $xz = \frac{2a}{m} \cdot \frac{aa + mx}{m}$. Itaque parametro $AB = \frac{2a}{m}$ intelligatur de-
 scripta parabola A I (Fig. 7), cujus abscissæ $AF = ma + mx$, ordinatæ $FHI = z$;
 igitur secta $AC = ma$, erunt $CF = mx$. Ad inveniendam $y = z + a - x$,
 producatur BA in D, donec $AD = a$, & duc diametro parallelam DG, ad
 quam protrahantur IF, erunt $EG = mx$, $GI = z + a$, ex qua detrahenda est
 x , ut

x , ut inveniat y . Intelligatur ducta EH sic, ut interceptæ $GH = x$; sic $HI = z + a - x = y$. Ut autem y in x definant, opus est, ut $EH = x$; igitur determinandus est valor m , ut, existente $GH = x$, sit item $EH = x$, dato angulo EHG . Fiat triangulum RST , cujus angulus S æquet datum EHG , cujusque latera SR, ST sint inter se æqualia, singula autem faciam $= a$. Sumpta RT , eam voco $= e$. Itaque erit $a : e :: x : m x :: 1 : m$; ergo $m = \frac{e}{x}$; ergo parameter $AB = \frac{2a}{m} = \frac{2aa}{e}$, $AC = ma = e$. Quando angulus $EGH = T$, angulus BAF erit complementum ad duos rectos anguli T . Igitur diametro AF , parametro $AB = \frac{2aa}{e}$ & angulo BAF æquante complementum ad duos rectos anguli T , delineetur parabola; tum accipiatur $DA = a$, agatur DG parallela diametro AF , abscindatur $DE = e$, demum agatur EH faciens angulum $GEH = R$: habebitur $EH = x$, $HI = y$. Q. E. I. Corollarium. Si coordinatæ x, y debeant concurrere in angulo recto, proveniet $m = \sqrt{2}$.

14. Exemplum sextum. Ad construendam æquationem jam ordinatam $yy - xy = aa - xx$, addo $\frac{1}{4}xx$, quod est quadratum dimidii coefficientis y , ut fiat $y - \frac{1}{2}x = aa - \frac{3}{4}xx$. Pono $y - \frac{1}{2}x = z$, & oritur $zz = aa - \frac{3}{4}xx$, quæ est æquatio ad ellipsim. Verum si hanc construam, ut coordinatæ sint x, z , in lineam abscissarum x non definant ordinatæ y . Eo pacto itaque construam, ut coordinatæ sint $m x, z$. Ob hanc rem multiplico æquationem per $m m$, ut hanc formam induat $\frac{4m^2 z^2}{3} = \frac{4m^2 a^2}{3} - m^2 x^2$, sive $\frac{4m^2 a^2}{3} - m x^2 : z^2 :: \frac{4m^2 a^2}{3} : a^2$.

Semidiameteris $CA = \frac{2ma}{\sqrt{3}}$, $CB = a$ intelligo descriptam ellipsim BIA (Fig. 8), erunt $CF = m x$, $FI = z$. Quum autem $y = z + \frac{1}{2}x$, ducenda est CH sic, ut $HF = \frac{1}{2}x$, & tum habebimus $HI = y$, quæ y , ut in lineam abscissarum x definant, oportet, $CH = x$. Quum CH debeat esse dupla HF , & angulus coordinatarum CHI datus sit, efformo triangulum RST , in quo angulus S æquet datum, & RS sit dupla ST . Sit $RS = a$, $ST = \frac{1}{2}a$; jungatur RT , & sit $= e$. Habebimus $a : e :: 1 : m = \frac{e}{a}$; ergo diameter $CA = \frac{2e}{\sqrt{3}}$; remanente $CB = a$. Angulus CFH , sive $BCA = T$. Quare semidiameteris $CA = \frac{2e}{\sqrt{3}}$, $CB = a$ facientibus angulum $= T$, describatur ellipsis BIA ; demum agatur CH faciens angulum $A CH = R$. Parallelæ CB sint ordinatæ $I H$, erunt $CH = x$, $HI = y$. Q. E. I. Corollarium. Si angulus H , atque adeo S rectus sit, invenietur $m = \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

15. Exem

15. Exemplum septimum. Proposita fit æquatio $yy - 3xy + ay = \frac{3ax}{2} - 2xx$, quæ ordinata est. Adde quadratum $\frac{3x^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, quæ est dimidium coefficientis y , ut oriatur $y - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}a = \frac{xx + aa}{4}$. Pono $y - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}a = z$, ut habeam $4zz = xx + aa$, cujus tamen constructionem, si referam ad coordinatas x, z , nunquam obtinebo, ut y definant in x . Accipiens igitur m ut diuinceps determinandam, inquiri locum coordinatarum m, z . Multiplicata æquatione per mm , habeo $4m^2z^2 = m^2x^2 + m^2a^2$; $z^2 : m^2a^2 = \frac{xx + aa}{4m^2}$. Describatur hyperbola BI (Fig. 9), cujus semidiameter secunda fit $CA = ma$, prima $CB = \frac{a}{2}$, erunt $CF = mx$, $FI = z$. Ago BK parallelam CF, ut $IK = z - \frac{a}{2}$, cui quantitati adjungenda est $\frac{3}{2}x$, ut habeam y . Quare ita duco BH, ut $HK = \frac{3}{2}x$, & erit $HI = z - \frac{a}{2} + \frac{3}{2}x = y$. Ut dato angulo BHI, sit $BH = x$, & $HK = \frac{3}{2}x$, posito angulo $S = BHI$ secò $RS = a$, $ST = \frac{3}{2}a$, & jungo RT, quam uoco = e . Habeo autem $a : e :: 1 : m = \frac{e}{a}$; igitur semidiameter $CA = e$, remanente $CB = \frac{1}{2}a$: constituantur istæ semidiametri ad angulum $BCA = T$, & delineetur hyperbola, agatur BH faciens cum tangente angulum $HBK = R$, erunt $BH = x$, $HI = y$. Corollarium. Si angulus S effet rectus, fieret $ee = aa + \frac{9aa}{4} = \frac{13aa}{4}$; ergo $e = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, atque adeo $m = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

16. Nihil reliquum est, nisi ut methodum patefaciamus in illis æquationibus, quæ carent termino yy , & quæ reducendæ sunt ad hyperbolam inter asymptota. Ita æquatio disponenda est, ut planum xy nullum coefficientis habeat præter unitatem, & ad unam æquationis partem jaceat simul cum quadrato xx , ut factum uides in hac formula $xy - \frac{1}{2}xx = ax - ay + aa$. Quæ quantitas in prima parte multiplicat x pone æqualem alii variabili hoc modo $y - \frac{1}{2}x = z$, seu $y = z + \frac{1}{2}x$. Ejice y , ut habeas $xz = \frac{ax}{2} - az + aa$, siue $xz - \frac{ax}{2} = aa - az$. Fac $z - \frac{a}{2} = u$, & erit $xu = \frac{aa}{2} - au$, siue $xu + au = \frac{aa}{2}$. Si referrem constructionem æquationis ad abscissam x , non obtinerem, ut ordinatæ in lineam abscissarum definerent: quare multiplico æquationem per m , ut sit $u. \frac{mx + ma}{2} = \frac{ma^2}{2}$. Utor ultima substitutione $mx + ma = p$, & resultat $pu = \frac{ma^2}{2}$ æquatio hyperbolæ inter asymptota. In
ut o

uno asymptoto secetur $CA = ma$, alteri asymptoto CM (Fig. 10) parallela agatur $AB = \frac{a}{2}$, & describatur hyperbola transiens per punctum B , erunt $CF = p$, $FI = u$; sed $m \times = p - ma$; ergo $AF = m \times$; sed $z = u + \frac{a}{2}$; ergo producta AB , donec $AD = AB = \frac{1}{2}a$, ducatur per D recta EDG parallela CF , erunt $DG = m \times$, $GI = z$; atqui $z + \frac{x}{2} = y$; duco igitur DH ita, ut $HG = \frac{1}{2}x$, erit $HI = y$. Ut $DH = x$, oportet determinare m . Quoniam angulus coordinatarum DHG datus est, & $DH : HG$ se habet ut $2 : 1$, efformo triangulum RST , in quo angulus S sit datus, & $RS = a$, $ST = \frac{1}{2}a$, & voco $RT = e$, inveniam $m = \frac{e}{a}$; igitur $CA = ED = e$, & angulus $MCA = T$, $GDH = R$. Igitur inter asymptota facientia angulum $= T$, sumpta $CA = e$, $AB = \frac{1}{2}a$ describatur hyperbola transiens per B ; tum accepta $AD = AB$, agatur EDG parallela CA ; demum ducatur DH faciens angulum $HDG = R$, erunt $DH = x$, HI parallelæ CM erunt $= y$. Q. E. L.

Corollarium. Si angulus S rectus fuerit, existet $ee = aa + \frac{aa}{4} = \frac{5aa}{4}$; ergo $e = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, & $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Atque per hæc locorum geometricorum secundi gradus theoria in aperto posita est.

CAPUT SEPTIMUM.

Resolvuntur nonnulla Problemata secundi gradus indeterminata.

Postquam æquationes omnes secundi gradus docui construere descriptis sectionibus conicis, necesse est, ut in exemplum aliquot problemata indeterminata soluta exhibeam.

1. Problema primum. Circulum, cujus centrum C (Fig. 1) tangat recta AQ , in quam incidat secans CQ , interceptæ RQ fiat æqualis QM tangenti perpendicularis, quaeritur locus omnium punctorum M , quæ simili ratione determinantur. Ex M in CA productam demittatur normalis MP . Vocetur $MP = AQ = y$, $AP = QM = QR = x$, $CA = a$. Ex proprietate circuli erit $2a + x : y :: y : x$. Ergo $2ax + xx = yy$, quæ æquatio est ad hyperbolam æquilateram, cujus axis $= 2a$, abscissis incipientibus in vertice. Centro C , vertice A describe hyperbolam æquilateram, cujus axes circuli diametro Aa sint æquales, hic erit locus quaeritus.

2. Determinationes non sunt omittendæ. Dividatur circulus a duobus diametris orthogonalibus AaA , BaB . Si punctum R situm sit in primo quadrante AB

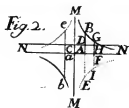


Fig. 5.

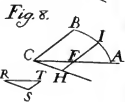
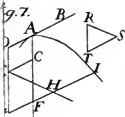
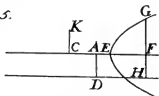
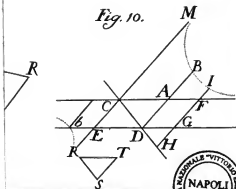
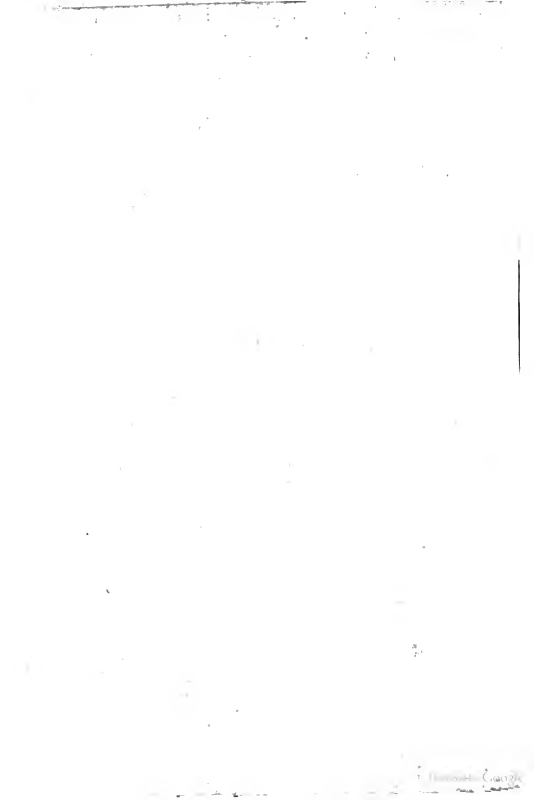


Fig. 10.





te AB; posita $QM = QR$, generatur ramus hyperbolæ AM; si positum sit in secundo quadrante B_2A , ut $2R$, tunc C_2R secat tangentem in $2Q$, & $2R_2Q$ tanquam negativa spectanda est, adeoque $2Q_2M$ in opposita parte constituta, oritur oppositæ hyperbolæ ramus $2A_2M$. Si $3R$ est in tertio quadrante $2A_2B$, tangens iterum secatur in Q , sed $3RQ$ negative accipienda est, eique æqualis faciendâ Q_3M , ut resultet ramus $2A_3M$. Demum $4R$ posito in ultimo quadrante, producet ramus A_4M . Per punctum $2A$ agatur tangens S_2S . Eadem hyperbola nata esset, si interceptis S_2R positæ fuissent æquales S_2M . Demonstratio facilis est. Nam per constructionem $2R_2Q = 2Q_2M$; sed positis æqualibus arcibus A_4R , $2A_3R$ est $2R_2Q = SR$; ergo $2Q_2M = SR$. Et ergo ablati æqualibus $2QS$, R_3R , quæ æquant circuli diametrum, remanebit $S_2M = S_3R$. Q. E. D.

3. Problema secundum. Intra datum angulum ABC (Fig. 2) dato puncto E, invenire curvam MF, ut ducta per E qualibet AMEC sit ubique $AM = CE$. Ex punctis E, M agantur ED, MS parallelæ lateri CB. Vocetur $BS = x$, $SM = y$, $ED = a$, $BD = b$. Quom ex conditione problematis $AM = EC$, erit $AS = BD = b$; ergo $AD = BS = x$. Est autem $AS : SM :: AD : DE$, sive analyticè

$b : y :: x : a$; ergo $ab = xy$, æquatio ad hyperbolam inter asymptotos BA, BC. Inter hos itaque describatur hyperbola transiens per punctum E; hæc erit curva quaesita. Proprietas eadem locum habet in hyperbola opposita. Nam ducta E_2C_2A , quæ oppositam hyperbolam secat in puncto $2M$, erit ubique $E_2C_2M = 2A_2M$.

4. Problema tertium. Intra angulum B (Fig. 3) dato puncto E, invenire curvam MF, ut ducta qualibet AMEC sit ubique $AM : CE$ in data ratione $m : n$. Fiat eadem præparatio ut antea, eademque denominationes retineantur. Quoniam $EC : MA :: BD : AS$, erit $n : m :: BD = b : AS = \frac{m}{n}b$; ergo $BA = \frac{mb}{n} + x$, & $AD = \frac{m-n}{n}b + x$; atqui $AD : DE :: AS : SM$, seu analyticè $\frac{m-n}{n}b + x : a :: \frac{mb}{n} : y$; ergo $y = \frac{m-n}{n}b + x = \frac{mab}{n}$, quæ est

hyperbola, cujus constructio hoc modo peragitur. Sume DH, quæ sit ad DB :: $m : n$, & per H duc HK parallelam BC; tum inter asymptota HA, HK describe hyperbolam transeuntem per datum punctum E, in qua ducta qualibet AMEC est semper $AM : EC :: m : n$. Hoc per proprietatem problematis superioris facillime demonstratur: nam secet AC asymptotum in K, per problema superius $AM = EK$; sed $EK : EC :: HD : BD :: m : n$; ergo $AM : EC :: m : n$. Hæc omnia valent etiam in hyperbola opposita.

5. Problema quartum. Dato angulo FBG (Fig. 4), & puncto A, ductis que infinitis AF, invenire curvam, cujus chorda AH æquet interceptam GF. Parallelam lateri BF ex puncto A age AD occurrentem in D lateri BG. Ex punctis H ordina HE parallelas AD. Voca $BE = x$, $HE = y$, $BD = a$, $AD = b$. Quoniam $AH = GF$ ex conditione problematis, etiam $DE = BG$;

Ergo $DG = BE = x$, & $GE = 2x - a$; sed $DG : DA :: GE : EH$, sive analyticè

$x : b :: 2x - a : y$; ergo $xy = 2bx - ab$, sive $ab = x(2b - y)$, quæ est ad hy-

hyperbolam inter asymptota; atque hoc modo construitur. Producat DA in I, donec AI = AD, per punctum I duc IK parallelam DB, quæ secet FB in K. Inter asymptota KB, KI describe hyperbolam transeuntem per punctum A; ipsa erit curva quaesita. Linea AB tanget hyperbolam in puncto A, quia linea BK = DI est dupla AI. Si linea AF secet ramum AH, intercepta GF continebitur in angulo FBG: si secet ramum AL, intercepta erit posita in angulo ad verticem KBD: si linea ducatur ad hyperbolam oppositam, intercepta erit in angulis adjacentibus KBd, FBD.

6. Problema quintum. Iisdem positis ac in superiore problemate, invenire curvam AH (Fig. 5.) in qua corda AH ad interceptam GF fit in ratione data $m:n$. Conservatis superioris problematis denominationibus, patens est fore DE = $a - x$. Est autem AH:GF, seu DE = $a - x$:GB:: $m:n$; ergo

$$GB = \frac{n \cdot a - x}{m}; \text{ igitur } GE = \frac{m+n}{m} \cdot x - \frac{na}{m}, \text{ \& } GD = \frac{m}{m} \cdot a + \frac{nx}{m}; \text{ at}$$

$$\text{qui } GD:GE::DA:HE; \text{ ergo } \frac{m-n}{m} \cdot a + \frac{nx}{m} : \frac{m+n}{m} \cdot x - \frac{na}{m} :: l:y, \text{ sive}$$

$$\frac{m-n}{n} \cdot a + x \cdot y = \frac{m+n}{n} \cdot bx - ab. \text{ Pone } \frac{m-n}{n} \cdot a + x = z, \text{ ut fit}$$

$$zy = \frac{m+n}{n} \cdot bz - \frac{m}{nn} \cdot ab, \text{ sive } \frac{m}{nn} \cdot ab = \frac{m+n}{n} \cdot b - y \cdot z. \text{ Fac}$$

$$\frac{m+n}{n} \cdot b - y = u, \text{ ut evadat } \frac{m}{nn} \cdot ab = zu. \text{ Hujusmodi ex analysi oritur con}$$

structio. Producat DB in C ita, ut

DC:DB sit :: $m:n$. Item producat DA in I ita, ut

AI:AD sit :: $m:n$. Per puncta C, I duc parallelas rectas AD, DB, quæ concurrent in K. Inter asymptota KI, KC describe hyperbolam transeuntem per punctum A, & habebis curvam quaesitam.

7. Problema sextum. Data indefinita EB, (Fig. 6.) & extra ipsam puncto A, invenire curvam transeuntem per centra omnium circulorum transeuntium per A, & secantium in EB chordam datæ æqualem. Ex his circulus unus sit AIH, cujus centrum C, agar AB perpendicularis EB, & compleatur rectangulum CDBF. Vocetur BF = x , FC = y , AB = a ; ergo AF = $a - x$, DI dimidium chordæ datæ = b . Constat $CD^2 + DI^2 = CF^2 + FA^2$, ex qua provenit æquatio $xx + bb = yy + aa - 2ax + xx$, qua reducta habetur

$$2ax + bb - aa = 2a \cdot x + \frac{bb}{2a} - \frac{a}{2} = yy. \text{ Analysis hanc constructionem præ}$$

bet. Divide AB bisariam in G (Fig. 7.) abscinde GL tertiam proportionalem post $2a$, b , vertice L parametro $2a$ describe parabolam, hic erit locus quaesitus. Tres sunt casus distinguendi, nimirum vel GL = GB, seu $b = a$, & tunc punctam L cadit in B, quod erit parabolæ vertex. Vel $G \text{ } \int \text{ } L > GB$, seu $b > a$, & vertex parabolæ cadit post puncta A, B; vel demum $G \text{ } \int \text{ } L < GB$ seu $b < a$, & vertex parabolæ cadit intra puncta G, B. Si $b = 0$, adeoque nulla $G \text{ } \int \text{ } L$, tunc punctam G idipsum esset parabolæ vertex. Quum autem tam GB, quam GA sit quarta pars parametri, patet, punctum A esse focum, lineam BE esse directricem parabolæ. Circuli vero habentes centrum in curva parabolica, & tran-

se-

seutes per punctum A, quando interceptiunt chordam nullam, contingit datam BE.

8. Problema septimum. Anguli A (Fig. 8) crura aequalia AC, AB ita aperiantur, ut punctum C iemper in eodem loco permaneat, punctum B iter faciat per lineam rectam CK; linea BD faciat cum AB angulum rectum, quaeritur, quamnam curvam descripturam sit punctum D. Demissis in CB normalibus AN, DM, voca CA = AB = a, BD = b, CM = x, DM = y, erit BM = $\sqrt{bb - yy}$, & CB = $x - \sqrt{bb - yy}$, & NB = $\frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2}$. Quoniam angulus ABD rectus supponitur, anguli duo ABN, DBM aequabunt duos ABN, BAN, quia utrumque par rectum aequat; ergo ablato comuni ABN remanet DBM = BAN; ergo triangulum DBM erit simile BAN, & valebit proportio AB : BD :: BN : DM, & analytice

$$a : b :: \frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2} : y, \text{ \& duplicando antecedentes.}$$

$$2a : b :: x - \sqrt{bb - yy} : y; \text{ ergo aequatio nascitur}$$

$$2ay = bx - b\sqrt{bb - yy}, \text{ sive } b\sqrt{bb - yy} = bx - 2ay, \text{ \& quadrando}$$

$$b^2 - b^2y^2 = b^2x^2 - 4abxy + 4a^2y^2.$$

9. In hac aequatione specto tamquam ordinatam x, & abscissam y, quia multo facilius nascitur constructio. Divido per b^2 ut fiat $bb - yy = x^2$

$$- \frac{4a}{b}xy + \frac{4a^2}{b^2}y^2. \text{ Pono } x - \frac{2a}{b}y = u, \text{ \& fit } bb - yy = uu; \text{ quae est}$$

ad ellipsim. Meam methodum sequens ita dispono formulam $m^2b^2 - m^2y^2 : u^2$

:: $m^2b^2 : b^2$. Itaque positis diametris CE = mb, CH = b (angulus diametrorum, & coefficientis m determinabitur in progressu) intelligatur descripta ellipsis EH, erunt CG = my, GD = u. Agatur linea CIF ita ut CI = y, IG = $\frac{2a}{b}y$; ergo ID = $u + \frac{2a}{b}y = x$. Quoniam angulus I rectus est, erit

$$m^2 = 1 + \frac{4a^2}{b^2} = \frac{4a^2 + b^2}{b^2}, \text{ \& } m = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{b}; \text{ sed CE} = mb; \text{ ergo CE}$$

= $\sqrt{4a^2 + b^2}$; atqui CE : CF :: m : 1; ergo CF = b: similiter quum debeat esse CF : FE :: b : 2a, erit FE = 2a. Itaque extendo crura anguli CAB in CK, ut CK = 2a; recta BD transibit in KE = b: jungo CE, quae erit = $\sqrt{4aa + bb}$, & secata CH = b. Diametris CE, CH describe ellipsim, haec erit curva descripta a puncto D.

10. Constructio, ad quam perveni, me docuit, analysim hac ratione institui posse. Secta CK = 2a, normali KE = b, junctaque CE, quam fac = c, age DO parallelam CE, & voca CO = x, OD = y. His positis erit c : 2a :: y : OM = $\frac{2ay}{c}$, & CM = $x + \frac{2ay}{c}$. Item c : b :: y : DM = $\frac{by}{c}$; er-

go $BM = \sqrt{bb - \frac{bb yy}{cc}} = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{cc - yy}$, & $CB = x + \frac{2ay}{c} - \frac{b}{c} \sqrt{cc - yy}$.

Quare valebit analogia $a : b :: \frac{x}{2} + \frac{ay}{c} - \frac{b}{2c} \sqrt{cc - yy} : \frac{by}{c}$, unde æquatio

$ay = \frac{cx}{2} + ay - \frac{b}{2} \sqrt{cc - yy}$, aut $b \sqrt{cc - yy} = cx$, seu $b^2 c^2 - b^2 y^2 = c^2 x^2$,

demum $bb - xx : yy : bb : cc$. Quæ est æquatio ad ellipſim præditam ſemidia-

metris $CH = b$, $CE = c$.

11. Problema octavum. Intra angulum datum DCB (Fig. 9) moveatur data recta BD , quaeritur curva, quam deſcripturum eſt quodlibet datum in ea punctum A . Ex puncto deſcribente A agatur AL parallela cruri CD . Vocetur $CL = x$, $LA = y$, $AB = a$, $AD = b$. Quoniam valet proportio $DA : AB :: CL : LB$ erit $b : a :: x : LB = \frac{ax}{b}$. Vocato $= \mu$ angulo dato $DCB = ALB$ conſtat fore

$AB^2 = AL^2 + LB^2 - 2LB \cdot \frac{LA \cdot Cc \cdot \mu}{r}$, ex qua habetur æquatio $aa = y^2 -$

$\frac{2a \cdot Cc \cdot \mu}{br} \cdot xy + \frac{a^2 x^2}{b^2}$, quæ æquatio ſemper eſt ad ellipſim.

12. Si angulus $DCB = \mu$ reſtus ſit, ſit $Cc \cdot \mu = 0$; ergo æquatio provenit $b^2 - x^2 : y^2 :: b^2 : a^2$, quæ eſt ad ellipſim, cujus ſemiaxes ſunt b, a , de qua ellipſi ſupra verba feci. Si angulus DCB reſtus non ſit, crura anguli, ad quæ referretur æquatio, non ſunt diametri conjugatæ. Ut conjugatas duas diametros deſterminemus, ex noſtra methodo ita eſt inſtituenda analyſis. Complendum eſt qua-

dratum hoc modo $a^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} + \frac{a^2 \cdot Cc \cdot \mu^2}{b^2 r^2} \cdot x = y - \frac{a \cdot Cc \cdot \mu}{br} \cdot x$. Quum vero

ſit $r^2 - Cc \cdot \mu^2 = Sc \cdot \mu^2$ æquatio ad hanc contrahetur

$a^2 - \frac{a^2 \cdot Sc \cdot \mu^2}{b^2 r^2} x^2 = y - \frac{a \cdot Cc \cdot \mu}{br} \cdot x = u^2$, quæ in hunc modum diſpona-

tur $\frac{b^2 r^2}{Sc \cdot \mu^2} x^2 - x^2 : u^2 :: \frac{b^2 r^2}{Sc \cdot \mu^2} : a^2$. Quoniam hæc referenda eſt non ad abſciſſam

$= x$, ſed ad abſciſſam $= mx$, quæ ſpecies m erit determinanda deinceps, antecedentes analogiæ multiplicentur per m^2 , ut fiat $\frac{m^2 r^2 b^2}{Sc \cdot \mu^2} - m^2 x^2 : u^2 :: \frac{m^2 r^2 b^2}{Sc \cdot \mu^2} : a^2$.

Semidiametris $CE = \frac{mr b}{Sc \cdot \mu}$, $CF = a$, intelligatur deſcripta ellipſis, cujus punctum ſit A , erunt $CM = mx$, & $MA = u$. Quum autem $u + \frac{a \cdot Cc \cdot \mu}{br} \cdot x = y$,

agen-

agenda est CLB ita ut fiat $CL = x$, $LM = \frac{a \cdot Cc \cdot \mu}{br} \cdot x$, & quæsitæ coordinatæ erunt $CL = x$, $LA = y$. Determinanda est jam species m , quæ hoc præstet. Adverte oportere, ut $CM^2 = CL^2 + LM^2 + 2CL \cdot \frac{LM \cdot Cc \cdot \mu}{r}$, sive

$$\text{analytice } m^2 x^2 = x^2 + \frac{a^2 \cdot Cc \cdot \mu^2}{b^2 r^2} \cdot x^2 + \frac{2a \cdot Cc \cdot \mu}{br^2} \cdot x^2, \text{ sive } m^2 = 1 + \frac{a^2 \cdot Cc \cdot \mu^2}{b^2 r^2}$$

$$+ \frac{2a \cdot Cc \cdot \mu}{br^2}; \text{ ergo } CE = \frac{1}{Sc \cdot \mu} \cdot \sqrt{b^2 r^2 + 2ab + a^2 \cdot Cc \cdot \mu^2}, m =$$

$$\frac{1}{br} \cdot \sqrt{b^2 r^2 + 2ab + a^2 \cdot Cc \cdot \mu^2}. \text{ Ducatur EH parallela DC, proveniet CH} \\ = \frac{br}{Sc \cdot \mu}, EH = \frac{a \cdot Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu}. \text{ Ex his nascitur constructio. Abscinde CH} = \frac{br}{Sc \cdot \mu},$$

restat CD sit parallela HE = $\frac{a \cdot Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu}$, & semidiametris CE, & CF = a describe ellipsim; in hac semper reperietur punctum A.

13. Sit PEQ positio lineæ DB, quæm punctum A pervenit ad punctum E. Erit PE = b , EQ = a . Quoniam est HE:QE:: $\frac{a \cdot Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu}$: a ::Cc $\cdot\mu$:Sc $\cdot\mu$:: Cc.EHQ:Sc.EHQ;& eadem HE:QE::Sc.EQH:Sc.EHQ, habebimus Cc.EHQ:Sc.EHQ::Sc.EQH:Sc.EHQ; ergo Cc.EHQ = Sc.EQH; ergo angulus EQH complet rectum cum EHQ; igitur angulus QEH, adeoque etiam QPC rectus est. Hæc proprietas docet faciliem rationem delineandi ellipsim datis tantummodo duabus semidiametris conjugatis quibuscumque. Semidiametri datæ sint CF, CE. Ex puncto E extremo unius ægatur EP perpendicularis in aliam, quam producat in Q, donec EQ = CF. Jungat CQ. Possitremo intra angulum FCQ fac moveas lineam PQ. Punctum E delineabit ellipsim quæsitam. Si linea PEQ intra angulum PCQ moveatur, describet ellipsidis partem. Integram obtinebis; si eam jubuas moveri, intra alios angulos nimirum PCQ, PCQ, PCQ.

14. Rationem aliam ingentioram magis, atque elegantem solvendi hoc problema placet addere. Ex puncto A duc AL parallelam CD, in quam ex puncto B demitte normalem BM. Ajo primum rationem CL:LM constantem esse. Nam est CL:LM in rat. CL:LB comp. LB:LM; sed prima ratio nempe CL:LB

est constans, utpote eadem cum ratione DA:AB; secunda pariter est constans, quia latera trianguli LMB specie dati sunt in ratione constante; ergo omnia puncta M sita erunt in linea recta CME. Quoniam vero BM sunt semper sibi parallelæ, liquet constantem esse rationem CM:MB, quam dicam $m:n$.

Voco præterea CM = x , ergo MB = $\frac{nx}{m}$. Sit MA = y : sed propter angulum

rectum AMB est $AB^2 = AM^2 + BM^2$; ergo vocata AB = a est a^2

Z

$= y^2 + \frac{a^2}{m^2}$, quæ est ad ellipsim, cujus semidiameter una est $CF = a$. Ut

altera determinetur fiat $y = 0$, & habebimus $x = \frac{m^2 a}{n}$, cui abscindatur æqualis CE , hæc erit altera semidiameter. Ponamus DB ita moveri, donec punctum A veniat in E , & ejus positio sit PQ . Quoniam $CE = \frac{m^2 a}{n}$, $EQ = a$ erit $CE : EQ :: m : n$, hoc est ut $CM : MB$; sed MB secat ad angulos rectos parallelas rectæ CD ; ergo etiam EQ ; ergo angulus QPC rectus erit. Quæ propterea conveniunt cum prima solutione. Supposui, punctum describens A situm esse inter puncta D, B ; sed si caderet extra, eadem methodus valeret. Quod pluribus indicandum non censeo, ut nonnihil lectorum indulgentiam concedam.

15. Problema octavum. Datis duabus parallelis AD, BE , (Fig. 9.) quas secet linea AB , ductæque infinitis HK ea conditione, ut $AH + BK = 2b$; demum divisa HK in N ita, ut sit $AH : BK :: KN : HN$; quaeritur natura curvæ transeuntis per omnia puncta N . Accipiantur $AD = BE = 2b$, quæ dividantur bifariam in punctis F, G , & jungatur FG , quæ pariter dividatur bifariam in I . Quoniam est $AF : BG :: IG : IF$, liquet, punctum I fore in curva quaesita. Sit IC data AD, BE parallela. Accipere $FH = GK$; constat, fore $AH + BK = 2b$. Junge HK , quæ necessario transit per punctum I , & per N dividit eam HK , ut postulat, duc PQ parallelam AB , seu FG , quæ fecerit CI in M . Vocetur $AC = CB = a, IM = x, MN = y$; ergo $NP = a - y$, & $NQ = a + y$. Ex triangulorum similitudine $MN : MI :: FI = GI : FH = GK$,

seu analytice $y : x :: a : FH = GK = \frac{ax}{y}$; ergo $AH = b + \frac{ax}{y}$, & $BK = b - \frac{ax}{y}$; atqui ex problematis conditione $AH : BK :: KN : HN :: NQ : NP$;

ergo $b + \frac{ax}{y} : b - \frac{ax}{y} :: a + y : a - y$, & componendo dividendoque $2b : \frac{2ax}{y} ::$

$2a : 2y$, sive $\frac{a}{b} : x = yy$, quæ æquatio est ad parabolam descriptam diametro

IM , cujus vertex est I , in quo FG tangit curvam.

16. Parabola post puncta D, E , per quæ transit, extra parallelas excurrit, ut $D_1 N$. Hæc quoque pars curvæ inservit problematis solutioni. Nam intelligatur ducta quælibet $2H_1 K$; partes $2H_1 N, B_1 K$ tamquam negativæ spectandæ sunt. Quare habebimus $A_1 H - B_1 K = 2b$; item $A_1 H : B_1 K :: 2K_1 N : 2H_1 N$. Si AB secaret parallelas ad angulos rectos, recta IM esset axis parabolæ.

17. Problema nonum. Rectis AD, BE cum AB facientibus angulos æquales DAB, EBA , (Fig. 11.) ducantur infinitæ HK ita ut $AH + BK$ æquent datam; tum dividatur HK in N eo pacto, ut sit $AH : BK :: KN : HN$; quaeritur curva transeuntis per omnia puncta N . Accipiantur $AD = BE$ æquales datæ, hæc dividantur bifariam a linea FG , quæ erit parallela AB . Secetur FG bifariam in I . Quoniam $FA = GB$, & $IF = IG$, palam est punctum I esse in curva. DA, EB productæ concurrant in O , jungatur OI , quæ dividet bifariam angulum O , & omnes lineas parallelas AB . Sume $FH = GK$, & duc HK , quæ ita secetur, ut problema postulat, in N , & hoc punctum sit

in

in curva. Per puncta H, N, K parallelæ AB agantur HTV, PMQ, KRS; item DLE. Ob æquales FH, GK erunt æquales IT, IR. Idem dic de TL, RC, & de IL, IC. Vocetur CA = a, CI = b, CO = c, IM = x, MN = y, IT = IR = z. Quoniam ex conditione problematis HN:KN::BK:AH, erit quoque TM:RM::CR:CT, sive analyticè

$z-x:z+x::b-z:b+z$, sive componendo, & accipiendo antecedentium dimidia

$z : z+x :: b : b+z$, & deductis antecedentibus a consequentibus

$z : x :: b : z$; ergo $z^2 = bx$, quæ est prima æquatio solutioni interserviens.

18. Præterea OC:CA::OM:MP, sive analyticè $c:a::c+b+x$:

$MP = \frac{a \cdot c + b + ax}{c}$. Fiat $OI = c + b = g$, ut evadat $MP = \frac{ag + ax}{c}$;

igitur $NP = \frac{ag + ax}{c} - y$. Item OC:CA::OR:RS, sive analyticè

$c:a::g-z:RS = \frac{ag - az}{c}$; ergo $KS = \frac{2ag - 2az}{c}$. Atqui

HN:HK::TM:TR::PN:KS; ergo proveniet æquatio

$z-x:z+x::\frac{ag+ax}{c}-y:\frac{2ag-2az}{c}$, sive

$z-x:z+x::ag+ax-cy:ag-az$, sive

$x:z::-az-ax+cy:ag-az$, & factò transitu ad æqualitatem.

$agx - azx = -az^2 - azx + cxy$, & deletis delendis $agx = cxy - azx$.

Ex æquatione numeri superioris pro z substituitur bx , ut fiat $agx = cxy - abx$,

sive $g + b \cdot ax = cxy$. Voca $OL = g + b = f$, ut fiat $afx = cxy$, & qua-

drando $\frac{af}{c} \cdot x^2 = zy^2$. Pro z^2 iterum pone bx , & proveniet $\frac{af^2}{c} \cdot x^2 = by^2$,

$\frac{af^2}{bc^2} \cdot x = y^2$, quæ æquatio est ad parabolam, cujus axis est IL, vertex I, &

parameter = $\frac{af^2}{bc^2}$. Quoniam est OC:CA::OL:LD, seu $c:a::f:LD = \frac{af}{c}$,

parameter parabolæ erit $\frac{LD^2}{b}$; ergo si fiat $x = b$, proveniet $y = LD$. Itaque

parabola transibit per puncta D, E. Quare curva quaesita erit parabola descri-
pra axe IL, vertice I, transiens per puncta D, E.

19. Problema decimum. Super data AB (Fig. 12.) describere curvam AEB, ut ductis ad quodlibet punctum E rectis AE, BE, angulus AEB sit æqualis dato. D. missa normali ordinata EF, divisaque AB bitariam in D, vocetur $AD = BD = a$, $DF = x$, $AF = a + x$, $BF = a - x$, $FE = y$, erit $AEB =$

$\sqrt{a+x+y^2}$, $BE = \sqrt{a-x+y^2}$. Ex A ducatur AG normalis EB, &

angulus datus vocetur = μ . Perspicuum est fore $AG = \sqrt{a+x+y^2} \cdot \frac{sc \cdot \mu}{r}$.

Sed quum sint similia triangula BFE, BGA, habetur BE:EF::BA:AG
 five analyticè $\sqrt{a-x+yy}:y::2a:\sqrt{a+x+y^2} \cdot \frac{Sc.\mu}{r}$; ergo provenit æ-

quatio $\sqrt{a^2-x^2+y^2 \cdot a+x+y^2} = \frac{2ray}{Sc.\mu}$. Hinc

$$a^4 - 2a^2x^2 + x^4 + 2a^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4 = \frac{4r^2a^2y^2}{Sc.\mu^2}$$

Dematur ab utraque

parte æquationis $4a^2y^2$, ut exurgat æquatio

$$a^4 - 2a^2x^2 + x^4 - 2a^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4 = 4a^2y^2 \cdot \frac{r^2 - Sc.\mu^2}{Sc.\mu^2} = \frac{4a^2y^2 Cc.\mu^2}{Sc.\mu^2}$$

Extrahatur rad'x quadrata, & oriatur $a^2 - x^2 - y^2 = \pm \frac{2ay \cdot Cc.\mu}{Sc.\mu}$, five

$$\frac{a^2 \cdot Sc.\mu^2 + Cc.\mu^2}{Sc.\mu^2} = \frac{r^2a^2}{Sc.\mu^2} = x^2 + y^2 \pm \frac{a \cdot Cc.\mu}{Sc.\mu}$$

quæ æquatio est ad

duplicem circulum, cujus hæc est constructio. Divisa AB bifariam in D, eidem per D excita normalem IO. Duc BM, BN f'cientes cum AB angulum datum. His age normales BH, BK secantes IO in punctis H, K. His centris, & radiis HB, KB describe duos circulos AIB, AOB, isti problemati satisfaciant. Quæ traduntur in elementis determinationes reddunt faciles, ac propterea omittendas.

20. Problema undecimum. Invenire curvam transeuntem per vertices D (Fig. 12.) omnium triangulorum, quæ super linea AB ita describuntur, ut angulorum DAB, DBA differentia sit data. Divido æqualiter AB in E, & per E duco lineam HEK, quæ cum AB faciat angulum AEH æqualem dati dimittio, ut anguli DHK, DKH proveniant æquales. Nam DAE = DBE + 2AEH, five DAE - AEH = DFE + BEK; sed DHK = DAE - AEH, & DKH = DBE + BEK, ergo DHK = DKH. Igitur ducta DO normalis in HK fiet HO = KO. A punctis A, B ducantur AF, BG normales in rectam HK, erit AF = BG, & EF = EG. His positus voco EF = EG = a, AF = BG = b, EO = x, FO = a - x, GO = a + x, DO = y. Hæc proportionum sex triangularum similitudine oruntur.

OH:HF::DO:AF & d'vid.

OF:HF::DO-AF:AF, five

$a-x:HF::y:b$; b; ergo

$$HF = \frac{y \cdot a - x}{y \cdot b}; \text{ igitur}$$

$$HO = \frac{b \cdot a - x}{y - b} + a - x = \frac{y \cdot a - x}{y - b}$$

OK:KG::DO:BG, & comp.

OG:KG::DO+BG:BG

$a+x:KG::y+b:b$; ergo

$$KG = \frac{b \cdot a + x}{y + b}; \text{ igitur}$$

$$OK = \frac{-h \cdot a + x}{y + b} + a + x = \frac{y \cdot a + x}{y + b};$$

æqui

atqui $HO = OK$; ergo $\frac{y \cdot a - x}{y - b} = \frac{y \cdot a + x}{y + b}$, aut $a - x : a + x :: y - b : y + b$, ex qua componendo, & dividendo nascitur $a : x :: y : b$, quæ est proprietas hyperbolæ inter asymptota.

21. Ut analytice studiose servirem, calculum advocavi; sed ipsa præparatio per se nos ducit ad solutionem problematis hac methodo. Quam lecta sit $AE = BE$, ob similitudinem triangulorum AEF , BEG erit $AF = BG$. Angulus $DHK = DKH$; ergo $HO = KO$. Præterea triangula rectangula AFH , BGK æquales habent angulos in H , K , & latera AF , BG : sunt igitur æqualia quoad omnia; ergo $HF = KG$. His præmissis quam $OH = OK$, & $EF = EG$, erit $OH - EF = OK - EG$, sive $HF - OE = OE - KG$; ergo $HF + KG$, sive $\triangle HF = \triangle OE$, & $HF = OE$, sed est $HF : HO :: AF : OD$, sive substitutis æqualibus $OE : EF :: FA : OD$, quæ est proprietas hyperbolæ inter asymptota, quæ hoc modo constructur.

22. Divisa AB bisariam in E , agatur FEG faciens angulum FEA æqualem datæ semidifferentiæ. Per E agatur MEN perpendicularis FEG ; demum inter asymptota MN , FG describatur hyperbola transiens per punctum A : hæc erit hyperbola requisita. Quam asymptotum angulus rektus sit, hyperbola descripta æquilatera est, & quam $AE = BE$, hyperbola opposita transibit per B . Hinc dicitur novam, & per eam proprietatem hyperbolæ æquilateræ. Ab extremis punctis cujuscumque diametri AB agantur quæ quilibet AD , BD , differentia angulorum DAB , DBA est constans & æqualis duplo angulo, quem diameter AB facit cum asymptoto FG , quod asymptotum non pertinet ad eum ramum, in quo positum est punctum D . Quare si ex A , B ducantur rectæ ad punctum P , differentia angulorum PAB , PBA erit dupla anguli MEA , qui efficitur ab asymptoto MN non pertinente ad ramum AP . Si AEB esset axis hyperbolæ, angulorum differentia angulo rektæ inveniretur æqualis.

23. Problema duodecimum. Descriptis super data AB infinitis triangulis ADB , (*Fig. 14.*) in quibus angulus DAB sit duplex DBA , invenire locum punctorum D . Demittatur DH normalis in AB , qua divisa bisariam in C , vocetur $CA = CB = a$, $CH = x$, $AH = a - x$, & $BH = a + x$. Præterea $HD = y$, angulus $DBA = \mu$, adeoque angulus $DAB = 2\mu$. Peripicuum est esse

$$a - x : y :: Cc : 2\mu : Sc : 2\mu :: \frac{Cc \cdot \mu - Sc \cdot \mu}{y} : \frac{2 \cdot Sc \cdot \mu \cdot Cc \cdot \mu}{y} ::$$

$$\frac{Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu} - \frac{Sc \cdot \mu}{Cc \cdot \mu} : 2; \text{ atqui } a + x : y :: Cc : \mu : Sc : \mu; \text{ ergo } \frac{Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu} = \frac{a + x}{y}. \text{ Facta}$$

$$\text{igitur substitutione valet proportio } a - x : y :: \frac{a + x}{y} - \frac{y}{a + x} : 2; \text{ ergo}$$

$$4a - 2x = a + x - \frac{y^2}{a + x}, \text{ sive } yy = 3x^2 - 4x + a = 3xx + 2ax - aa;$$

$$\text{igitur } \frac{yy}{3} = xx + \frac{2ax}{3} + \frac{aa}{9} - \frac{4aa}{9}. \text{ Fiat } x + \frac{a}{3} = z, \text{ & oritur } \frac{yy}{3} =$$

$$zz - \frac{4aa}{9}; yy : z : 1 :: \frac{4aa}{9} : \frac{4aa}{3}, \text{ quæ est ad hyperbolam, cujus semiaxis}$$

xis primus = $\frac{2a}{3}$, secundus = $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

24. Hujusmodi oritur constructio. Sume CE, quæ sit tertia pars CB, erit E hyperbolæ centrum. Seca EF = EB = $\frac{2a}{3}$, & ad angulos rectos pone EI = $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Semiaxibus EF, EI describe hyperbolam FD; hæc erit locus quæsitus, & in triangulo ADB angulus DAB = 2 DBA. Videndum, cui problemati solvendo par sit opposita hyperbola BM, quæ transit per punctum B. Ductis AM, BM, productæque ad utramque partem AB in P, N, reperies angulum externum MAP esse duplum anguli externi MBN.

25. Problema decimumtertium. Ex dato puncto C (Fig. 15.) posito in cruce dati anguli CAD agatur CD desinens in cruce aliud, cum hac DF faciat angulum CDF = CAD; sit vero AC:AD::DC:DF, quæritur curva transiens per omnia puncta F. Age CF. Liqueat triangula ACD, DCF esse similia, quia latera circa æquales angulos sunt proportionalia; ergo angulus CDA = DFC, & ACD = DCF, quibus æqualis est FDE. A punctis F, C demittantur in AD perpendiculares FE, CB, & ex puncto D ducatur DG perpendicularis CF. Ajo primum esse FE:CB in ratione duplicata AD:AC, quia est FE:CB in ratione FE:GD, sed FE:GD::FD:DC, & GD:CB::FD:DC; ergo FE:CB in ratione duplicata FD:DC, seu AD:AC. Hinc vocatis AC = a, CB = b, AD = z, FE = y, erit y:b::z:z:aa, hoc est

$\frac{a}{b} \cdot y = z^2$. Ex hac æquatione discis, ducta DO æquali, & parallela FE, curvam transcurrentem per omnia puncta O esse parabolam appollonianam, cujus vertex est A, parameter axis = $\frac{a^2}{b}$, quæque ad AE convexum obvertit.

26. Vocetur nunc AB = c = $\sqrt{aa-bb}$, & BD = z - c; ergo CD = $\sqrt{bb+cc-2cz+z^2} = \sqrt{aa-2cz+z^2}$. Demittatur AH normalis in CD. Quum sit CB.AD = bz = AH.CD, erit

$$AH = \frac{bz}{\sqrt{aa-2cz+z^2}}; \text{ igitur } CH = \sqrt{a^2 - \frac{b^2 z^2}{aa-2cz+z^2}}. \text{ Atqui}$$

$$AH:CH::FE:DE, \text{ hoc est}$$

$$\frac{bz}{\sqrt{aa-2cz+z^2}} : \sqrt{a^2 - \frac{b^2 z^2}{aa-2cz+z^2}} : y : DE =$$

$$\frac{y \cdot \sqrt{a^4 - 2a^2 cz + c^2 z^2} - b^2 z^2}{bz} = \frac{y \cdot \sqrt{a^4 - 2a^2 cz + c^2 z^2}}{bz}. \text{ Vocetur } AE = x,$$

$$\text{erit } x = z + \frac{y \sqrt{a^4 - 2a^2 cz + c^2 z^2}}{bz}, \text{ seu } bz x - bz^2 = y \sqrt{a^4 - 2a^2 cz + c^2 z^2}.$$

Pro x^2 pone $\frac{a^2}{b} \cdot y$, & fiet $bzx - a^2y = y \cdot \sqrt{a^4 - 2a^2cz + \frac{c^2a^2y}{b}}$. Ad quadratum

eleva $b^2z^2 - 2a^2bzx + a^4y^2 = a^4y^2 - 2a^2cz^2 + \frac{c^2a^2y^3}{b}$. Dele delenda,

iterumque pro x^2 ejus valorem substitue, $a^2bx^2y - 2a^2lzx + y = \frac{a^2c^2y^3}{b} -$

$2a^2cz^2$, seu $a^2b^2x^2y - a^2c^2y^2 = 2a^2b^2zxy - 2a^2bczy^2$. Fac dividas per

$a^2y \cdot bx - cy$, & fiet $bx + cy = 2bz = 2a\sqrt{by}$. Pone $x + \frac{cy}{b} = u$, & orietur

$u^2 = \frac{4a^2}{b} \cdot y$, quæ est ad parabolam, quæ ita constructur. Claude rectangulum

ABCI, produc IC in L donec, IL = IC, junge AL, diametro AL tangente

AB, posita diametri parametro = $\frac{4a^2}{b}$, describe parabolam: ipsa erit locus quæ-

situs. 26. Elegantius problema solves, si hæc utaris præparatione. Iisdem ac antea pos-

itis duc CB = CA (Fig. 16.), cu sit parallela FE; junge CF, & duc DG facien-

tem angulum DGC = CAB. Triangulorum similitudo ut in antecedente solu-

tione probatur. Præterea FE:CB est in ratione FE:DG; sed utraque ex his

rationibus est eadem ac ratio FD:DC, seu AD:AC; ergo FE:CB in ra-

tione duplicata AD:AC. Sit jam AC = CB = a, AD = z, FE = y, habe-

bitur $y:a::z:a^2$, aut $ay = z^2$. Præterea ex similitudine triangulorum ACD,

FDE est AC:AD::DE:FE, sive $a:z::DE:y$; ergo $DE = \frac{ay}{z}$. Vocer-

tur AE = x, fiet $x = z + \frac{ay}{z}$, aut $xz = z^2 + ay$. Pro z x colloca ejus va-

lorem ay, & erit $xz = 2ay$, sive $x^2z^2 = 4a^2y^2$ aut $a^2x^2y = 4a^2y^3$, demum-

$x^2 = 4ay$. Æquatio hæc est ad parabolam, quæ tangit in A lineam AE, &

quæ habet pro diametro AL parallelam BC. Quum hujus diametri parame-

ter = $4a = 4AC$, punctum C facile probabitur esse focus sectionis; ergo BC erit

axis. Si agatur AM perpendicularis BC, tum BM dividatur bisariam in N, erit

N vertex præcipuus parabolæ, & $\frac{1}{4}$ CN parameter axis.

27. Problema decimumquartum. Lineis duabus AM, FN (Fig. 17.) sese

secantibus in B in dato angulo, concipiantur moveri parallelæ DH, EG ita, ut

intercipiant partem DE æqualem datæ, tum per punctum H, ubi harum prima

secat datam FN, ex puncto fixo A dato in linea AM, iucatur AHG: queritur

quam curvam descripturus sit concursus linearum AG, EG. Antequam proble-

matris solut onem agredior, nonnullas determinationes præmittere præstat. Pri-

mo linæ HD, GE moveantur, ut punctum D abeat in A, & punctum E in

C, existente AC = DE; tum linea EG transibit in CF, & AH eidem fiet

parallela, neque ipsam secabit nisi in puncto infinite remoto; ergo CF erit as-

ymptotum curvæ. Moveantur denuo eadem linæ, ut punctum D abeat in B,

qua-

punctum E in M, existente BM = DE, tum AH coincidit cum AB, & concursus linearum AH, EG fiet in puncto M; ergo per M tranſibit curva. Si deinde lineæ HD, GE ad eandem partem promoveantur, punctum concursus linearum AH, EG magis magisque accedet ad rectam FN, numquam tamen pertinet; erit igitur HN alterum aſymptotum curvæ.

28. Hæc determinationes ad congruam nos ducunt utiorem. Accepto enim abſciſſarum initio in F concursu aſymptotorum, vocetur FI = x, IG = y, AB = b, AC = DE = BM = a; ergo CB = b - a. Item FC = c, BF = e; ergo BI = x - e. Quam autem ſit

$$BF:FC::BI:I E$$

$$e:c::x-e:I E = \frac{c x}{e} - c; \text{ igitur } GE = y - \frac{c x}{e} + c. \text{ Item}$$

$$BF:CB::BI:BE$$

$$e:b-a::x-e:BE = \frac{b-a \cdot x}{e} - b+a; \text{ ergo } AE = a + \frac{x \cdot b-a}{e}. \text{ Item}$$

$$FB:CB::HI:DE$$

$$e:b-a::HI:a; \text{ ergo } HI = BN = \frac{ae}{b-a}, \text{ \& } FH = x - \frac{ae}{b-a}. \text{ Rurſus}$$

$$FB:CB::FH:CD$$

$$e:b-a::x - \frac{ae}{b-a}:CD = \frac{x \cdot b-a}{e} - a. \text{ Præterea}$$

$$BC:FC::BD:DH$$

$$b-a:c::b-x \cdot \frac{b-a}{e}:DH = \frac{cb}{b-a} - \frac{cx}{e}. \text{ Demum}$$

$$AD:DH::AE:EG$$

$$\frac{x \cdot b-a}{e} : \frac{cb}{b-a} - \frac{cx}{e} :: a + \frac{x \cdot b-a}{e} : y - \frac{cx}{e} + c; \text{ ergo factò ad æquationem tranſitu}$$

$$\frac{xy \cdot b-a}{e} - \frac{cx^2 \cdot b-a}{e^2} + \frac{cx \cdot b-a}{e} = \frac{acb}{b-a} - \frac{acx}{e} + \frac{cbx}{e} - \frac{cx^2 \cdot b-a}{e^2},$$

& deletis delendis romanet ſimpliciffima æquatio $xy \cdot \frac{b-a}{e} = \frac{acb}{b-a}$, ſive

$$xy = \frac{abc e}{a-b}.$$

29. Hæc ut facilius conſtruatur, vocetur MN = m, & quum ſit CB:CF::BM:MN, erit $b-a:c:a:m = \frac{ac}{b-a}$. Introductò in æquationem hoc valore

erit $xy = \frac{m b e}{b-a}$. Vocetur denuo FN = n, & quum ſit CB:BF::CM:FN provenit $b-a:e::b:n = \frac{be}{b-a}$. Hic va or in æquatione ponatur, ut reſulret

$\frac{m b e}{b-a} = mn$. Æquatio pertinet ad hyperbolam deſcribendam inter aſymptota CF, FN ita, ut tranſeat per punctum M. Determinationes præmiſſæ creant ſolutio-

lutio.

lutionis elegantiam. Per eas enim cognovimus asymptota, & eorum concursum. Quare in hoc concursu facto initio abscissas sumpsimus in uno asymptorum; quæ cautio simplicissimam obtulit æquationem.

30. Problema decimum quintum. Linea CED (Fig. 18.) faciens cum AG angulum datum moveri possit libere motu parallelo. Data sit item linea BD, quæ concurret cum AG in puncto B; demum norma CAD ita moveatur, ut concurret laterum AD, CD sit semper in linea BD, quaeritur quomodo curvam descripturus sit concursus linearum AC, CD. Ex punctis A, C, D reſectæ BG agantur normales AI, CF, DG. Vocetur AB = a, AI = b, angulus datus AEC = μ , AF = x, FC = y, AG = z. Quomodo sit

BA:BG::AI:GD, erit $a : a + z :: b : GD = b + \frac{bz}{a}$.

Eſt $Sc.\mu : Cc.\mu :: CF = y : FE = \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . y$. Ergo $AE = x + \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . y$.

Item $Sc.\mu : Cc.\mu :: GD = b + \frac{bz}{a} : GE = \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . b + \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . \frac{bz}{a}$. Igitur

$AE = z - \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . b - \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . \frac{bz}{a}$. Aequatis duobus valoribus AE resultat formula

$x + \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . y = z - \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . b - \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} . \frac{bz}{a}$, five

$\frac{ax . Sc.\mu + ay . Cc.\mu + ab . Cc.\mu}{a . Sc.\mu - b . Cc.\mu} = z$. Ex proprietate anguli recti eſt

CF:FA::GA:GD, & analytice $y : x :: z : b + \frac{bz}{a}$, five $axz = aby + byz$;

ergo $z = \frac{aby}{ax - by}$. Comparatis duobus valoribus z oritur æquatio

$\frac{x . Sc.\mu + y . Cc.\mu + b . Cc.\mu}{a . Sc.\mu - b . Cc.\mu} = \frac{by}{ax - by}$, quæ liberata a divisoribus hanc formam induit

$$a . Sc.\mu . x^2 + a . Cc.\mu . xy + ab . Cc.\mu . x - b . Cc.\mu . y^2 - bb . Cc.\mu . y =$$

$-b . Sc.\mu . xy$
 $ab . Sc.\mu . y - bb . Cc.\mu . y$ & deletis delendis

$$a . Sc.\mu . x^2 + a . Cc.\mu . xy - b . Cc.\mu . y^2 + ab . Cc.\mu . x - ab . Sc.\mu . y = 0.$$

31. Si DB sit parallela AG, constat, AB = a fore infinitam existentem finita AI = b. Quare neglectis terminis evanescentibus æquatio subsistet inter

terminos $a . Sc.\mu . x^2 + a . Cc.\mu . xy + ab . Cc.\mu . x - ab . Sc.\mu . y = 0$, & facta divisione per $a . Sc.\mu . x^2 + Cc.\mu . xy + b . Cc.\mu . x - b . Sc.\mu . y = 0$. Hæc,

si angulus AEC = μ sit rectus, atque adeo $Cc.\mu = 0$, evadit simplicissima

$x^2 - by = 0$, quæ est ad parabolam, quemadmodum alio loco docuimus. Quod

si angulus μ rectus non sit, sed vel acutus vel obtusus, atque adeo $Cc.\mu$ vel positivus, vel negativus, æquatio semper est ad hyperbolam.

32. Verum existente AB = a finita, æquatio esse potest ad parabolam, &

Aa

ad

ad ellipsim, quotiescumque $-4ab$. *Sc.μ.Cc.μ* sit æqualis, aut major

$a.Cc.μ - b.Sc.μ$. Hoc autem evenire non potest, nisi angulus $μ$ sit obtusus, & *Cc.μ* negativus, si a, b aut utraque sit positiva, aut utraque negativa, sive nisi alterutra ex speciebus a, b negativa sit, si angulus $μ$ acutus sit, & *Cc.μ* positivus. In reliquis casibus æquatio est ad hyperbolam. Quæ propter si angulus $μ$ sit rectus, & *Cc.μ = 0*, (Fig. 19.) æquatio semper pertinet ad hyperbolam. Casum hunc contraximus in hypotheli, quod a, b positivæ sint, ut exemplum proponamus methodi, quæ in casibus reliquis sit æquatio perducenda ad constructionem. Hypothesis formulam in hanc vertit

$a x^2 - b x y = a b y$, sive $x^2 - \frac{b}{a} x y = b y$, additoque dimidii coefficientis qua-

drato $x x - \frac{b x y}{a} + \frac{b b}{4 a a} y^2 = b y + \frac{b b}{4 a a} y y$. Pone $x - \frac{b}{2 a} y = u$, ut sit

$u u = b y + \frac{b b}{4 a a} y^2$, sive $\frac{4 a^2}{b^2} u^2 = \frac{4 a a}{b} y + y y$. Quæ æquatio per metho-

dum a nobis traditam, referenda est non ad abscissam y , sed ad abscissam my ;

ita ergo est præparanda $\frac{4 m^2 a^2 u^2}{b^2} = \frac{4 m^2 a}{b} m y + m^2 y^2 :: \frac{4 m^2 a^4}{b^2} : a^2$. Quom-

autem angulus coordinatarum x, y rectus esse debeat, determinatur $m = \frac{\sqrt{4 a a t o b b}}{2 a}$.

33. Analysis hanc constructionem præbet. Producatur IA , donec $AP = 2 a$. $AB = 2 a$. Parallela AE agatur $PQ = AI = h$, & jungatur AQ , quæ pro-

ducatur in M , ut $AM = \frac{2 m a^2}{b} = \frac{a \sqrt{4 a a + b b}}{b}$. Quare AM erit tertia pro-

portionalis post $b, a, \sqrt{4 a a + b b}$, sive AI, AB, AQ . Demum posita $MN = AB = a$ parallela AE , cum duabus semidiamentris AM, MN , describatur hyperbola AC , in hac semper invenietur concursus linearum AC, CD , dum concursus linearum AD, CD percurrit lineam BD in hypotheli, in qua CD sit normalis AE , & motu parallelo moveatur. Ex his perspicuum est, in hoc similibusque casibus hyperbolam, quæ describitur, referendam esse non ad axes, sed ad duas diametros conjugatas.

34. Ut curva non ad diametros, sed ad axes revocetur, necesse est evanescat in æquatione terminus plani $x y$. Hanc ob rem oportet, ut $a.Cc.μ = b.Sc.μ$, quæ æquatio locum habere potest si existente a, b utraque positiva, aut negativa sit *Cc.μ* positivus, & angulus $μ$ acutus, aut si una ex speciebus a, b sit positiva, altera negativa, & *Cc.μ* negativus, adeoque angulus $μ$ obtusus. Primam hypothesein, quæ exhibet hyperbolam, præstat ad constructionem perducere. Quom autem sit $a:b :: Sc.μ : Cc.μ$, substituta a pro *Sc.μ*, & b pro

Cc.μ, æquatio fit $a^2 x^2 - b^2 y^2 + a b^2 x - a^2 b y = 0$, sive

$a x + \frac{b^2}{2} - \left(b y + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right)$. Pone $x + \frac{b^2}{2 a} = z$, & $y + \frac{a^2}{2 b} = u$, ut fiat

$$\text{fiat } a^2 z^2 - b^2 u^2 = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4} : \text{five } z^2 - \frac{b^4}{4a^2} + \frac{a^2}{4} : u^2 : b^2 : a^2 ; \text{quæ æquatio semper est ad hyperbolam.}$$

35. Primum accidere potest, ut $a = b$, atque adeo omnes anguli ABI , AIB , AEC (Fig. 18. sint femirecti. In hoc casu æquatio transit in æquationem duplæ linearæ rectæ $x = \pm u$. Deinde accidere potest, ut $b > a$, & angulus $AIB = AEC$ sit minor ABI . In hoc casu z accipiendæ sunt in axe primo, & u erunt parallelæ secundo: qua de re axis primus major sit secundo necesse est. Demum fieri potest, ut $a > b$, & angulus $AIB = AEC$ sit major angulo ABI . In hoc casu z accipiendæ sunt in axe secundo: qua de re axis secundus minor sit oportet axe primo. Itaque per hanc constructionem illæ solum hyperbolæ delineantur, quæ habent axem primum majorem secundo.

CAPUT OCTAVUM

De transformatione æquationum tertii, & quarti gradus.

1. **A**ntequam rationem doceo construendi æquationes tertii, & quarti gradus per intersectionem linearum gradus secundi, quo facilior fiat, atque expeditior theoria, utile erit exhibere methodum transformandi easdem æquationes tertii, & quarti gradus. Transformare æquationem nihil aliud est, quam eam in aliam convertere, cujus radices dantur suppositis radicibus transformandæ, aut vice versa. Ita transformatur proposita, si alia inveniat æquatio, cujus radices sint majores, aut minores radicibus propositæ per quantitatem datam, aut cujus radices sint ad radices propositæ in ratione data.

2. Primum facile est æquationem quæcumque transformare in aliam, cujus radices data quantitate majores sint, aut minores, seu quod idem est, augere, aut minuire æquationis radices data quantitate. Si enim velis augere, pone ejus incognitam $x = y + a$, si velis minuire, fac $x = y - a$; a est quantitas data; tum pro x substitue in æquatione ejus valorem datum per y , & a , & invenies æquationem, quam quæris. Unum aut alterum exemplum theoriæ non difficilem reddet faciliorem.

3. **Æ**quationis $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radices augere oporteat num ro 3. Pone

$x = y - 3$; Ergo elevando ad congruas potestates invenies

$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$x^3 = y^3 - 9yy + 27y - 27$$

$x^4 = y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. His autem valoribus omnibus substitutis proveniet æquatio

$$\begin{aligned}
 & y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81 \\
 & + 4y^3 - 36y^2 + 108y - 108 \\
 & - 19y^2 + 114y - 171 = 0, \text{ id est} \\
 & \quad \quad \quad - 106y + 318 \\
 & \quad \quad \quad - 120
 \end{aligned}$$

$y^4 - 8y^3 - 9y^2 + 8y = 0$, cujus radices per 3 superant radices propositæ. Reple radices propositæ erant

+5, -2, -3, -4; transformatæ autem radices sunt

+8, +1, +0, -1; hæc autem illis ita majores sunt, ut differentia = 3.

4. Si ejuſdem æquationis radices minuendæ sint, fac $x = y + 3$, & invenies

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 12x^3 + 47x^2 + 108x + 81 \\
 & 4x^3 - 36x^2 + 108x + 108 \\
 & - 19x^2 = -19y^2 - 114y - 171 = 0 \\
 & - 106x \quad \quad \quad - 106y - 318 \\
 & - 120 \quad \quad \quad - 120
 \end{aligned}$$

quæ reducta in hanc mutatur

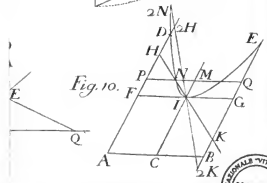
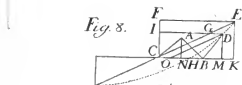
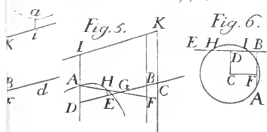
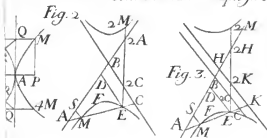
$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$, cujus radices sunt 2, -5, -6, -7, quæ ita propositæ radicibus sunt minores, ut differentia = 3. Fermi superfluum est advertere, quom dicimus augeri radices, augeri quædam radices positivas, negativæ autem in suo genere imminui, quia negativæ quantitas additur positiva. Idem dic de radicibus, quæ minuuntur.

5. Æquatio $x^3 + cx^2 - b^2x - b^2c = 0$ transformanda fit in aliam, cujus radices majores sint quantitate a . Pone $x = y - a$, & sequentes formulæ transformata exhibebunt.

$$\begin{aligned}
 & x^3 - 3ayy + 3a^2y - a^3 \\
 & cx^2 = cy^2 - 2acy + a^2c = 0, \text{ Radices æquationis} \\
 & -b^2x \quad \quad \quad -b^2y + ab^2 \\
 & -b^2c \quad \quad \quad -b^2c
 \end{aligned}$$

propositæ erant b , $-b$, $-c$; æquationis autem inventæ sunt $b+a$, $-b+a$, $-c+a$.

6. Uſus præ ipſius hujus transformationis eſt, ut inveniantur æquatio ſecundo termino carens. Sit æquatio tertii gradus $x^3 + ax^2 + abx + abc = 0$, in qua a , b , c poſſunt eſſe cum poſitivæ tum negativæ. Hanc oportet transformare in aliam carentem ſecundo termino. Pone $x = y + m$, quæ ſpecieſ m nunc eſt indeterminata, deinceps in progrefſu erit determinanda. Peractis ſubſtitutionibus habebis



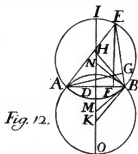
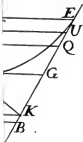


Fig. 12.

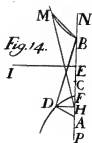


Fig. 14.

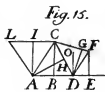


Fig. 15.

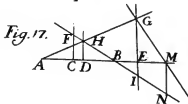


Fig. 17.

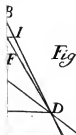
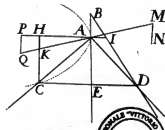


Fig. 19.



$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3 \\
 + ax^2 \quad + ay^2 + 2may + m^2a \\
 + abx \quad + aby + mab \\
 + abc \quad + abc
 \end{array} = 0. \text{ Ut secundus terminus in transf}$$

formata desit, oportet, ut $3m + a = 0$, sive $m = -\frac{a}{3}$, hoc est æqualis tertiæ parti coefficientis secundi termini datæ æquationis signo mutato. Reapse si ponas $x = y - \frac{a}{3}$, inuenies

$$\begin{array}{r}
 y^3 - \frac{a^2}{3}y + \frac{2a^3}{27} \\
 + aby - \frac{ab^2}{3}
 \end{array}$$

, quæ est secundo termino destituta.

7. Si quis optaret tollere tertium æquationis terminum, necesse esset, ut $3m^2 + 1ma + ab = 0$. Ad determinandum m opus iraque est resolvere æquationem secundi gradus, quæ quum prædicta sit duobus radicibus, duplicem præbabit valorem m , per quem tertius terminus in æquatione evanescit. Adverte tamen imaginarium sæpe esse utrumque valorem; quod ubi accidit, tertius terminus tolli non potest, quia imaginarias quantitates introducamus. Si velle ultimum terminum abicere, sese obuiam ferret æquatio $m^2 + am^2 + abm + abc = 0$, quæ est tertii gradus, ac prorsus eadem cum proposita. Quare ultimum terminum nunquam tolles, nisi æquationis propositæ radices cognoscas.

8. Quod de æquationibus tertii gradus, idem dicas velim de æquationibus quarti. Sit itaque æquatio $x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd = 0$. Ad eam transformandam pone $x = y + m$, ut peractis substitutionibus habeas

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad y^4 + 4my^3 + 6m^2y^2 + 4m^3y + m^4 \\
 + ax^3 \quad + ay^3 + 3amy^2 + 3am^2y + am^3 \\
 + abx^2 \quad + aby^2 + 2abmy + abm^2 \\
 + abcx \quad + abcay + abcm \\
 abcd \quad + abcd
 \end{array} = 0$$

Ut evanescat secundus terminus, fac $4m + a = 0$, seu $m = -\frac{a}{4}$, hoc est æqualis coefficienti secundi termini diviso per 4, signo mutato. Licet itaque secundum terminum de medio tollere. Delebitur tertius terminus, si facias $6m^2 + 3am + ab = 0$, ex cujus resolutione duplex prodit valor m . Sed si valor iste fuerit imaginarius, tertium terminum non abicies, nisi reoleas æquationem imaginariam. Tertius terminus tolletur resoluta æquatione tertii gradus $4m^3 + 3am^2 + 2abm + abc = 0$, quæ quum habeat semper unum valorem,

rea-

realem, ut deinceps constabit, exhibebit valorem m , quo uti poteris vitatis imaginariis. Ad repellendum terminum ultimum, necessarium est, resolvere æquationem gradus quarti, immo prorsus eandem cum propozita.

9. Deinde transformatur æquatio inventa in æquationem, cujus radices ad radices propozitæ sint in data ratione. Hoc obtinebis, si facias $x = \frac{my}{n}$. Ad exemplum fit transformanda æquatio $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4 = 0$. Pro x scribe $\frac{my}{n}$, ut habeas $\frac{m^4y^4}{n^4} - \frac{m^3ay^3}{n^3} + \frac{m^2a^2y^2}{n^2} - \frac{ma^3y}{n} + a^4 = 0$. Multiplica per

n^4 , & divide per m^4 , ut oriatur

$$y^4 - \frac{na^3y^3}{m} + \frac{n^2a^2y^2}{m^2} - \frac{n^3ay}{m^3} + \frac{n^4a^4}{m^4} = 0.$$

10. Utilis sæpe est hæc transformatio ad eliminandas fractiones ab æquatione. Hanc uam breviter unico propozito exemplo declarabo. Sit æquatio

$$x^3 + \frac{a}{b}x^2 + a^2x - a^3 = 0. \text{ Ut fractionem } \frac{a}{b} \text{ ejicias, pone } x = \frac{my}{n}, \text{ facta}$$

$$\text{que substitutione, \& reductione proveniet } y^3 + \frac{na^2y^2}{mb} + \frac{n^2a^2y}{m^2} - \frac{n^3a^3}{m^3} = 0.$$

Ut fractiones arceantur, satis est, ut na possit exacte dividi per mb , quod obtinebis, si ponas $n=b$, $m=a$. Æquatio enim in hanc convertetur, quæ fractionibus caret $y^3 + ay^2 + ny - n^3 = 0$.

11. Tertia transformatio fit, quum æquatio invenitur, cujus radices cum propozitæ radicibus reciprocantur. Hanc ob rem ponenda est $x = \frac{A}{y}$; quantitas A pro libito accipi potest. Utere hac substitutione ad transformandam æquationem

$$x^4 - 7x^3 + 3x - 10 = 0; \text{ invenies autem } \frac{A^4}{y^4} - \frac{7A^3}{y^3} + \frac{3A}{y} - 10 = 0,$$

$$\text{sive } A^4 - 7A^3y^3 + 3Ay^3 - 10y^4 = 0, \text{ sive } y^4 - \frac{3A}{10}y^3 + \frac{7A^3}{10}y^2 - \frac{A^4}{10} = 0,$$

quæ liberabitur a fractionibus, si facias $A = 10$.

12. Si in analyticos rationem intendas animum, facile cognosces, per hanc transformationem primum terminum transire in ultimum, secundum in penultimum, atque ita deinceps. Quare si habeas formulam coerentem aliquo termino, per hanc methodum aliam formulam invenies, quæ carebit termino, qui tantum a primo distabit, quotum ille ab ultimo. Ita in exemplo numeri superioris quando formula carebat secundo termino, prodit æquatio carens termino penultimo.

13. Aliquos inveni, qui aliquando æquationem transformant in aliam, cujus radices sunt medice proportionales inter datam, & radices propozitæ. Quare

re ponunt $\sqrt{Ax} = y$, & $x = \frac{y^2}{A}$. Verum advertendum est, posita A positiva

duplicari numerum radicum positivarum, quia signum radicale duplici afficitur signo; at radices negativæ transeunt in imaginarias. Contra duplicantur negativæ, positivæ sunt imaginariæ, si A sit negativa. Quare hanc transformationem exiguum usum habere arbitror. Ea autem de causa potissimum hanc transformationem theoriam præmissi, ut appareat, quamlibet æquationem tertii, & quarti gradus in aliam mutari posse, quæ careat secundo termino.

1. Hic quoque juvat adnotare, formulam tertii gradus nullo negotio converti in formulam quarti, si multiplicetur per x , aut per $x \pm B$. Sed sciendum, numerum radicum per hanc multiplicationem unitate augeri. Si enim ducatur in x , radicibus, quibus prædita erat æquatio tertii gradus, additur radix $x = 0$; si ducatur in $x \pm B$, radicibus tribus additur quarta nempe $x = \mp B$. Quapropter radices istæ additæ non pertinent ad tertii gradus æquationem, & si agatur de inventendis tribus radicibus æquationis tertii, istæ sunt tamquam inutilis sepehendæ.

CAPUT NONUM.

De constructione æquationum tertii, & quarti gradus per intersectionem conicarum sectionum.

1. **Q**uemadmodum æquationes primi gradus construuntur per intersectionem duarum rectarum, æquationes vero secundi gradus per intersectionem rectæ cum circulo, aut duorum circulorum inter se, ut in primo libro docuimus: ita æquationes tertii, & quarti gradus construuntur per intersectionem duarum sectionum conicarum, quod in præsentia est declarandum. Paulo ante demonstravimus æquationes omnes indeterminatas secundi gradus ad sectiones conicas pertinere, easque descriptis conicis sectionibus ad constructionem perducere. Quare si æquationem tertii, aut quarti gradus resolvamus in duas indeterminatas secundi gradus, delineatis sectionibus conicis earum intersectiones exhibebunt radices æquationis determinatæ.

2. Ut hæc concipiatur clarius, sint duæ indeterminatæ x , y , de quibus constet valere has æqualitates $ay = x^2$, $xy = ab$. Habebimus duas æquationes, & duas incognitas; quare transitus fieri poterit ad æquationem determinatam unam solummodo incognitam continentem. Nimirum in secunda æquatione substitue pro y ejus valorem $\frac{x^2}{a}$, qui datur ex prima, & prodibit $\frac{x^4}{a} = ab$, five $x^4 = a^2b$, quæ æquatio determinata nascitur ex duabus indeterminatis. Quare vice versa æquationem determinatam tertii gradus $x^3 = a^2b$, poterit resolvere in duas indeterminatas gradus secundi, statuens $ay = xx$. Valore enim xx substituto oriatur $xy = ab$. En itaque duas æquationes in determinatas: $ay = xx$, $xy = ab$, ex quarum combinatione æquatio $x^4 = a^2b$ restitueretur.

3. Re-

3. Resoluta æquatione tertii, aut quarti gradus in duas indeterminatas secundi, ad eandem abscissam A P, (Fig. 1.) sumpto eodem obscillarum in AIO A delineentur sectiones conicæ, qui sunt loci æquationum indeterminatarum, earum intersectiones præbunt radices æquationis determinatæ, quæ tot erunt, quot sunt intersectionum puncta. Ita in exemplo adducto ad tangentem A P descripta parabola A M, quæ est locus æquationis $ay = xx$, tum ducta A N parallela ordinatis, & delineata hyperbola N M inter asymptota A N, A P, quæ hyperbola est locus æquationis $xy = ab$, habebitur unica curvarum intersectio in puncto M. Ex hoc ducatur ordinata M P, erit A P radix æquationis quaesitæ. Ratio est clarissima, quia utraque æquatio $ay = xx$, $xy = ab$ locum habere non potest nisi in punctis illis, quæ sunt tum parabolæ, tum hyperbolæ communia.

4. His animadversis quisque videt, in eo difficultatem sitam esse, ut æquationes omnes tertii, & quarti gradus in duas indeterminatas secundi resolvamus. Hinc ob rem supponam plerumque æquationes spoliatas esse secundo termino, quod semper ex capite superiore possumus obtinere. Incipiam ab æquationibus gradus tertii. Sit resolvenda in duas æquatio $x^3 + abx - af^2 = 0$, in qua a , b possunt accipi & positive, & negative. Fiat $x^3 = ay$, & facta substitutione nascitur $yx + bx - ff = 0$. Prima ex his est ad parabolam, altera ut construat, ponit $y + b = z$, & proveniet $zx = ff$, quæ est ad hyperbolam inter asymptota.

5. In A P (Fig. 2.) sumptis abscissis $= x$, quæ incipiunt in A, delineetur parabola M A m, quæ tangatur ab A P in A, & habeat diametri parametrum $= a$; abscissæ enim cum ordinatis facere possunt angulum quemcumque. Erunt A P $= x$, P M $= y$ æquationis $ay = xx$. Similiter inter asymptota I Q, F S, (Fig. 3.) quæ faciunt angulum I C S æqualem angulo A P M, describe hyperbolam, cujus coordinatæ N Q, C Q efficiant rectangulum $= ff$. In hac sume C Q $= x$, erit Q N $= z$. Demum secta C D $= b$, per D agatur D E parallela asymptoto C Q, erunt D E $= x$, E N $= y$ æquationis $yx + bx = ff$.

6. Ut rite duo loci geometrici conjugantur, oportet, ut lineæ abscissarum D E, A P (Fig. 4.) coincident cadente D supra punctum A. Hoc factum conspicies in fig. 4, in qua sumpta D C $= b$ in parabolæ diametro producta, per punctum C ducta est C Q parallela tangenti D E, & inter asymptota I Q, F S descripta est hyperbola. His effectis puncta intersectionis N hyperbolæ cum parabola præbunt valores coordinatarum x, y utrique curvæ communium. Si itaque intersectio sit N, erit N E valor y , & D E valor respondentis x , quæ proinde radicem æquationis tertii gradus sufficiet. Ex hac combinatione hyperbolæ, & parabolæ ad inveniendas radices æquationis $x^3 + abx - aff = 0$, si tam a , quam b sit positiva, quod in fig. 4. supponitur, apparet, curvas non secare se nisi in unico puncto N; qua de re unica erit dumtaxat radix realis propositæ æquationis. Hoc idem contingit si $b = 0$, atque adeo æquatio proposita sit $x^3 - aff = 0$.

7. Quod si b foret negativa, & æquatio $x^3 - abx - aff = 0$, tum C D sumenda esset ad partem oppositam, ut in fig. 5. In hac combinatione ramus parabolæ D N secat ut antea ramum hyperbolæ S N in puncto N; quare habetur una radix æquationis D E, & quidem positiva. At quom contingere possit, ut alii rami se leceant, & non secent, determinandus est casus medius, in quo ramus para-

parabolæ Da tangit ramum hyperbolæ In. Itaque ajo, sese invicem tangere

parabolam, & hyperbolam, si fuerit parameter parabolæ, scilicet $a = \frac{27f^3}{4b^3}$. E-

tenim divide CD = b in R, ut DR fit tertia pars, & parabolæ diametro ap-

plica Rn, quæ invenitur = $\sqrt{\frac{27f^3}{4b^3} \cdot \frac{b}{3}} = \sqrt{\frac{9f^3}{4b^2}} = \frac{3f^2}{2b} = \frac{f^2}{\frac{2}{3}b} = \frac{f^2}{CR}$; at-

qui $\frac{f^2}{CR}$ est æqualis ordinatæ hyperbolæ; igitur Rn non minus est ordinata

parabolæ quam hyperbolæ, ergo punctum n est in utraque curva. Quod autem

hoc punctum n sit punctum contactus ita demonstro. Ex n duc nu, quæ pa-

rabolam tangat, erit Du = DR; ergo Ru = RC; sed hæc est proprietas tan-

gentis hyperbolæ; ergo nu non minus parabolam tanget, quam hyperbolam;

igitur curvæ istæ duæ sese tangunt in puncto n. Hæc demonstratis constat in-

hoc casu $a = \frac{27f^3}{4b^3}$ æquationem $x^3 - abx - af^2 = 0$, præter unam radicem

DE positivam, de qua supra, habere duas alias radices negativas, & inter

se æquales nempe De. Si sit $a > \frac{27f^3}{4b^3}$, tum parabola præter punctum N sec-

abit hyperbolam in duobus punctis, a quibus duæ radices negativæ definiuntur.

Æquatio itaque tribus radicibus prædita erit, positiva una, reliquis negativis.

Si vero $a < \frac{27f^3}{4b^3}$, præter punctum N nulla alia existit intersectio, & æqua-

tio una tantum radice positiva gaudet.

8. Si quantitas a eiset negativa, tum describenda esset parabola ad partem

oppositam, scilicet ad partem ordinarum negativarum procedentibus ramis ver-

sus F, quia ejus parameter esset negativa. Quapropter si foret b negativa, aut

= 0 hyperbola secaretur a parabola in uno tantum puncto, quod respondet ab-

scissis negativis, ac proinde una solum radix negativa haberetur. Si vero b ef-

set positiva, tum ad determinandum, utrum unum, aut tria sint puncta inter-

sectionis, eadem est prorsus regula adhibenda. Si autem tria sint, unum perti-

nebit ad abscissas negativas, & radicem negativam præbebit, reliqua duo spe-

ctabunt ad abscissas positivas, & duas radices positivas sufficient. Ex his omni-

bus colligas velim, æquationem gradus tertii aut una radice reali, aut tribus

ornatam esse, quia descriptæ curvæ, aut in uno puncto, aut in tribus semper

se secant. Constat proinde, æquationem tertii gradus saltem una radice reali

præditam esse.

9. Hætenus spectavimus formulas tertii gradus carentes secundo termino,

ut elegantiores fierent constructiones. Ceterum eadem methodo in duas indeter-

minatas resolvuntur etiam æquationes, quæ continent secundum terminum;

quod paucis indicare non pigebit. Sit æquatio omnibus terminis constantibus

pe $x^2 + ax^2 + abx - abf = 0$, in qua a, b, f esse possunt positivæ & negativæ. Fiat $x^2 + ax = ay$, quæ multiplicetur per x , ut sit $x^3 + ax^2 = axy$. Facta substitutione oriatur $yx + bx = bf$. In duas igitur resoluta est æquatio tertii gradus, hoc est $x^2 + ax = ay$, $yx + bx = bf$. Prima est ad parabolam, quia addito $\frac{a^2}{4}$ fiet $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = ay + \frac{a^2}{4}$. Fac $x + \frac{a}{2} = g, y + \frac{a}{4} = p$, & invenies $gp = ap$, quæ est æquatio parabolæ. Altera spectat ad hyperbolam inter asymptota, quia posita $y + b = z$ provenit $zx = bf$, quæ est æquatio hyperbolæ inter asymptota. His curvis delineatis, & rite conjunctis puncta intersectonum definitæ nostræ æquationis radices. Adverte, me elegantiz causa assumpsisse parabolæ parametrum $= a$. Verum si aliam velis esse nempe g , adhibe primam æquationem $xx + ax = gy$, & opportunitis prædictis operationibus fiet voti compos.

10. Transeo ad resolutionem æquationum quarti gradus, quas spoliatas suppono secundo termino. Sit generalis æquatio $x^4 + fgx^2 + f^2x - f^2c = 0$, in qua quantitates f, g, b, c & positivæ esse possunt, & negativæ, imo f quantitas est arbitraria, quam pro libito sumere possum. Ad hanc enim formam æquationes omnes reduci possunt, quin subeant mutationem. Fiat $xx = fy$, & $x^4 = f^2y^2$, factaque substitutione oriatur $y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx - fc = 0$, a qua detrahe æquationem $x^2 - fy = 0$ multiplicatam per m , positaque $\frac{g}{f} = n$, obtinebis $y^2 + \frac{n}{m}x^2 + lx + mfy - fc = 0$, in qua duæ adsunt quantitates ex arbitratu determinandæ nempe m, n . Si his quantitatibus assignemus valores diversos, diversæ oriuntur æquationes indeterminatæ secundi gradus, quarum duæ prohibito sumptæ, descriptis curvis, radices nostræ æquationis sufficient.

11. Ut clarius hoc percipias inventam æquationem ordina in hunc modum

$$yy + mfy + \frac{m^2f^2}{4} = \overline{m-n}x^2 - bx + fc + \frac{m^2f^2}{4}. \text{ Fac } y + \frac{mf}{2} = z, \text{ \& fiet}$$

$$xz = \overline{m-n}x^2 - bx + fc + \frac{m^2f^2}{4}. \text{ Si } m-n=0, \text{ æquatio hæc est ad parabolam, plenamque resolutionem accipiet, si ponas } -x + \frac{fc}{b} + \frac{m^2f^2}{4b} = u, \text{ ut resulet } z = bu. \text{ In aliis casibus pone } m-n = \pm r, \text{ ut habeas}$$

$$\frac{z - fc - \frac{m^2f^2}{4}}{\pm r} = \pm x - \frac{bx}{\pm r}, \text{ factaque } x - \frac{b}{\pm 2r} = u, \text{ oriatur}$$

$$\frac{z - fc - \frac{m^2f^2}{4}}{\pm r} + \frac{b^2}{4r^2} = u^2. \text{ Pone demum } -fc - \frac{f^2m^2}{4} \pm \frac{b^2}{4r} = \pm a^2 \text{ ut}$$

obti-

obtineas $\frac{x^2 + a^2}{r} = u^2$, ex qua æquatione per signorum combinationem quatuor

sequentes oriuntur $\frac{x^2 + a^2}{r} = u^2$, $\frac{x^2 - a^2}{r} = u^2$, $\frac{x^2 - a^2}{-r} = u^2$, $\frac{x^2 + a^2}{-r} = u^2$.

Prima est ad hyperbolam, in cujus prima diametro sunt accipiendæ indeterminatæ u . Altera est ad hyperbolam, in cujus secunda diametro u sunt sumendæ. Tertia est ad ellipsim. Quarta nihil habet utilitatis, quia est ad ellipsim imaginariam. In his omnibus quadratum diametri, cui sunt parallelæ x , ad quadratum diametri, in qua accipiuntur u , est ut $r:1$. Si $r=1$, hyperbolæ fiunt æquilatæ, & ellipsis transit in circulum, dummodo coordinatarum angulus sit rectus.

12. Ex his omnibus perspicuum est, æquationem semper pertinere ad hyperbolam, si r sit positiva, vel quadrato a^2 prefigatur signum $+$, vel signum $-$; pertinere vero ad ellipsim, si r sit negativa, quæ ellipsis realis erit, si a^2 signo $-$ afficiatur, erit imaginaria, si a^2 signum $+$ habeat. Itaque æquatio generalis indeterminata $y^2 + nx^2 + bx + mfy - fc = 0$, si $n - m = 0$, est

ad parabolam; si $n - m$ est negativa, est ad hyperbolam; si $n - m$ est positiva, est ad ellipsim, quod alias etiam monuimus. Quod si optas, ut diametrorum quadrata sint ut $b:l$, necesse erit ut vel $n - m = \frac{b}{l}$, vel $n - m = \frac{l}{b}$:

Quare ad habendam curvam datæ speciei, oportet $n - m$ esse quantitatem datam vel positivam vel negativam prout aut ellipsim postulas, aut hyperbolam. Quamquam in superiore æquatione duæ existunt quantitates indeterminatæ n, m ; tamen advertendum est sedulo, non eodem modo esse indeterminatas. Etenim quantitas n ita est indeterminata, ut eundem valorem debeat habere in illis duabus æquationibus, in quas ad inveniendas radices resolvitur æ-

quatio quarti gradus. Nam quantitas n dependet ab f , quia $n = \frac{r}{f}$: sed f tum in æquatione substitutionis $x = fy$, tum in ea, quæ statim nascitur facta substitutione, tum in illis, quæ prodeunt detracta formula substitutionis multiplicata per m , eadem sit oportet: ergo etiam n eadem esse debet. Quare potes quidem n ex arbitratu determinare: at ubi semel determinaveris, idem valor in omnibus est retinendus. Verum quantitas m ita indeterminata est, ut unum valorem habeat in prima æquatione, alium in secunda: imo diversi valores m , diversas curvas producent, ex quarum combinatione radices determinatæ æquationis inveniuntur.

13. Unico exemplo theoriam declaremus. Construenda sit nostra æquatio $x^4 + fgx^2 + f^2bx - fc^2 = 0$ per parabolam, & circulum. Spectemus æquationem generalem indeterminatam, in qua omnes continentur, nempe

$y^2 + nx^2 + bx + mfy - fc = 0$. Ut oriatur parabola fiat $m = n = \frac{f}{f}$, ut sit

$y^2 + bx + gy - fc = 0$. Ut oriatur circulus fiat $m = n - 1 = \frac{f}{f} - 1$, ut

fit $y^2 + x^2 + bx + gy - fy - fc = 0$. Habemus itaque æquationem determinatam in duas indeterminatas resolutam.

14. Ut prima, quæ est ad parabolam, construat, ita disponatur

$$yy + gy + \frac{gg}{4} = -bx + fc + \frac{gg}{4}. \text{ Fiat } y + \frac{g}{2} = z, \text{ \& posita } fc + \frac{gg}{4} = bd,$$

oriatur $zz = -bx + bd$. Ponatur $d - x = u$, & prodibit $zz = bu$. Vertice A, axe AD, (Fig. 6.) & parametro $= b$ describere parabolam AM, erunt AP = u, PM = z. Abscinde AD = d, erit DP = d - u = x. Deinde ex puncto D normalis rectæ DA erigatur DB = $\frac{1}{2}g$, & ex puncto B agatur

indefinita BR parallela DA, erit RM = $x - \frac{g}{2} = y$: igitur BR, RM erunt nostræ æquationis coordinatæ x, y, & punctum B initium abscissarum.

15. Construamus alteram æquationem indeterminatam

$yy + xx + bx + g - f.y = fc$, quæ ita disponatur

$$yy + g - f.y + \frac{g - f^2}{4} + xx + bx + \frac{bb}{4} = \frac{g - f^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc. \text{ Fiat}$$

$$y + \frac{g - f}{2} = z; x + \frac{b}{2} = u, \text{ \& oriatur } zz + uu = \frac{g - f^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc. \text{ Ita}$$

que centro C radio CA = $\sqrt{\frac{g - f^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc}$ describatur circulus ANB, (Fig. 7.) in quo CQ = u, QN = z. Abscinde CH = $\frac{b}{2}$, erit HQ = $u - \frac{b}{2} = x$. Radio CA normalem erige HK = $\frac{g - f}{2}$, & eidem radio parallelam agc KL, erunt LN = $z + \frac{f - g}{2} = y$: igitur KL, LN erunt x, y nostræ æquationis,

existentis K abscissarum initio. Ad radium imaginarium in hac constructione fugiendum, ejusmodi quantitas f assumenda est, ut quantitas sub signo radicali posita sit positiva. Duæ curvæ, satisfaciennes duabus æquationibus indeterminatis, opportune conjungantur posito puncto K in B, & linea KL super BR. Tam a punctis M, (Fig. 8.) ubi circulus, & parabola se interfecant, demissis ordinatis MQ, abscissis BQ æquationis determinatæ radices exhibebunt; quæ tot erunt, quot sunt puncta sectionis. Quum autem hæc puncta neque tria, neque unum esse possint, constat radices æquationis quarti gradus neque tres, neque unam esse posse, sed esse vel quatuor, vel duas, vel nullam.

16. Si optes construere æquationem quarti gradus per duas ellipses, redi ad æquationem indeterminatam $yy - \frac{n}{m}x^2 + bx + msy - fc = 0$. In hac posita $n = 4$, ut $f = \frac{1}{4}g$, fiat primum $m = 1$, ut æquatio resultet $yy + 3xx + bx + sy - fc = 0$. tum fiat $m = 2$, & prodibit $yy + 2xx + bx + 2sy - fc = 0$. Æquationes istæ ambæ spectant ad ellipsim. Si optas hyperbolas duas posita $n = 1$, ut $f = g$, primum statue $m = 2$, ut æquatio oriatur $yy - xx + \frac{1}{2}$

$+2fy - fc = 0$; deinde $m = 3$, ut altera æquatio prodeat $yy - 2xx + bx + 3fy - fc = 0$. En tibi æquationes ad duas hyperbolas. Ex his vides, quam methodo possis æquationem construere per circulum & ellipsim, sive hyperbolam, imo generatim per duas sectiones conicas cujuscumque generis.

17. Methodus hæc modum nobis sufficit construendi æquationem quarti gradus per duas sectiones conicas similes. Formulas paullo ante inventas ob oculos propono, scilicet $\frac{zz + aa}{r} = uu$, $\frac{zz - aa}{-r} = uu$, quarum prima est ad

hyperbolam, quæ habet u in prima diametro, si valeat signum superius, habet in secunda diametro, valente signo inferiore; altera vero est semper ad ellipsim, sed esset imaginaria, si valeret signum superius. In his curvis diameter, in qua sumuntur u , ad suam conjugatam est ut $1 : \sqrt{r}$. Hoc posito si velis æquationem construere per duas ellipses similes, quarum diametri sint in ratione $2 : 1$, pone primum $r = 4$.

& proveniet $\frac{zz - aa}{-4} = uu$, ellipsis in qua diametri sunt in ratione data.

$2 : 1$. Tum pone $r = \frac{1}{4}$, & habebis $\frac{zz - aa}{-1} = uu$, ellipsim, in qua diametri erunt in data eadem ratione, ac proinde similem priori. Memento $r = n - m$. In factis speciei r determinationibus, remanente $n = \frac{8}{f}$ indeterminata, determinanda est sola m . Qua perfecta ita definienda est n , seu f , quæ in utraque curva eadem sit oportet, ut neutra ellipsis fiat imaginaria.

18. Quandoquidem analysis hæc toleratiam postulat non mediocrem, utile erit, eandem illustrare aliquo exemplo, quod sit ex difficillimis. Construenda proponatur per duas ellipses similes, quarum diametri sint ut $2 : 1$, æquatio $x^4 + aax + a^3x + 8a^4 = 0$. Fiat $ax = fy$, seu $xx - fy = 0$. Quantitas f ea est indeterminata, quæ in duabus æquationibus oportet sit eadem. Facta

substitutione fit $yy + \frac{a^2}{ff}xx + \frac{a^3}{ff}x + \frac{8a^4}{ff} = 0$. Dematur prima æquatio multiplicata per m , ut oriatur formula generalis

$yy + \frac{a^2}{f^2}xx + \frac{a^3}{f^2}x + mfy = -\frac{8a^4}{ff}$. Quantitas $\frac{a^2}{f^2}$ illa est, quam vocavimus

n ; ergo $\frac{a^2}{f^2} - m = r$. Pone igitur primum $\frac{a^2}{ff} - m = 4$, seu $\frac{aa - 4ff}{ff} = m$,

& invenies $yy + 4xx + \frac{a^3}{f^2}x + y \cdot \frac{aa - 4ff}{f} = -\frac{8a^4}{f^2}$, quæ completis oportune quadratis in hanc mutabitur

$$yy + y \cdot \frac{aa - 4ff}{f} + \frac{aa - 4ff}{4ff}^2 + 4xx + \frac{a^3}{4f^2}x + \frac{a^6}{64f^4} = \frac{aa - 4ff}{4ff}^2 + \frac{8a^4}{6}$$

$\frac{a^6}{16f^4} - \frac{8a^4}{f^2}$. Ne ellipsis sit imaginaria necesse est, ut $\frac{a^2 - 4ff}{4} + \frac{a^6}{16ff} > 8a^4$: quod semper obtinere possumus: nam si f sit infinite magna, aut parva certe formula vera est.

19. Nunc pone $\frac{a^2}{f^2} - m = \frac{1}{4}$, seu $\frac{4a^2 - f^2}{4f^2} = m$. Peracta substitutione oritur $y^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{a^3}{ff}x + y \cdot \frac{4a^2 - f^2}{4f} = -\frac{8a^4}{ff}$, & completis quadratis

$$y^2 + y \cdot \frac{4a^2 - f^2}{4f} + \frac{4a^2 - f^2}{64f^2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{4a^3}{ff}x + \frac{4a^6}{f^4} = \frac{4a^2 - f^2}{64f^2} + \frac{a^6}{f^4} - \frac{8a^4}{ff}$$

In hac ad imaginaria vitanda necesse est, ut $\frac{4a^2 - f^2}{64} + \frac{a^6}{f^4} > 8a^4$. Ta-

lis eligendus est valor f , ut non minus hae formula, locum habeat, quam formula numeri superioris. Hanc ob rem fac $f = 6a$. Hoc valore supposito utraque formula vera invenitur, adeoque utraque ellipsis realis. At si posuissim. $f = 5a$, vera quidem esset formula numeri superioris, at non item formula praesentis numeri: igitur ellipsis una esset imaginaria, atque adeo frustraretur constructio. Pone igitur in utraque aequatione $6a$ pro f , & per duas ellipses similes, quas formulae praebent, aequationem construe.

20. Eadem methodus aduocanda est, si ad constructionem uti velis duabus hyperbolis similibus, quarum diametri sint ut 2:1 eiuſdem exempli. Fac enim primum $-r = m - n = 4$, tum $-r = m - n = \frac{1}{4}$. Per has suppositiones, definitur species m , non autem n , quae eadem debet esse in utraque curva. In specie n vero determinanda, maior cautio requiritur, quam in ellipsi. Nam talis valor assumendus est, ut in una formula quantitas constans, quam vocauimus aa , habeat praefixum signum +, in altera signum -. Ita enim fiet, ut in una hyperbola abscissae x sumantur in prima diametro, aut in eius parallela, in altera accipiantur in secunda diametro, aut in parallela. Quare si in una prima diameter ad secundam sit ut 2:1, in altera secunda diameter erit ad primam ut $\frac{1}{2}$:1, & prima diameter ad secundam ut 2:1: qua de re hyperbolae sunt similes. Quod si determinatio n efficeret, ut quantitas aa in utraque aequatione afficeretur eodem signo, hyperbolae essent reciprocae, non autem similes, quia quum in utraque x accipiantur aut in prima diametro, aut in secunda, si in una prima diameter est ad secundam ut 2:1, in altera prima diameter erit ad secundam ut $\frac{1}{2}$:1: quod dat non hyperbolas similes sed reciprocas.

21. Hujus quoque non ita facilis analyſeos exemplum neceſſarium videtur. Per duas hyperbolas ſimiles, quarum diametri ſint ut 2: 1 proponatur conſtruenda æquatio $x^4 - a^2x^2 + a^3x - 2a^4 = 0$. Suppoſita de more $x^2 - fy = 0$, fiet

$$y^2 - \frac{a^2}{f^2}x^2 + \frac{a^3}{f^2}x - \frac{2a^4}{f^2} = 0. \text{ Dematur æquatio ſubſtitutionis multiplicata}$$

per m , ut habeas æquationem generalem indeterminatam

$$y^2 - \frac{a^2}{f^2}x^2 + \frac{a^3}{f^2}x + mfy - \frac{2a^4}{f^2} = 0. \text{ Quantitas } -\frac{a^4}{ff} \text{ eſt ea, quam vocamus}$$

n , quæ ita eſt determinanda, ut eadem ſit in utraque æquatione. Fiat

$$\frac{a^2}{f^2} + m = 4, \text{ ſeu } m = 4 - \frac{a^2}{f^2}, \text{ \& ex duabus æquationibus naſcitur prima}$$

$$y^2 - 4x^2 + \frac{a^3}{ff}x + 4fy - \frac{2a^4}{f}y = \frac{2a^4}{ff}, \text{ quæ ita diſponatur}$$

$$y + \frac{4ff - aa^2}{2f} - 4x - \frac{a^3}{8ff} = \frac{4ff - aa^2}{4ff} - \frac{a^6}{16f^3} + \frac{2a^4}{ff}. \text{ Si hoc ho}$$

mogeneum comparationis eſt negativum, x poſitivæ erunt in parallela primæ diametro; ſi poſitivum eſt, x ſitivæ erunt in parallela ſecundæ diametro.

22. Fiat denuo $\frac{a^2}{f^2} + m = \frac{1}{4}$, ſeu $m = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{f^2}$, & habebitur

$$y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{a^3x}{ff} + y \cdot \frac{ff - 4aa}{4f} = \frac{2a^4}{f^2}, \text{ quæ ita eſt diſponenda}$$

$$y + \frac{ff - 4aa}{8f} - \frac{1}{4}x - \frac{2a^3}{ff} = \frac{ff - 4aa}{64ff} - \frac{a^6}{f^4} + \frac{2a^4}{ff}. \text{ Si ſuppo}$$

neremus $f = a$, homogeneum comparationis in æquatione numeri ſuperioris eſt

$$\text{ſet} = \frac{17aa}{4} - \frac{aa}{44}, \text{ quæ eſt poſitiva: quare prima diameter erit ad ſecun}$$

dam ut 2: 1. In æquatione hujus numeri homogeneum erit $aa + \frac{9aa}{4}$ quæ

pariter eſt poſitiva; quare ſecunda diameter eſt ad primam ut 2: 1. Hyperbo-

læ itaque ſimiles non ſunt, ſed reciprocæ. Ut ſimiles proveniant curvæ, ne-

ceſſe eſt, ut ex duobus homogeneis unum poſitivum ſit, negativum alterum.

Quum autem quantitas aff. ſa ſigno - in primo homogeneo minor ſit quam

$f =$

$f = \frac{a}{2}$, homogeneum numeri superioris fiet $= 7aa$ quod est positivum, adeoque prima ad secundam diametrum ut 2:1; homogeneum vero hujus numeri $= \frac{13}{16}aa - 8aa$, quod est negativum, ex quo consequitur primam diametrum esse ad secundam ut 2:1. Quare hyperbolæ construuntur propositam æquationem erunt similes.

23. Ex facta analysi colliges, formulam $x^4 - a^2x^2 - 2a^4 = 0$, quæ erit termino, ubi x linearem habet dimensionem, posse quidem contrui per duas elliptes similes, & per duas hyperbolas reciprocas, non autem per hyperbolas similes, quia, factò calculo ut supra, in utraque æquatione homogeneum comparationis est necessario positivum. Præterea frustra tentabis æquationem construere per duas circulos, aut duas hyperbolas æquilateras. Quia quum unitas sit sui ipsius reciproca, oporteret bis ponere $r = \pm 1$, quod eandem curvam, non duas præberet.

24. Quod ad parabolas spectat, de quibus nondum loquutus sum, satis erit reducere problema ad duas parabolas, quia parabolæ sunt semper inter se similes. Revoca æquationem generalem indeterminatam

$y^2 + ax^2 + bx + mfy - fc = 0$. Pone $m = n$, ut parabolam habeas, & invenies primam æquationem $yy + bx + mfy - fc = 0$.

Quum n debeat esse eadem in utraque æquatione, videtur alia parabola oriri non posse, sed si advertas ad formulam substitutionis $xx = fy$, aliam parabolam habere te, cognosces, quam si conjungas cum superiore, problema solves. Hæc ipsa formula $xx = fy$ continetur in generali, nam si facias $m = \infty$, evanescentibus ceteris omnibus terminis remanet $-mx^2 + mfy = 0$, factaque divisione per m , remanet $-x^2 + fy = 0$, seu $fy = x^2$.

25. In duabus curvis similibus, per quas gradus quarti æquationes construuntur, hoc perpetuo observatur, ut si in una abscissæ x sitæ sunt in rectis parallela diametro, in alia x jaceant in parallela tangenti curvam in vertice diametri analogæ. Quod si velis conjungere sectiones conicas similes ita, ut in ambabus abscissæ sint in diametro, aut in tangente, nunquam reperies æquationem quarti gradus, sed secundi, vel etiam primi. Juvat hujusce rei exemplum ponere ob oculos in hyperbolis similibus AM, SM, (Fig. 9.) in quibus CP = x , PM = y , CA = a , CQ = c , TS = b , TQ = d , TR = $x - c$, RM = $u = y - d$.

Æquationes duæ erunt $xx - aa = ry^2$, & $xx - bb = r'u^2$, species r indicans proportionem diametrorum in hyperbolis similibus eadem est. Pro x , & y substitue valores datos per x , y , ut secunda æquatio in hanc mutetur

$x^2 - 2cx + cc - bb = r.y^2 - 2dy + dd$. Ex hac dematur prima, & fiet $a^2 - b^2 + aa - 2cx = r. - 2dy + dd$, five $y = \frac{rdd - cc + bb - aa + 2cx}{2rd}$.

Si

Si valorem hunc y substituas in prima æquatione, ut remaneat sola x , æquationem obtinebis non quarti, sed secundi gradus. Idem tentando cognosces evenire in parabolis, & ellipsis similibus.

26. Ex his omnibus palam fit, posse æquationem quarti gradus construi per sectionem conicam datæ similem. Nunc paucis docendum, qua methodo data curva in constructionem introduci possit. Curva data sit $AEBD$ (Fig. 10). Æquationem propositam construe per curvam $aebd$ similem datæ, & curvam quamlibet fm . Sectionum similium diametri, sive parametri sint ut $R:r$. Radices invertæ sint $hq, h\pm q$ &c. Sume $r:R::cg:CG::gf:GF::ck:CK::kh:KH$, & si quæ sunt aliz. Demum intellige descriptam curvam FM similem fm ; hæc secabit curvam datam in punctis M, m , quæ sunt analogæ punctis m, m . Duc MQ, mQ , & habebis $HQ:hq::R:r$: ergo $hq = \frac{r \cdot HQ}{R}$; sed hq est æquationis propositæ radix; Ergo etiam $\frac{r \cdot HQ}{R}$. Idem dic de aliis radicibus. Hoc modo determinantur radices æquationis quarti gradus per sectionem conicam datam, & aliam quamlibet.

27. Quamquam brevitati, & elegantiz servientes ad constructionem perduximus æquationes quarti gradus carentes secundo termino; tamen, si pigeret hæc reductione uti, eadem methodus etiam ad æquationes secundo termino præditas sese extenderet. Hoc brevissime patefaciam. Sit æquatio $x^4 + Ax^3 + fgx^2 + f^2bx + f^3c = 0$. Fiat $fy = xx + \frac{A}{2}x$, & quadrando $f^2y^2 - \frac{A^2}{4}x^2 = x^4 +$

Ax^3 . Facta substitutione erit $f^2y^2 - \frac{A^2}{4}x^2 + fgx^2 + f^2bx + f^3c = 0$, sive dividendo per f^2 , $y^2 - \frac{A^2}{4f^2}x^2 + \frac{fg}{f^2}x^2 + bx + fc = 0$, ex qua dematur $x^2 + \frac{A}{2}x - fy = 0$ multiplicata

per m , ut generalis formula prodeat $y^2 + mfy - \frac{A^2}{4f^2}x^2 + bx + fc = 0$, quæ

$$+ \frac{g}{f}x^2 - \frac{mA}{2}x - mx^2$$

tractetur ea ipsa methodo, quam supra docuimus.

28. Methodum construendi æquationes quarti gradus per hyperbolam inter asymptota non omitto, quia sæpenumero elegantiam habet maximam. Sit de more æquatio

$x^4 + fgx^2 + f^2bx \pm f^3c = 0$. Pono $f\sqrt{fc} = xy$, & $f^3c = x^2y^2$; unde facta substitutione $x^4 + fgxx + f^2bx \pm x^2y^2 = 0$. Tertium terminum ita scribe

$\frac{f^2b}{f\sqrt{fc}} \cdot f\sqrt{fc} \cdot x = \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} \cdot f\sqrt{fc} \cdot x$, tum in hoc pro $f\sqrt{fc}$ pone xy , ut habeas

$x^4 + fgx^2 + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} \cdot x^2y \pm x^2y^2 = 0$, & facta divisione per x erit, $x^3 + fg + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}}y$

$f = \frac{a}{2}$, homogencum numeri superioris fiet $= 7aa$ quod est positivum, adeoque prima ad secundam diametrum ut 2:1; homogencum vero hujus numeri $= \frac{15}{16}aa - 8aa$, quod est negativum, ex quo consequitur primam diametrum esse ad secundam ut 2:1. Quare hyperbolæ construentes propositam æquationem erunt similes.

23. Ex facta analysi colliges, formulam $x^4 - a^2x^2 - 2a^4 = 0$, quæ earet termino, ubi x linearem habet dimensionem, posse quidem construi per duas ellipses similes, & per duas hyperbolas reciprocas, non autem per hyperbolas similes, quia, facto calculo ut supra, in utraque æquatione homogencum comparationis est necessario positivum. Præterea frustra tentabis æquationem construere per duas circulos, aut duas hyperbolas æquilateras. Quia quum unitas sit sui ipsius reciproca, oporteret bis ponere $r = \pm 1$, quod eandem curvam, non duas præberet.

24. Quod ad parabolas spectat, de quibus nondum loquutus sum, satis erit reducere problema ad duas parabolas, quia parabolæ sunt semper inter se similes. Revoca æquationem generalem indeterminatam

$$y^2 + nx^2 + bx + mfy - fc = 0. \text{ Pone } m = n, \text{ ut parabolam habeas, \& in-$$

venies primam æquationem $yy + bx + mfy - fc = 0$. Quum n debeat esse eadem in utraque æquatione, videtur alia parabola oriri non posse, sed si advertas ad formulam substitutionis $nx = fy$, aliam parabolam habere te, cognosces, quam si conjungas cum superiore, problema solves. Hæc ipsa formula $nx = fy$ continetur in generali, nam si facias $m = \infty$, evanescentibus ceteris omnibus terminis remanet $-nx^2 + mfy = 0$, factaque divisione per m , remanet $-x^2 + fy = 0$, seu $fy = x^2$.

25. In duabus curvis similibus, per quas gradus quarti æquationes construuntur, hoc perpetuo observatur, ut si in una abscissæ x fitæ sunt in recta parallela diametro, in alia x jaceant in parallela tangenti curvam in vertice diametri analogæ. Quod si velis conjungere sectiones conicas similes ita, ut in ambabus abscissæ sint in diametro, aut in tangente, nunquam reperies æquationem quarti gradus, sed secundi, vel etiam primi. Juvat hujuscæ rei exemplum ponere ob oculos in hyperbolis similibus AM, SM , (Fig. 9.) in quibus $CP = x$, $PM = y$, $CA = a$, $CQ = c$, $TS = b$, $TQ = d$, $TR = z = x - c$, $RM = u = y - d$.

Æquationes duæ erunt $xx - aa = ry^2$, $zz - bb = ru^2$, species r indicans proportionem diametrorum in hyperbolis similibus eadem est. Pro z , & u substituitur valores datos per x, y , ut secunda æquatio in hanc mutetur

$$x^2 - 2cx + cc - bb = r.y^2 - 2dy + dd. \text{ Ex hæc dematur prima, \& fiet}$$

$$x^2 - b^2 + aa - 2cx = r. \frac{-2dy + dd}{2rd}, \text{ five } y = \frac{rdd - cc + bb - aa + 2cx}{2rd}.$$

Si

Si valorem hunc y substituas in prima æquatione, ut remaneat sola x , æquationem obtinebis non quarti, sed secundi gradus. Idem tentando cognosces evenire in parabolis, & ellipsis similibus.

26. Ex his omnibus palam fit, posse æquationem quarti gradus construi per sectionem conicam datæ similem. Nunc paucis docendum, qua methodo data curva in constructionem introduci possit. Curva data sit $AEBD$ (Fig. 10). Æquationem propositam construe per curvam $aebd$ similem datæ, & curvam quamlibet fm . Sectionum similium diametri, sive parametri sint ut $R:r$. Radices invertæ sint hq, h_2q &c. Sume $r:R::cg:CG::gf:GF::ck:CK::kh:KH$, & si quæ sunt aliarum. Demum intellige descriptam curvam FM similem fm ; hæc fecabit curvam datam in punctis M, m , quæ sunt analogæ punctis m, m . Duc MQ, mQ , & habebis $HQ:hq::R:r$: ergo $hq = \frac{r \cdot HQ}{R}$; sed hq est æquationis propositæ radix; Ergo etiam $\frac{r \cdot HQ}{R}$. Idem dic de aliis radicibus. Hoc modo determinantur radices æquationis quarti gradus per sectionem conicam datam, & aliam quamlibet.

27. Quamquam brevitati, & elegantie servientes ad constructionem perduximus æquationes quarti gradus carentes secundo termino; tamen, si pigeret hæc reductione uti, eadem methodus etiam ad æquationes secundo termino præditas sese extenderet. Hoc brevissime patefaciam. Sit æquatio $x^4 + Ax^3 + fgx^2 + f^2bx + f^3c = 0$. Fiat $fy = xx + \frac{A}{2}x$, & quadrando $f^2y^2 - \frac{A^2}{4}x^2 = x^4 +$

Ax^3 . Facta substitutione erit $f^2y^2 - \frac{A^2}{4}x^2 + fgx^2 + f^2bx + f^3c = 0$, sive dividendo

per $f, y^2 - \frac{AA}{4f}x^2 + \frac{fx^2}{f} + bx + fc = 0$, ex qua dematur $x^2 + \frac{A}{2}x - fy = 0$ multiplicata

per m , ut generalis formula prodeat $y^2 + mfy - \frac{A^2}{4f^2}x^2 + bx + fc = 0$, quæ

$$+ \frac{fx^2}{f^2} - \frac{mA}{2}x - mx^2$$

tractetur ea ipsa methodo, quam supra docuimus.

28. Methodum construendi æquationes quarti gradus per hyperbolam inter asymptota non omitto, quia sæpenumero elegantiam habet maximam. Sit de more æquatio $x^4 + fgx^2 + f^2bx \pm f^3c = 0$. Pono $f\sqrt{fc} = xy$, & $f^3c = x^2y^2$; unde facta substitutione $x^4 + fgxx + f^2bx \pm x^2y^2 = 0$. Tertium terminum ita scribe

$\frac{f^2b}{f\sqrt{fc}} \cdot f\sqrt{fc} \cdot x = \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} \cdot f\sqrt{fc} \cdot x$, tum in hoc pro $f\sqrt{fc}$ pone xy , ut habeas

$x^4 + fgx^2 + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} \cdot x^2y \pm x^2y^2 = 0$, & facta divisione per x erit, $x^3 + fg + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}}y$

$\pm yy = 0$. Hæc, si signum superius valeat est ad ellipsim, quæ in circulum degenerat, si rectus sit angulus coordinatarum. Si valeat signum $-$, est ad hyperbolam æquilateram. Sectionem hanc, quæ construenda est, conjugamus cum hyperbola æquationis $\sqrt{yc} = xy$, & per earum intersecciones radices quæsitæ obtrinebimus. Si angulus coordinatarum rectus sit, hyperbola inter asymptotæ æquilatera est. Quare pro casu signi inferioris construimus æquationem per duas hyperbolas æquilateras, quod per aliam methodum obtinere non possumus.

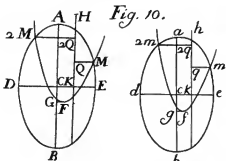
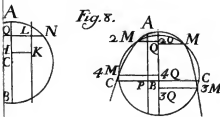
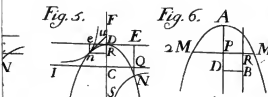
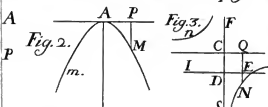
19. Quoniam æquatio tertii gradus ad quartum reduci potest, eam multiplicando aut per x aut per $x \mp a$, iccirco per eandem methodos resolutionem accipiet. Facta autem constructione una interseccio dabit $x = 0$, si facta fuerit multiplicatio per x , aut $x = \pm a$, si multiplicatio facta sit per $x \mp a$. Hæc autem est radix addita, quæ propterea ad æquationem tertii gradus non pertinet. Erit itaque seponenda, & aliz duntaxat spectandæ.

CAPUT DECIMUM.

Methodus capituli superioris construendi æquationes tertii, & quarti gradus per interseccionem conicarum sectionum omni difficultate liberatur.

1. **A**D inveniendas radices æquationis tertii, & quarti gradus usi sumus duabus sectionibus conicis sese intersecantibus. Adversus hanc methodum, quam tamquam incertam accusat, scripsit Rollius ingeniosissime, eidemque opposuit difficultatem dignam, quæ pro virili parte examinetur. Accidere posse putat hic Auctor, ut curvæ duæ respondentes æquationibus indeterminatis, in quas resoluta est æquatio determinata prædita radicibus realibus, minime sese intersecent, aut saltem numerus interseccionum minor sit numero radicum realium. Itaque si curvæ sese intersecant, possum tuto pronuciare, hisce sectionibus reales radices æquationis respondere; sed non possum ex converso affirmare, nullas alias esse radices reales præter eas, quæ a punctis interseccionum determinantur. Hoc primum jubavit inspicere in duobus exemplis clarissimis; deinde in theoriam interseccionum penitus inquirens dabo operam, ut ab hac non contemnenda difficultate methodus liberetur.

2. Consentiant ad unum omnes, æquationem $xx - x \cdot \overline{a+b+ab} = 0$, præditam esse duabus radicibus realibus, scilicet $x = a$, $x = b$. Ad eam construendam sequentem methodum advoco. Pono $xx = aa - yy$; igitur facta substitutione provenit $aa - yy - x \cdot \overline{a+b+ab} = 0$, seu $\overline{a+b} \cdot \overline{a-x} = yy$. Prima ex his est ad circulum, hæc ad parabolam; atque hoc modo constructio perficietur. Radio $AC = a$ circulus $DA D$ (Fig. 1.) describitur; tum parametro $= a+b$, vertice A describitur parabola. Hoc modo delineatas habes curvas duarum æquationum, in quas æquatio proposita est resoluta. Si $a > b$ parabola $DA D$ initio eadit intra circulum, cumque non solum tangit in A , sed etiam secat in punctis D , D , a quibus punctum E determinatur ita, ut radices sint $CA = a$, $CE = b$. Notum est, contactum A duobus punctis sectionis æquivalere, atque adeo quatuor esse sectionis puncta; quod indicat, utramque



que radicem CA, CE bis esse accipiendam, & constructionem inservire equa-

tioni quarti gradus $xx - n \cdot a + b + ab = 0$. Verum quum radices binæ, & binæ æquales sint, nemo non videt, eam propositam etiam æquationi accommo-

dari. 3. Verumtamen si $b > a$, parabola FAF caderet extra circulum; quare præter punctum contactus exhibens radicem CA = a, nullum habeo punctum sectionis. Si ex hoc deducere, æquationem nulla alia radice reali ornatam esse, nonne laborer in manifestum paralogismum? Difficultas augetur magis magisque, si alsumerem circulum, cujus radius esset utraque radice minor, ut

causa exempli $xx = \frac{aa}{4} - yy$, quia peracta substitutione proveniret $\frac{aa}{4} - yy - x$.

$\frac{aa + ab}{a + b + ab} = 0$, aut $\frac{aa + ab}{a + b} - x = yy$. Radius CA = $\frac{a}{2}$ descripto

circulo DAD (Fig. 2), producatur CA in B, ut CB = $\frac{aa + ab}{a + b}$, quæ est minor non solum b, sed etiam a. Parametro = a + b, vertice B describitur parabola, quæ nusquam circulum secabit. Si ex hoc intersectionum defectu colligerem, æquationem propositam habere ambas radices imaginarias, nonne longissime a veritate aberrarem?

4. Ab æquatione secundi gradus transeo ad æquationem quarti, nempe $x^4 - bx^3 - 4bbx^2 - 4b^3x + 16b^4 = 0$, quæ gaudet sine dubio duabus radicibus realibus æqualibus, id est $x = 2b$. Ut constructionem obtineam, hoc modo dispono formulam $\frac{4bb - xx}{2b - x} \cdot \frac{xx \cdot 2b - x}{xx + 2bx - 8bb} = 0$. Pono $\frac{4bb - xx}{2b - x} = y$,

ex qua suppositione oriuntur æquationes duæ I. $\frac{4bb - xx}{2b - x} + y = 0$

II. $\frac{xx \cdot 2b - x}{xx + 2bx - 8bb} + y = 0$. Ex secunda oritur

III. $xx - 2b + \frac{xx - 4b^2}{2b - x} \cdot y = 0$. Huic addo primam multiplicatam per y,

& invenio IV. $xx - 2by + yy = 0$. Huic addo primam multiplicatam per $2b - x$, & oritur V. $4bb - xy + yy = 0$. Æquationes duæ quarta, & quinta sunt ad sectiones conicas, prima ad circulum, secunda ad hyperbolam. Constructio ita perficitur.

5. Rectus angulus effectus a lineis AK, AB bifariam dividatur a recta AC. Secetur AB = 2b, & eidem normalis agatur BC (Fig. 3), producaturque donec CD = CB = AB = 2b. Inter asymptota AK, AC delineetur hyperbola transiens per punctum D, erunt AK, KH, coordinatæ x, y æquationis quintæ. Super diametrum AB describamus circulum AFB, & in rectis AG, GF habebimus coordinatas x, y æquationis quartæ. Tametsi curvæ istæ duæ nusquam se intersecant; tamen constat, in proposita æquatione iacise duas ra-

dices reales ambas $= 2b$. Igitur defectus punctorum intersectionis non præbet tutum argumentum affirmandi radices esse imaginarias.

6. Quandoquidem methodus intersectionis curvarum est omnium maxime universalis, & sæpe etiam unica ad determinandas æquationum reales radices, oportet eam liberare ab hac fallacia, quæ ad falsissimam conclusuram potest perducere. Quomobrem animum advertamus ad methodum, qua determinamus puncta intersectionis in curvis, quibus eadem est abscissa. Si eadem abscissa accepta ordinatæ, quæ in duas curvas desinunt, inæquales sunt, patet, ibi non adesse curvarum intersectionem; at punctum intersectionis habebitur, si ordinatæ reperiantur æquales: igitur ab æqualitate ordinatarum, quæ ad eandem abscissam referuntur, colligitur curvarum intersectio. Hinc spectantes in utraque æquatione y tamquam æquales, invenimus æquationem determinatam eliminatam y , atque per radices reales hujus æquationis curvarum intersectiones definitimus.

7. Verumtamen sola æqualitas ordinatarum non sufficit probandæ curvarum intersectioni. Etenim æqualitas potest intercedere non minus inter duas ordinatas reales, quam inter duas imaginarias. Si vero hoc contingat, nulla existit intersectio realis, sed quædam, quam vocare possumus intersectionem imaginariam, quamque præbere non possunt rami curvarum, qui delineantur. Quæ quomodo ita sint ad statuendum, utrum curvæ reapse se intersecent, duo sunt examinanda; primum utrum adsint abscissæ, quibus ordinatæ æquales respondeant, deinde utrum ordinatæ istæ æquales sint reales. Si ambæ conditiones istæ conjungantur, tuto pronunciemus, intersecare se curvas: si vero posita prima conditione deficiat altera, intersectiones non habemus, nisi imaginarias.

8. Ad primam conditionem obtinendam satis est, in duobus æquationibus indeterminatis spectare y tamquam unam eandemque quantitatem, tum ejecta eadem y devenire ad æquationem determinatam, quæ solum x contineat. Etenim accepta abscissa æquali radici hujus æquationis, ordinatæ duæ duarum curvarum sine dubio æquabuntur. Valores imaginarii abscissæ x non possunt sufficere, nisi intersectiones imaginarias, quare omitendi sunt. Valores reales præbent sæpe intersectiones reales, at non semper, quia sæpe duæ ordinatæ æquales proveniunt imaginariæ. Ut a dubitatione liberemur, oportet substituere in duabus æquationibus indeterminatis valorem x ; tum invenire duarum y valores, demum inspicere, utrum illi, qui æquantur, reales sint, an imaginarii.

9. Sed quum hæc methodus plerumque regulis analyticis prorsus destituatur, & quum supponat resolutionem æquationum, quam per intersectionem curvarum inquirimus, dauda est opera, ut alia ratione certo cognoscamus, quibus nam in casibus nequeant, quibusnam possint ordinatæ æquales esse imaginariæ. Hinc ob rem locos partiemur in diversas classes, & de singulis ordinatim agemus. Sint primum loci duo primi gradus, quorum æquationes sint

$Ax + By + C = 0$ | In his adverte, fieri non posse ut ordinatæ duæ, ubi $x = a$
 $x + by + c = 0$ | quantur, sint imaginariæ, quia quicumque sit valor realis abscissæ x , positus in utraque æquatione, præbet unicum valorem y realem. Quare ad obtinenda puncta, ubi loci se intersecant, satis erit, expellere y . quod hac methodo obtinetur. Deducatur secunda æquatio multiplicata per B a prima ducta in b , ut proveniat $Ab - Ba \cdot x + Cb - Bc = 0$, sive

$x = \frac{Bc - Cb}{Ab - Ba}$. Si fractionis numerator nullus sit, intersectio initio abscissa-

rum

rum respondet: si nullus sit denominator, intersectio in infinitum respondet: si nullus sit & numerator, & denominator, loci duo coincidunt, & propterea ubique erunt æquales ordinatæ. Quapropter methodus construendi æquationes primi gradus per duas lineas rectas, aut per duos locos primi gradus, nulli obnoxia est difficultati.

10. Transeo ad duos locos alterum primi gradus, alterum secundi. Ut breviorẽ efficiam calculum, assumo species P, p, Q, q datas per x , & constantes. In ultimis Q, q species x linearem solum tenet dimensionem; in primis P, p potest ascendere ad potestatem quadraticam. Æquatio ad lineam rectam sit I. $Q + Ay = 0$. Æquatio ad sectionem conicam sit

II. $p + qy + ay^2 = 0$. Quicumque sit valor x , qui in prima æquatione substituitur, valor unicus y non potest non prodire realis; igitur accidere non potest, ut eidem x reali respondeant in duobus locis duæ ordinatæ imaginariæ æquales. Ut calculus perficiatur, multiplicetur per y æquatio prima.

III. $Qy + Ay^2 = 0$. Ex secunda ducta in A demẽ tertiam multiplicatam per A

IV. $Ap + Aq - aQ \cdot y = 0$. Duo casus oriri possunt. Primum ut $Aq - aQ = 0$, atque in hoc statim obtinetur æquatio determinata $Ap = 0$, seu $p = 0$. In alio casu, ubi locum non habet præmissa æqualitas, æquatio instituitur inter duos valores y , quæ habentur ex prima, & ex quarta æquatione, ut resultet

$\frac{Q}{A} = \frac{Ap}{Aq - aQ}$; sive $AQq - aQ^2 = A^2p$. Si æquatio determinata, ad

quam pervenimus, sit primi gradus, x prædita erit uno tantum valore reali, & unum tantum habebitur punctum intersectionis. Si vero æquatio sit secundi gradus, resolvenda est, & invenienda radices duæ. Si hæc reales sint, duæ designabunt intersectiones reales; si radices sint imaginariæ, nullæ erunt intersectiones nisi imaginariæ. Quamobrem tantissima est methodus construendi æquationem secundi gradus per lineam rectam, & circulum, aut quamcumque aliam sectionem conicam.

11. Idem pronuciare non possumus de duobus locis secundi gradus. Primum loci sint ejusmodi, ut in eorum æquationibus addit terminus yy , non autem y , & æquationes ita exprimentur

$P + Ay^2 = 0$ | Ex prima multiplicata per a detrahẽ secundam ductam in A , ut

$p + ay^2 = 0$ | statim prodeat æquatio determinata $aP - Ap = 0$, quæ ad summum erit secundi gradus. Si hujus æquationis radices sint imaginariæ, nullæ existunt intersectiones nisi imaginariæ. Sed si radices reales sint, non potes inde deducere, existere intersectiones reales. Etenim substituta pro x ejus radice in altera ex æquationibus primitivis, æquatio determinata continens yy est secundi gradus; igitur valor x potest esse & realis, & imaginarius. Si realis est, intersectio realis habebitur, sed si imaginarius est, intersectio nulla, nisi imaginaria. Hoc usuvenit in primo exemplo proposito. Idem dicis velim, si in duabus æquationibus indeterminatis addit etiam terminus y , sed ita, ut evanescente yy ipse quoque evanescat, quia eadem ratio locum habet. Quapropter admodum caute opus est uti methodo construendi æquationes secundi gradus per intersectionem duorum circulorum, aut duarum quamcumque sectionum conicarum; nam accidere posset, ut æquatio ornata esset duabus radicibus realibus, tamen curvæ usurpatæ nusquam se secarent.

12. Accedo ad duos locos, in quorum æquationibus præter terminum yy existat ita terminus y , ut destructo yy ipse non destruat. Porro æquationes sunt

I. $P + Qy + Ay^2 = 0$ | Ex prima multiplicata per a demo secundam mul-

II. $p + qy + ay^2 = 0$ | tiplicatam per A , ut oriatur

III. $aP - Ap + aQ - Aq.y = 0$. Quum in hac y primam dimensionem teneat, fieri nequit, ut, substituto quolibet valore reali x , y evadat imaginaria. Hinc videatur tuto colligi posse, ordinatas æquales non posse esse imaginarias, atque adeo interfectionem semper esse realem. Sed ab assen-ſu nimis torratie præcipiti cohibeamus, & calculum producamus. Divisa æquatione tertia per $aQ - Aq$, oritur

IV. $\frac{aP - Ap}{aQ - Aq} + y = 0$. Hanc multiplicatam per y deduco a prima divisa per A , & obtineo

V. $\frac{P}{A} + \frac{Q}{A} + \frac{Ap - aP}{aQ - Aq}.y = 0$, aut

VI. $P. \frac{aQ - Aq}{A} + aQ^2 - AQq + A^2p - AaP.y = 0$.

13. Evadere potest, ut $Ap - aP$ sit divisibilis per $aQ - Aq$; factaque divisione ponamus, quotientem esse $Mx + N$. In hoc casu æquatio tertia, & sexta prædictæ erunt communi multiplicatore $aQ - Aq$, quare ambæ veræ sunt, si $aQ - Aq = 0$, quæ est æquatio gradus primi præbens semper valorem realem quantitatis x . Verum huic valori respondebit ne una, aut duæ interfectiones reales? Valor iste collocetur in æquatione prima, aut secunda, & resolvatur æquatio secundi gradus. Si valores y prodeant reales, interfectiones reales erunt; si vero valores y prodeant imaginarii, nulla interfectio realis, sed ambæ imaginariæ. Facta divisione in æquatione tertia, & sexta, proveniunt duæ

VII. $Mx + N + y = 0$ | in quibus, quicumque sit valor x ,

VIII. $P + Q + AMx + AN.y = 0$ | invenitur y semper realis; igitur interfectio realis existit. Utentes duabus ultimis æquationibus excludamus y , ut oriatur $P + Q + AMx + AN. - Mx - N = 0$, quæ est æquatio secundi gradus. Itaque si hac resoluta reales inveniantur duo x valores, habebuntur duæ interfectiones reales; at si valores x prodeant imaginarii, nulla interfectio realis obtinetur.

14. Ita evenit, si antequam eijciamus y , æquationem quartam, & sextam dividimus per $aQ - Aq$. Verum si divisione non facta eliminemus y , nascetur æquatio

$$\frac{aP - Ap}{aQ - Aq} = \frac{P. aQ - Aq}{aQ^2 - AQq + A^2p - AaP}, \text{ five}$$

IX. $aP - Ap. aQ^2 - AQq + A^2p - AaP = P. aQ - Aq$, quæ est æquatio quarti gradus. Patet ex dictis num. 13, non omnem radicem realem huius æquationis sufficere interfectionem realem. Hæc æquatio quidem divisibilis erit

per $aQ - Aq$, atque valor realis x ex hac natus poterit sufficere ordinatas y , atque adeo interfectiones imaginarias. Hac de causa in secundo exemplo propositio nullæ sunt reales interfectiones.

15. Ve-

15. Verumtamen nisi $AP - aP$ sit divisibilis per $aQ - Aq$, æquatio tertia, & sexta, quicumque sit x valor realis, præbebit ordinatæ y valorem realem, & propterea veram & realem intersectionem. Igitur æquationis nonæ, quæ est gradus quarti, quælibet radix realis suppeditabit veram duarum curvarum intersectionem, & quælibet radix imaginaria indicat, nullam adesse intersectionem realem, sed omnes imaginarias: item contra curvarum intersectiones præbeunt radices reales æquationis nonæ, reliquis existentibus imaginariis. Si $aQ - Aq$ non contineret x , sed foret quantitas constans, nota, non habere locum casum divisoris communis duarum æquationum, & posse nos tuto affirmare radices reales æquationis determinatæ, quæ oritur, præbere curvarum intersectiones reales, & vice versa.

16. Postquam certum criterium traditum est, per quod tuto in plerisque casibus pronunciare possumus, tot esse intersectiones curvarum, quot sunt radices æquationis determinatæ, demonstrandum est, in methodo capite superiori a nobis usurpata ad construendas æquationes tertii, & quarti gradus nullum esse

paralogismi periculum. Æquationem tertii gradus $x^3 + abx - af^3 = 0$, resolvimus in duas ope substitutionis $xx = ay$, ex qua nascitur $yx + bx - ff = 0$. In his duabus æquationibus quantitates multiplicantes y nullum habent divilorem communem, qui contineat x ; igitur curvæ illis respondentes iecabunt sese in tot punctis, quot sunt æquationis propositæ radices reales. Eadem ratio valet in æquatione prædita secundo termino $x^3 + ax^2 + abx - abf = 0$, quæ resolvitur per substitutionem $x^2 + ax = ay$.

17. Æquatio quarti gradus $x^4 + fgx^2 + f^2bx - f^3c = 0$ resolvitur per substitutionem $xx = fy$, ex qua nascitur $fy + gx^2 + fbx - f^3c = 0$. Multiplicetur prima per y , ut sit $x^2y - fy^2 = 0$. Hæc addatur superiori, ut fiat $x^2y + gx^2 + fbx - f^3c = 0$. Quoniam in hac y multiplicatur per x^2 , in prima per f , perspicuum est, non habere locum casum divisoris communis, & cuiuslibet reali x realem y respondere, & numerum intersectionum æqualem esse numero radicum realium æquationis propositæ.

18. Sed ob oculos positis æquationibus duabus:

$$\begin{array}{l} xx - fy = 0 \\ y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx - fc = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} demamus primam multiplicatam per m a secunda, \\ ut formulam generalem obtineamus. \end{array} \right.$$

$$y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx + mfy - fc = 0. \text{ Nos constructionem adornamus tribuentes}$$

$$-mx^2$$

speciei m duos valores diversos, & construentes duas sectiones conicas, quas exhibent æquationes. Retenta specie m ad unum valorem indicandum, alterum vocemus $= n$, ut æquatio sit $y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx + nfy - fc = 0$. Ab hac deme supe-

$$\begin{array}{c} -nx^2 \\ \hline \text{riorem erit } \overline{m-n} \cdot x^2 - fy. \overline{m-n} = 0, \text{ sive } x^2 - fy = 0. \text{ Hæc dividatur per } f, \\ \text{\& mul-} \end{array}$$

& multiplicetur per y , ut fiat $\frac{x^2 y}{f} - y^3 = 0$. Hæc uni ex duabus superioribus

addatur, & nascetur $\frac{x^2}{f} - m \cdot x^2 + \frac{x^2}{f} + mf \cdot y + bx - fc = 0$. Quum in hæc

ultima y multiplicetur per $\frac{x^2}{f} + mf$, in altera, nempe $x^2 - fy = 0$, per f locum habere non potest communis divisor; igitur numerus intersectionum æqualis erit numero radicum realium æquationis propositæ. Hoc modo per traditum criterium remanet probatum, tot esse in æquatione proposita radices reales, quot reales habentur in curvis intersectionibus.

18. Ceterum eadem veritas in hunc quoque modum potest demonstrari: Quum in æquatione parabolæ $xx - fy = 0$, cuicumque valori reali abscissæ x respondeat valor unicus ordinatæ y , atque hic realis, manifestum est, parabolam conjunctam cum qualibet ex curvis, quæ oriuntur determinata pro libito specie m , habere ordinatam realem ibi etiam, ubi ordinatæ curvarum æquales sunt; igitur parabola reapse aliam sectionem conicam secat; igitur habetur intersectio realis. Quapropter infinitæ curvæ, quæ proveniunt ex diversis valoribus speciei m , dummodo ipsæ imaginariæ non sint, secantur reapse a parabola; igitur in eodem puncto sese invicem secant; ergo per ipsas tuta obtinetur propositæ æquationis constructio.

19. Eodem ratiocinio probares, remotam esse ab omni paralogismi periculo tum constructionem æquationis præditæ secundo termino, quam capite superiori dedimus num. 27; tum eam, quæ radices exhibet ope hyperbolæ inter asymptota, quam exhibuimus num. 28. Principia, quibus in præsens usi sumus, facem nobis preferent in posterum, quum altiores æquationes per altiorum cuturam intersectionem construendas curabimus.

CAPUT UNDECIMUM

De resolutione analytica æquationum tertii, & quarti gradus.

1. **U**tilissima est methodus a nobis hætenus tradita resolvendi æquationes tertii, & quarti gradus per intersectionem sectionum conicarum, quam licet veteres geometræ in problematum solutione non raro usurpaverint, tamen solent acceptam referre duobus Renatis Slusio, atque Cartesio. Verum hæc magis geometrica est, quam analytica, magisque inservit resolvendis quæstionibus geometricis, quam arithmeticis. Quapropter non est prætermittenda resolutio æquationum tertii, & quarti gradus, quam invenerunt Scipio Ferreus, & Ludovicus de Ferrariis, quum per illam æquationum radices formula algebraica exprimantur. Non sum nescius, aliquando æquationes tertii, & quarti gradus posse deprimi ad gradus inferiores adhibitis opportunis methodis, de quibus in præcæta non loquimur; loquimur deinceps in libro tertio, ubi agemus de æqua-

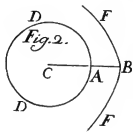
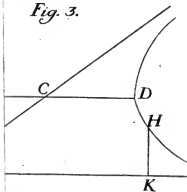
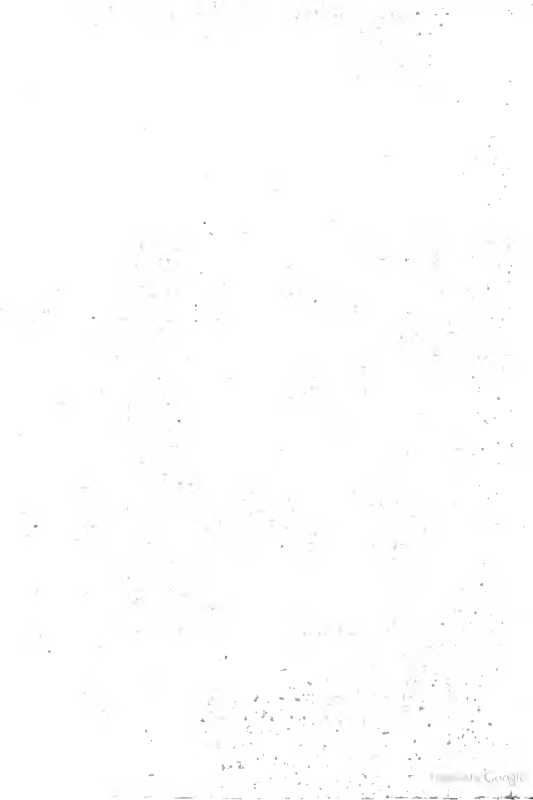


Fig. 3.





quationibus cujuscumque gradus, quæ ad gradum inferiorem perducî possunt. Quare methodus, quam modo tradimus, æquationibus illis erit applicanda, quæ nulla ratione deprimi possunt.

2. Quoniam sæpe quantitates reales ex imaginariarum multiplicatione oriuntur, accidit sæpe, ut radices quantitatum realium fiat imaginariarum. Hoc evenit in duabus radicibus cubicis, & biquadraticis unitatis, quæ imaginariæ sunt, existentibus reliquis una, aut duabus realibus. Necessarium est, ut hoc demonstremus, & omnes unitatis radices tertias, & quartas, illas quoque quæ imaginariæ sunt, analytica formula exprimamus. Hanc ob rem statim primum

$x^3 - 1 = 0$, cujus æquationis radix una $= 1$; igitur æquatio erit divisibilis per $x - 1$. Facta autem divisione provenit æquatio secundi gradus $xx + x + 1 = 0$,

quæ resoluta præbet radices duas imaginarias $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$,

$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Quapropter tres radices cubicæ unitatis sunt $1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$,

$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$.

3. Simili methodo invenies unitatis radices biquadraticas. Statue æquationem $x^4 - 1 = 0$, cujus æquationis duplex est radix realis, nempe 1 , & -1 ; ergo æquatio erit divisibilis cum per $x - 1$, tum per $x + 1$, seu per $xx - 1$. Peracta divisione oritur $xx + 1 = 0$, cujus radices duæ ambæ imaginariæ sunt $x = \sqrt{-1}$, $x = -\sqrt{-1}$, quatuor igitur sunt radices quartæ unitatis, nempe $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.

4. His præmissis venio ad resolutionem æquationum tertii gradus, quæ semper spectulo carentes secundo termino, quia ad hanc formam semper reducî possunt. Sit itaque æquatio generalis $x^3 + 3ax - b = 0$, in qua a, b possunt esse quantitates datæ quæcumque positivæ, & negativæ. Pono $x = m + n$, quam elevato ad potestatem tertiam, ut sit

$x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = m^3 + 3mn(m+n) + n^3$. Pro binomio $m+n$ substituo ei æqualem x , & omnes terminos transfero ad unam partem, ut sit

$x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$. cujus radix una est $x = m + n$. In hac æquatione unica conditio requiritur, nimirum, ut secundus terminus desit, quod semper licet obtinere. Confer æquationem inventam cum proposita, & habebis $mn = a$;

$m^3 + n^3 = b$; ergo $m^3 + \frac{a^3}{m^3} = b$, sive $m^6 - bm^3 = -a^3$, quæ resoluta invenies

$m = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$. Eodem prorsus calculo determinabis

$n = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$.

5. Quælibet radix tertia tres valores habere potest. Hos ut inveniamus utamur tribus

bas radicibus unitatis, nimirum $1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Quare si per signum radicale radix intelligatur, quæ harum primæ respondet, inveniemus

Valores m	Valores n
$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$	$\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$
$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$	$\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$
$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$	$\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

Novem modis hujuscemodi valores combinari possunt. Ut inutiles rejiciamus, eos conjungemus dumtaxat, qui simul multiplicati præbent $+a$, cui vidimus æquare $m n$. Hoc criterio uti præcipuo æquationis propositæ radices provenient hujuscemodi.

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \\
 x &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \\
 x &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}
 \end{aligned}$$

6. Ut hoc clarius intelligas, fac advertas, novem radices, quæ resultant ex novem combinationibus valorum m , & n , convenire æquationi gradus noni, quæ quum sit resolvable in tres gradus tertii, ideo fit, ut tres ex novem combinationibus præbeant radices nostræ æquationis tertii gradus. Ubi resolutionem tradidimus æquationum secundi gradus aliquid simile monuitur evenire. Ex tribus vero combinationibus illas elegimus, in quibus valores m, n simul multiplicati exhibent productum $= a$, quia propositæ terminus $-3ax$ respondet termino generalis $-3mnx$; unde sequitur, $mn = a$, & valores huic conditioni satisfaciens eos esse, ex quibus propositæ æquationis radices coalescunt.

7. Illud quoque vel maxime interest advertere, quod prima ex tribus inventis radicibus semper realis est; reliquæ autem duæ sunt imaginariæ si $\frac{bb}{4} > a^3$, & $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}$ sit realis; sunt autem ambæ reales, si aut $\frac{bb}{4} = a^3$, & $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = 0$, aut $\frac{bb}{4} < a^3$, & $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}$ imaginaria. Ut hoc demonstrarem duplici methodo utar, nempe intersectionis conicarum sectionum, & transmutationis radicum in series. Ordior ab intersectione curvarum.

8. Ob oculos iterum tibi pone æquationem $x^3 - 3ax - b = 0$; fac $fy = x^2$,

ut

ut oriatur $yx - \frac{3a}{f} \cdot x - \frac{b}{f} = 0$; denno statue $y - \frac{3a}{f} = n$, ut proveniat $nx = \frac{b}{f}$. Inter asymptota FF, II (F.1) describe hyperbolam rectanguli $\frac{b}{f}$. Posita $CP = x$, erunt $PM = CO = n$. Seca $CA = \frac{3a}{f}$, & per A duc A Q parallelam CI, erunt $AO = MQ = n + \frac{3a}{f} = y$, existentibus $AQ = x$. Vertice A, axe AF, parametro $= f$, describe parabolam AM. Rectæ A Q $= OM$ respondentis punctis intersectionis parabolæ, & hyperbolæ erunt propositæ æquationis radices; quare si tres fuerint intersectiones, tres erunt radices reales, si unæ intersectio, una erit solummodo radix realis; reliquæ duæ imaginariæ. Pone primum $a^3 = \frac{bb}{4}$, ut sit $\frac{3a}{f} \cdot \sqrt{a} = \frac{b}{f}$, seu $\sqrt{a} = \frac{f}{2a} \cdot \frac{b}{f}$; atqui secû

A 2 O $= \frac{a}{4}$, ut sit C 2 O $= \frac{3a}{f}$, ordinata parabolæ respondens puncto 2 O $= \sqrt{a}$,

& ordinata hyperbolæ $= \frac{f}{2a} \cdot \frac{b}{f}$; ergo ordinata parabolæ æqualis est ordina-

tæ hyperbolæ, & punctum 2 M communis est utrique curvæ. Præterea demonstravimus supra, ubi de constructione æquationum tertii gradus, punctum 2 M in facta hypotesi esse punctum, in quo curvæ sese contingunt; quare in hoc casu punctum 2 M duos dabit valores x æquales, & reales, unum inæqualem punctum M. Si ponas $a^3 > \frac{bb}{4}$, erit etiam $\sqrt{a} > \frac{f}{2a} \cdot \frac{b}{f}$: quare parabola secabit ramum hyperbolæ in duobus punctis; habebuntur igitur in hoc casu tres intersectiones, & tres radices reales. Demum si statuas $a^3 < \frac{bb}{4}$, erit $\sqrt{a} < \frac{f}{2a} \cdot \frac{b}{f}$, & ramus I 2 M non secabitur a parabola, quare unica erit intersectio in M, & unica radix realis: quod erat demonstrandum.

9. Eandem veritatem demonstraturo per serierum methodum oportet convertere in seriem valores m, n . Pone facilitatis causa $\frac{b}{2a} = p$, $\frac{bb}{4} - a^3 = q$, quæ quantitas erit negativa si $a^3 > \frac{bb}{4}$, erit $m = \sqrt[3]{p + \sqrt{q}}$, & $n = \sqrt[3]{p - \sqrt{q}}$.

Si ataris methodo, quam tradidimus in libro primo, ad convertendas in series radices cubicas, invenies

$$m = p^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} p^{-\frac{2}{3}} \sqrt{q} - \frac{1}{9} p^{-\frac{5}{3}} q + \frac{5}{81} p^{-\frac{8}{3}} q \sqrt{q} - \frac{10}{243} p^{-\frac{11}{3}} q^2 \\ + \frac{22}{1215} p^{-\frac{14}{3}} q^2 \sqrt{q} \text{ \&c.}$$

$$n = p^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} p^{-\frac{2}{3}} \sqrt{q} - \frac{1}{9} p^{-\frac{5}{3}} q - \frac{5}{81} p^{-\frac{8}{3}} q \sqrt{q} - \frac{10}{243} p^{-\frac{11}{3}} q^2$$

$-\frac{22}{1215}p - \frac{14}{3}q^2\sqrt{q}$ &c. In duabus hisce seriebus fac advertas terminos continentes \sqrt{q} affectos esse signis diversis, reliquos iisdem. Quare in omni casu si earum summam accipias, habebis

$m+n = 2p^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}p - \frac{1}{3}q - \frac{20}{243}p^{\frac{2}{3}}q^2$ &c., quæ vel q sit positiva, vel negativa, nihil continet imaginarii, quia omnis \sqrt{q} ejecta est. Igitur in æquationibus prima radix expressa per $m+n$ semper est realis.

10. Venio ad secundam radicem, quæ exprimitur per

$$m \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{m-n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}. \text{ Quantum.}$$

spectat ad partem primam $-\frac{m-n}{2}$, hæc, ut docet numerus superior, semper realis est. Quantum pertinet ad alteram, dempta secunda serie ex prima, & divisa differentia per 2, invenies

$\frac{m-n}{2} = \frac{1}{3}p - \frac{2}{3}\sqrt{q} + \frac{5}{81}p - \frac{8}{3}q\sqrt{q} + \frac{22}{1215}p^{\frac{2}{3}}q^2\sqrt{q}$ &c. a qua omnes termini carentes \sqrt{q} expulsi sunt, & illi omnes remanent, in quibus apparet. Ergo $\frac{m-n}{2} \cdot \sqrt{-3}$ realis vel imaginaria erit, prout \sqrt{q} ducta in $\sqrt{-3}$ est realis, vel imaginaria; atqui $\sqrt{q} \cdot \sqrt{-3}$ est imaginaria, si q sit positiva, est realis, si q sit negativa; ergo existente q positiva $\frac{m-n}{2} \sqrt{-3}$ est imaginaria, existente q negativa realis est: Quapropter etiam secunda radix

$m \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ est realis, si q sit negativa, hoc est si $a^3 > \frac{bb}{4}$; est imaginaria, si q sit positiva, hoc est si $\frac{bb}{4} > a^3$. Idem eademque methodo demonstrabis de tertia radice, quæ exprimitur per

$m \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + n \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$. Ad demonstrationem hanc efficiendam.

usus sum cum intersectione conicarum sectionum, tum seriebus, quia pro casu, ubi tres sint æquationis cubicæ radices reales, nulla detecta est methodus, per quam sine imaginariis radicibus valores exhibeantur; atque hic est casus, qui vocatur irreducibilis, qui non leve negotium fecit veteribus analytici.

11. Ope æquationum tertii gradus, quas modo resolutas exhibui, resolvendas aggredior æquationes gradus quarti. Assumo formulam generalem carentem secundo termino, ad quam formam æquationes omnes reduci possunt; nempe $x^4 + abx + a^2cx + a^3d = 0$. Species b, c, d possunt esse & positivæ, & negativæ, imo etiam = 0, sed a , quæ supplet homogeneitatem terminorum semper

per positiva sumenda est. Præparo formulam hac ratione

$$x^4 + a \cdot \frac{b+m}{x} + \frac{a^2 \cdot \frac{b+m}{x}}{4} = amx^2 - a^2cx - a^2d + \frac{a^2 \cdot \frac{b+m}{x}}{4} =$$

$am \cdot x - \frac{ac}{m}x - \frac{a^2d}{m} + \frac{a \cdot \frac{b+m}{x}}{4m}$. Pars prima æquationis est quadratum completum, cujus radix extrahi potest. Ut in parte altera quantitas, quam am multiplicat, sit pariter quadratum completum, oportet, ut quadratum quantitatis $\frac{ac}{2m}$, quæ est coefficientis dimidium, sit æquale ultimo termino nim-

$$\text{rum} - \frac{a^2d}{m} + \frac{a \cdot \frac{b+m}{x}}{4m}$$

12. Determinemus valorem m ita, ut hanc conditionem adimpleat. Erit

$$\text{itaque } \frac{a^2c}{4m^2} = -\frac{a^2d}{m} + \frac{a \cdot \frac{b+m}{x}}{4m}, \text{ quæ multiplicata per } m, \text{ \& divisa per } a$$

fit $\frac{ac^2}{4m} = -ad + \frac{b+m}{4}$ sive $m^2 + 2bm^2 - \frac{bbm}{4adm} - ac^2 = 0$. Invenimus itaque m per æquationem tertii gradus, quæ resoluta sufficit unam saltem radicem realem.

13. Supponentes determinatum valorem m , extrahamus radices in æquatione quarti gradus jam præparata. Invenimus $x^2 + \frac{a \cdot \frac{b+m}{x}}{2} = \pm \sqrt{am \cdot x - \frac{ac}{2m}}$;

$$\text{ergo } x^2 \pm x\sqrt{am} \pm \frac{ac\sqrt{a}}{2\sqrt{m}} = 0; \text{ quæ formula involvens signorum ambiguita-}$$

$$+ \frac{a \cdot \frac{b+m}{x}}{2}$$

tem, complectitur duo trinomia secundi gradus, in quæ æquatio quarti est resolubilis. Resolutis porro duobus trinomiis inveniemus quatuor radices æquationis quarti gradus.

14. Methodus hæc offert mihi rationem facilem, & elegantem demonstrandi, æquationes omnes quarti gradus resolvi posse in duo trinomia realia, tametsi earum radices quatuor omnes sint imaginariæ. Ob hanc rem adverte, trinomia duo inventa realia esse, si quantitas m sit positiva, involvere imaginaria, si m sit negativa. Tres sunt valores m , quos exhibet resolutio æquationis cubicæ. Itaque ad habenda duo trinomia realia sufficit, ut unus ex tribus valoribus m sit realis, & positivus. Ajo autem unum ex valoribus m semper esse hujusmodi. Quod ut probem, redeo ad æquationem tertii gradus, a qua dependent valores isti. Hæc æquatio ordinata, ut mos est, prædita est ultimo termino affecto semper signo $-$, quia a supponitur positiva, & quadratum c semper est positivum, licet c fuerit negativa; atqui omnis æquatio cubica, cujus ultimus terminus sit negativus, habet radicem unam realem & positivam, ut

mox

mox probabo; ergo una faltem ex radicibus nostræ æquationis erit positiva; atque adeo in omni casu obtinemus valorem m positivum.

15. Probemus modo, æquationem omnem tertii gradus, cujus terminus ultimus est negativus, præditam esse faltem una radice positiva. Radices tres æquationis cubicæ aut omnes sunt reales, aut una realis, & duæ imaginariæ. In primo casu affirmo, radices tres reales non posse esse omnes negativas, si negativus sit ultimus terminus æquationis. Sint enim, si fieri potest, negativæ omnes, nimirum $x = -A$; $x = -B$, $x = -C$; ergo habebimus tria binomia $x + A$, $x + B$, $x + C$, quæ simul multiplicata præbent formulam tertii gradus; atqui binomiorum multiplicatio præbet ultimum terminum $+ABC$, qui positivus est, neque æquare potest quantitatem negativam; ergo si ultimus terminus negativus est, fieri non potest, ut tres radices omnes sint negativæ, sed erunt vel omnes positivæ, vel una positiva, & duæ negativæ.

16. In altero casu, ubi duæ radices sunt imaginariæ, affirmo radicem realem positivam esse. Si enim potest esse negativa, sit $m = -A$; ergo formula tertii gradus erit divisibilis per binomium $m + A$; facta autem divisione proveniet formula secundi gradus hujus formæ $mm + Bm + C = 0$. In hæc, quum duæ radices sint imaginariæ, quantitas C sit oportet positiva, quia æquatio secundi gradus, cui ultimus terminus sit negativus, nequit habere radices imaginarias. Atqui æquatio hæc secundi gradus ducta in binomium $m + A$, quæ debet formulam tertii gradus restituere, præbet ultimum terminum $+AC$, qui est positivus, nec potest quantitatem negativam æquare; ergo fieri non potest, ut radix realis nostræ æquationis sit negativa. Q. E. D.

17. In unico casu nostrorum trinomialium formula videtur deficere, quum scilicet $m = 0$, quod evenit, quotiescumque $c = 0$, quia in ultimo termino provenit fractio $\frac{0}{0}$, cujus ignotus est valor. Sed in hoc casu æquatio resolvitur ad modum æquationis quadraticæ. Nihilo tamen minus præfens quoque methodus cum

artificio usurpata determinat valorem fractionis $\frac{c}{\sqrt{m}}$, qui finitus est. Advocæ æ-

quationem tertii gradus $m^3 + 2bm^2 + bbm - ac^2 = 0$. Si $m = 0$ perspicuum est duos primos terminos, ubi adest m^3, m^2 , evanescere, si comparentur cum tertio; ergo remanebit $\sqrt{bb - 4ad} \cdot m = ac^2$; ergo $\frac{\sqrt{bb - 4ad}}{\sqrt{a}} = \frac{c}{\sqrt{m}}$, qui valor in trino-

mialium formula collocatus exhibebit $x = \frac{a\sqrt{bb - 4ad} + ab}{2} = 0$.

18. Reliqui duo valores m , in hypothesi $c = 0$, obtinentur resoluta æquatione $mm + 2bm + bb - 4ad = 0$, inveniuntur autem $m = \frac{-b + 2\sqrt{ad}}{2}$, $m = \frac{-b - 2\sqrt{ad}}{2}$, qui positi in trinomiis præbent $x^2 \pm \sqrt{-ab + 2a\sqrt{ad}} \cdot x + a\sqrt{ad}$, $x^2 \pm \sqrt{-ab - 2a\sqrt{ad}} \cdot x - a\sqrt{ad}$. Si d aut negativa est, aut positiva sed minor $\frac{bb}{4a}$, trinomia N. 17 sunt realia. Verum si, posita d positiva, $4ad > bb$, in hoc numero habes trinomia realia.

19. Quo-

19. Quoniam demonstratum est, omnes æquationes quarti gradus resolvi posse in duo trinomia realia gradus secundi; evidens est, omnes radices imaginarias quarti gradus exprimi posse per imaginarias radices secundi gradus. Nam pone radices imaginarias quarti gradus $= x$; tum bis eleva ad potestatem quadraticam, ita, ut radices expellantur. Orietur formula quarti gradus, quæ resolvi potest in duo trinomia secundi gradus realia. Horum autem trinomialium resolutio præbebit radices hujus formæ $p + q\sqrt{-1}$, existentibus p, q quantitativis realibus.

20. Unum, aut alterum exemplum proponamus, ac primum in radice quarta quantitatis -1 . Fac $x = \sqrt[4]{-1}$; eleva bis ad quadratum, ut habeas $x^4 = -1$, sive $x^4 + 1 = 0$. Trinomia realia in quæ hæc æquatio resolvitur, sunt hæc $xx - \sqrt{2} + 1 = 0$, eorumque quatuor radices procedunt $\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$;

$\frac{-1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $\frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, quæ non continent, nisi radices imaginarias gradus secundi.

21. Exemplum alterum sit in $\sqrt{1 + \sqrt{-1}}$, quæ, quam sit radix secunda radices secundæ, æquivaleret quartæ. Pone $x = \sqrt{1 + \sqrt{-1}}$, eleva ad secundam potestatem $x^2 = 1 + \sqrt{-1}$, seu translatis terminis $x^2 - 1 = \sqrt{-1}$; iterum quadra, ut oriatur $x^4 - 2x^2 + 1 = -1$, vel $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$. Ut hæc resolvatur in trinomia realia, oportet ea sumere, quæ spectant ad hypotheseos $c = 0$. Facto autem $b = -2$, $d = 2$, factores reales oriuntur $x^2 - \sqrt{2} + 1 = 0$, quibus resolutis sese offerunt quatuor radices, quæ non continent, nisi radices

imaginarias secundi, nimirum $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

$-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

$-\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$, $-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Hic autem modus exprimenti imaginaria per $\sqrt{-1}$ sæpe maximam affert utilitatem.

22. Unicum problema arithmeticum per methodos hic traditas resolvamus. Invenire tres numeros in continua arithmetica proportione, quorum differentia data sit, simul cum solido ab eorum multiplicatione producto. Data differentia $= d$, datum solidum $= s$; medius numerus $= y$, erit minimus $= y - d$, & maximus $= y + d$; ergo eorum productum $y^3 - ddy = s$, seu $y^3 - ddy - s = 0$.

Quare resoluta æquatione inveniemus $y = \sqrt[3]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{ss}{4} - \frac{d^3}{27}}}$ +

$$+ \sqrt[3]{\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{ss-d^2}{4}}}. \text{ Pone } s=28, d=3, \text{ invenies } y = \sqrt[3]{14 + \sqrt{196-27}}$$

$$+ \sqrt[3]{14 - \sqrt{196-27}} = \sqrt[3]{14 + \sqrt{109}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{109}} = \sqrt[3]{14 + 13}$$

+ $\sqrt[3]{14-13} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1} = 3 + 1 = 4$. Numeri itaque quæfiti sunt 1, 4, 7. Reliquæ duæ solutiones in hoc casu sunt imaginariæ. Pone $s=6, d=1$,

$$\text{invenies } y = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} + \sqrt[3]{3 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} = 1 + \sqrt[3]{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 2.$$

Numeri ergo quæfiti erant 1, 2, 3. Reliquæ solutiones in casu hoc imaginariæ sunt. Demum ponamus $s = \frac{190}{27}$, & $d=3$, fiet

$$x = \sqrt[3]{\frac{95}{3} + \frac{71}{3}\sqrt{-2}} + \sqrt[3]{\frac{95}{3} - \frac{71}{3}\sqrt{-2}} = \frac{5 + \sqrt{-2}}{3} + \frac{5 - \sqrt{-2}}{3} = \frac{10}{3}.$$

Quapropter numeri quæfiti erunt $\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{19}{3}$. Reliquæ duæ radices licet non sint rationales, tamen sunt in hoc casu reales. Sunt autem

$$x = \frac{5 + \sqrt{-2}}{3} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + \frac{5 - \sqrt{-2}}{3} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{-2}}{3} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + \frac{5 - \sqrt{-2}}{3} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \text{ quarum prima}$$

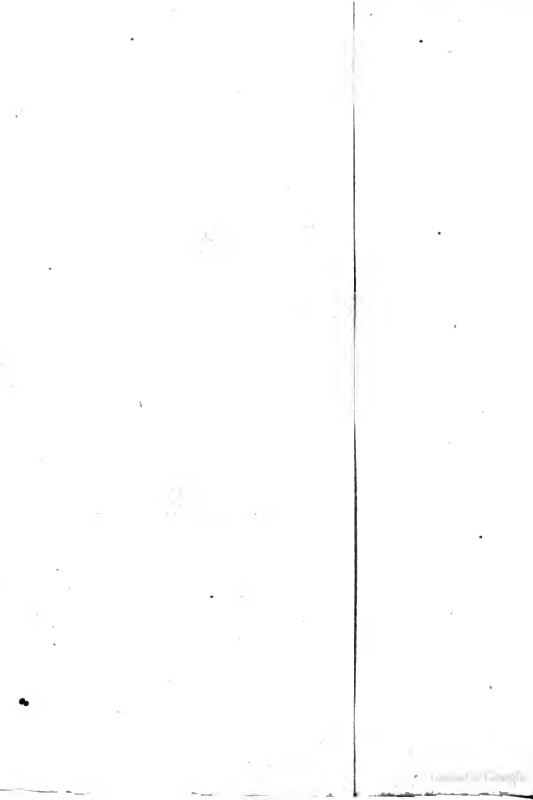
dat $x = \frac{-5 - \sqrt{6}}{3}$, altera $x = \frac{-5 + \sqrt{6}}{3}$. Quare numeri satisfacientes pro-

$$\text{blemati erunt hujusmodi } \frac{-14 \mp \sqrt{6}}{3}, \frac{-5 \mp \sqrt{6}}{3}, \frac{+4 \mp \sqrt{6}}{3}.$$

CAPUT DUODECIMUM.

Per sinus, & cosinus circulares, & hyperbolicos construuntur formulæ, quæ inventæ sunt in resolutione æquationum tertii gradus,

A Nalogia, quæ maxima intercedit inter circulum, & hyperbolam æquilataram, commovit Vincentium Riccatum, ut in opusculorum tomo primo op. quarto, parte secunda & spectaret, & in usum non contemnendum traduceret sinus, & cosinus hyperbolicos non minus quam circulares, qui jamdiu in geometria locum occupant. Principia calculi sinuum, & cosinum circularium libro superiori a nobis sunt explicata; nunc tradenda ea, quæ pertinent ad hyperbolicos, postquam hyperbolæ proprietates patefactæ sunt; tum theoria omnis ulterius promovenda, & applicanda constructioni formularum, quæ oriuntur ex
reso-



resoluitio æquationum tertii gradus. Ordo jubet, nos discedere aliquantum ab auctoris methodo, qui nititur proprietatibus arcuum hyperbolicæ, de quibus in secundo volumine tomo verba facimus. Quare his nonnondum cognitis dabimus operam, ut in hunc modum suppleamus.

1. Hyperbola æquilatera AEFN (Fig. 1.) habeat centrum C, semiaxem primum CA, unum ex asymptotibus CQ, quod facit cum axe angulum semi-rectum. Ex vertice A demittatur in asymptotum perpendicularis AK, sumptaque pro primo termino CK, pro secundo qualibet CG, formetur series linearum, quæ sint in continua proportione geometrica, CK; CG, CH, CP &c., quas ut usum communem loquendi servemus, vocabimus numeros. Deinde formetur series quantitatum, quæ sint in continua arithmetica proportione; hæc series habeat primum terminum $= 0$, secundus autem sit quantitas quælibet $= \mu$, ut sit $0, \mu, 2\mu, 3\mu$ &c. Hujus termini dicantur numerorum logarithmi; quare 0 erit logarithmus CK, μ logarithmus CG, 2μ logarithmus CH, atque ita deinceps. Existente numeri CG logarithmo $= \mu$, qui quæ videt, $m\mu$ fore logarithmum $m-1$ proportionalis post CK, CG, & $\frac{1}{m}\mu$ esse logarithmum primæ ex mediis proportionalibus numero $m-1$ inter CK, CG, imo generalius $\frac{\mu}{m}$ erit logarithmus m ex mediis proportionalibus numero $m-1$ inter eandem CK, CG. Præterea sit μ logarithmus CG, & r logarithmus CH, erit $\mu+r$ logarithmus quartæ proportionalis post CK, CG, CH.

2. His præmissis, quæ dilucide fiunt ex proprietatibus serierum geometricarum & arithmeticarum, semiaxis CA dicatur sinus totus, & vecturæ $= r$; & facta numeri CG logarithmo $= \mu$, agatur GE normalis asymptoto, tum EB normalis primo axi, recta CB dicatur cosinus logarithmi μ , & BE ejus sinus. Ut hos sinus, & cosinus hyperbolicos designemus, utemur notis Sb, Cb ; unde Sb, μ exprimet sinum logarithmi $= \mu$; & Cb, μ exprimet cosinum. Logarithmi $= 0$ cosinus $= r$, sinus $= 0$; crescentibus logarithmis crescunt sinus, & cosinus in infinitum. Logarithmi qui respondent numeris minoribus CK, negativi sunt, & cosinus habent positivos, sinus negativos. Si numero CG respondeat logarithmus μ , tum fiat $CG:CK::CK:CR$, numero CR respondebit logarithmus $m\mu$. Normalis asymptoto agatur RS, quæ semiaxem fecit in V, & GE; jungatur SE; sive hanc axi esse normalem. Producat SE usque ad asymptotum in I. Triangulorum IGE, IRS similitudo præbet $IG:RS::GE:RS$, sive $IG:CR::CG$, & dividendo $IG:RG::CR:RG$; ergo $IG=CR$. Præterea $CR:CK::RV:AK$; sed $CR:CK::CK:CG$; $CG:GE::AK$ igitur $RV:AK::GE:AK$, ergo $RV=GE$; ergo triangula rectangula CRV, IGE æqualia sunt quoad omnia; igitur angulus $EIG=VCR$; sed VCR est semirectus; ergo CBI rectus. Q. E. D. Post hanc demonstrationem evidens est $Cb, \mu = Cb, -\mu$, quum uterque æquet CB; at $Sb, -\mu = -Sb, \mu$, quum $Sb, \mu = BE, \mu$ & $Sb, -\mu = BS$, qui licet sint æquales tamen unus positivus est, negativus alter.

3. Nunc vero sinuum, & cosinum proprietates persequamur. Primum de sinu duorum logarithmorum μ, r finitus, & cosinibus, queratur sinus, & cosinus logarithmi $\mu+r$. Sit $CB=Cb, \mu$, $BE=Sb, \mu$, $CD=Cb, r$,

Ee

DF

DF = Sb.v. Supponatur CM = Cb.p + v, & MN = Sb.p + v. BE, DF, MN producantur usque ad asymptotum in punctis I, L, Q. Ex punctis E, F, N agantur asymptoto normales EG, FH, NP. Quoniam propter angulum femirectum ACK est BI = CB, DL = CD, MQ = CM, constat fore EF = Cb.p - Sb.p, FL = Cb.v - Sb.v, NQ = Cb.p + v - Sb.p + v. Deinde quando CA = v, erit CK = $\frac{v}{\sqrt{2}}$; item GI = $\frac{Cb.p - Sb.p}{\sqrt{2}}$.

HL = $\frac{Cb.v - Sb.v}{\sqrt{2}}$, PQ = $\frac{Cb.p + v - Sb.p + v}{\sqrt{2}}$. Postremo

CI = $\sqrt{2} \cdot Cb.p$, CL = $\sqrt{2} \cdot Cb.v$, CQ = $\sqrt{2} \cdot Cb.p + v$. Quapropter CG = $\sqrt{2} \cdot Cb.p - Cb.p + Sb.p = Cb.p + Sb.p$. Similiter

CH = $\frac{Cb.v + Sb.v}{\sqrt{2}}$, & CP = $\frac{Cb.p + v + Sb.p + v}{\sqrt{2}}$; atqui debet esse

CK:CG::CH:CP; igitur

$\frac{v}{\sqrt{2}} : Cb.p + Sb.p :: Cb.v + Sb.v : \frac{Cb.p + v + Sb.p + v}{\sqrt{2}}$, factoque transito $\frac{v}{\sqrt{2}}$ ad æqualitatem orietur $Cb.p + v + Sb.p + v = \frac{Cb.p + Sb.p \cdot Cb.v + Sb.v}{Cb.p - Sb.p}$.

4. Invento hoc primo theoremate aliud nanciscemur ope equationis loci hyperbolæ, nempe $Cb^2 - Sb^2 = rr$; ergo $Cb + Sb \cdot Cb - Sb = rr$, sive $Cb + Sb = \frac{rr}{Cb - Sb}$. Quare valoribus substituentis habebimus

$$\frac{rr}{Cb.p + v - Sb.p + v} = \frac{r^2}{Cb.p - Sb.p \cdot Cb.v - Sb.v}, \text{ sive}$$

$$Cb.p + v - Sb.p + v = \frac{Cb.p - Sb.p \cdot Cb.v - Sb.v}{Cb.p + v - Sb.p + v}; \text{ quod est theorema alterum.}$$

5. Si secundi theorematem formulam primum addas, deinde subducas a formula theorematem primi, obtinebis

$$Cb.p + v = \frac{Cb.p + Sb.v \cdot Cb.v + Sb.v + Cb.p - Sb.p \cdot Cb.v - Sb.v}{Cb.p \cdot Cb.v + Sb.p \cdot Sb.v}$$

$$Sb.p + v = \frac{Cb.p + Sb.p \cdot Cb.v + Sb.v - Cb.p - Sb.p \cdot Cb.v - Sb.v}{Cb.p \cdot Sb.v + Cb.v \cdot Sb.p}$$

Q.E.I. Quod si quæras sinum, & cosinum

disse-

differentiæ duorum logarithmorum μ , ν nempe $Cb.\mu - \nu$, $Sb.\mu - \nu$, eodem formulæ valebunt, dummodo pro $Cb.\nu$, $Sb.\nu$ ponas $Cb. - \nu$, $Sb. - \nu$. Verum ut valores habearis pro datis $Cb.\nu$, $Sb.\nu$, adverte $Cb. - \nu = Cb.\nu$, $Sb. - \nu = -Sb.\nu$. Quare nulla alia formulæ mutatio faciendâ erit, nisi signum mutare $Sb.\nu$.

6. A finibus, & cofinibus hyperbolicis ad circulares redeamus. In circulo, cujus sinus totus, seu radius $= r$, (Fig. 2.) capiatur arcus $AE = \mu$, & $AF = \nu$, tum arcus $AN = AE + AF = \mu + \nu$. Docuimus capite ultimo sibi primi

$Cc.\mu + \nu = \frac{Cc.\mu.Cc.\nu - Sc.\mu.Sc.\nu}{r}$, quæ reduci potest ad hæc formam

$$Cc.\mu + \nu = \frac{Cc.\mu\sqrt{-1}.Sc.\mu.Cc.\nu + \sqrt{1}.Sc.\mu + Cc.\mu\sqrt{-1}.Sc.\mu.Cc.\nu\sqrt{-1}.Sc.\nu}{r}$$

Item $Sc.\mu + \nu = \frac{Sc.\mu.Cc.\nu + Cc.\mu.Sc.\nu}{r}$, quæ ita exprimitur

$$Sc.\mu + \nu = \frac{Cc.\mu\sqrt{-1}.Sc.\mu.Cc.\nu + \sqrt{-1}.Sc.\nu - (Cc.\mu\sqrt{-1}.Sc.\mu.Cc.\nu\sqrt{-1}.Sc.\nu)}{2r\sqrt{-1}}$$

Si hæc æquationem, quæ exhibet $Sc.\mu + \nu$, multiplicetam per $\sqrt{-1}$ primum addas, deinde detrahas ab æquatione superiore præbente $Cc.\mu + \nu$, duo hæc theorematâ nancisceris.

$$Cc.\mu + \nu + \sqrt{-1}.Sc.\mu + \nu = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu.Cc.\nu + \sqrt{-1}.Sc.\nu}{r}$$

$$Cc.\mu + \nu - \sqrt{-1}.Sc.\mu + \nu = \frac{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu.Cc.\nu - \sqrt{-1}.Sc.\nu}{r}$$

Si agas de sinu, & cofinu arcus $\mu - \nu$, satis erit in formulis mutare signum $Sc.\nu$, reliquis non mutatis. Ratio, quæ tradita est in quantitatibus hyperbolicis, valet etiam in circularibus.

7. Formulæ quatuor, quas dixi quatuor theorematâ exhibere, ingentem præstant usum in multiplicandis, ac dividendis cum logarithmis, tum arcibus circularibus. Etænim posito $\mu = \nu$ proveniunt quatuor æquationes

$$Cb.2\mu + Sb.2\mu = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu}{r}$$

$$Cb.2\mu - Sb.2\mu = \frac{Cb.\mu - Sb.\mu}{r}$$

$$Cc.2\mu + \sqrt{-1}.Sc.2\mu = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}{r}$$

$$Cc.2\mu - \sqrt{-1}.Sc.2\mu = \frac{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}{r}$$

Et a

Flat

Fiat æquationum additio, & subtractio, quam signorum ambiguitas videtur postulare.

$$Cb.2\mu = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu + Cb.\mu - Sb.\mu}{2r}$$

$$Sb.2\mu = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu - Cb.\mu - Sb.\mu}{2r}$$

$$Cc.2\mu = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu + Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}{2r}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.2\mu = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu - (Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu)}{2r}$$

Præterea fiat æquationum additio, & subtractio, postquam extracta fuerit radix quadrata, & inuenietur

$$\frac{Cb.2\mu + Sb.2\mu}{2r} + \frac{Cb.2\mu - Sb.2\mu}{2r} = Cb.\mu$$

$$\frac{Cb.2\mu + Sb.2\mu}{2r} - \frac{Cb.2\mu - Sb.2\mu}{2r} = Sb.\mu$$

$$\frac{Cc.2\mu + \sqrt{-1}.Sc.2\mu}{2r} + \frac{Cc.2\mu - \sqrt{-1}.Sc.2\mu}{2r} = Cc.\mu$$

$$\frac{Cc.2\mu + \sqrt{-1}.Sc.2\mu}{2r} - \frac{Cc.2\mu - \sqrt{-1}.Sc.2\mu}{2r} = \sqrt{-1}.Sc.\mu$$

$$\frac{Cc.2\mu + \sqrt{-1}.Sc.2\mu}{2r} - \frac{Cc.2\mu - \sqrt{-1}.Sc.2\mu}{2r} = \sqrt{-1}.Sc.\mu$$

8. Duobus logarithmis, aut arcibus circularibus, μ , addatur tertius ϕ , & theorematâ præbebant æquationes

$$Cb.\mu + \nu + \phi + Sb.\mu + \nu + \phi = \frac{Cb.\mu + \nu + Sb.\mu + \nu \cdot Cb.\phi + Sb.\phi}{2r}$$

$$Cb.\mu + \nu + \phi - Sb.\mu + \nu + \phi = \frac{Cb.\mu + \nu - Sb.\mu + \nu \cdot Cb.\phi - Sb.\phi}{2r}$$

$$Cc.\mu + \nu + \phi + \sqrt{-1}.Sc.\mu + \nu + \phi =$$

Cc.

$$\frac{Cc.\mu + \nu + \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} \cdot Cc.\phi + \sqrt{-1.Sc.\phi}}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi} =$$

$$\frac{Cc.\mu + \nu - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} \cdot Cc.\phi - \sqrt{-1.Sc.\phi}}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi} =$$

$$\frac{Cc.\mu + \nu + \phi + \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} \cdot Cc.\phi + \sqrt{-1.Sc.\phi}}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi} =$$

Substituere pro $Cb.\mu + \nu + Sb.\mu + \nu$, item pro $Cb.\mu + \nu - Sb.\mu + \nu$ valores, quos prima duo theorematum præbent; idemque fac in quantitatis circularibus per duo alia theorematum. Orietur porro hæc quatuor theorematum

$$Cb.\mu + \nu + \phi + Sb.\mu + \nu + \phi = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu \cdot Cb.\nu + Sb.\nu \cdot Cb.\phi + Sb.\phi}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi}$$

$$Cb.\mu + \nu + \phi - Sb.\mu + \nu + \phi = \frac{Cb.\mu - Sb.\mu \cdot Cb.\nu - Sb.\nu \cdot Cb.\phi - Sb.\phi}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi}$$

$$Cc.\mu + \nu + \phi + \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi =$$

$$\frac{Cc.\mu + \nu + \phi + \sqrt{-1.Sc.\mu} \cdot Cc.\nu + \sqrt{-1.Sc.\nu} \cdot Cc.\phi + \sqrt{-1.Sc.\phi}}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi} =$$

$$\frac{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu} \cdot Cc.\nu - \sqrt{-1.Sc.\nu} \cdot Cc.\phi - \sqrt{-1.Sc.\phi}}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi} =$$

$$\frac{Cc.\mu + \nu + \phi + \sqrt{-1.Sc.\mu} \cdot Cc.\nu + \sqrt{-1.Sc.\nu} \cdot Cc.\phi + \sqrt{-1.Sc.\phi}}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi} =$$

$$\frac{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu} \cdot Cc.\nu - \sqrt{-1.Sc.\nu} \cdot Cc.\phi - \sqrt{-1.Sc.\phi}}{Cc.\mu + \nu + \phi - \sqrt{-1.Sc.\mu + \nu} + \phi} =$$

$$Cb_{.3\mu} = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu + Cb.\mu - Sb.\mu}{2r}$$

$$Sb_{.3\mu} = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu - (Cb.\mu - Sb.\mu)}{2r}$$

$$Cc_{.3\mu} = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1.Sc.\mu} + Cc.\mu - \sqrt{-1.Sc.\mu}}{2r}$$

$$\sqrt{-1.Sc_{.3\mu}} = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1.Sc.\mu} - (Cc.\mu - \sqrt{-1.Sc.\mu})}{2r}$$

Si antequam addas, & subtrahas equationes, extrahas tertii gradus radices, invenies

$$\frac{Cb_{.3\mu} + Sb_{.3\mu}}{3} + \frac{Cb_{.3\mu} - Sb_{.3\mu}}{3} = Cb.\mu$$

$$\frac{2r}{3} = Cb.\mu$$

$$\frac{Cb.3n + Sb.3n}{2r^{\frac{3}{2}}} - \frac{(Cb.3n - Sb.3n)}{2r^{\frac{3}{2}}} = Sb.n.$$

$$\frac{Cc.3n + \sqrt{-1.Sc.3n} + Cc.3n - \sqrt{-1.Sc.3n}}{2r^{\frac{3}{2}}} = Cc.n.$$

$$\frac{Cc.3n + \sqrt{-1.Sc.3n} - (Cc.3n - \sqrt{-1.Sc.3n})}{2r^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{-1.Sc.n}$$

10. Progressus huiusmodi, ut perspicuum est, potest in infinitum produci. Quare hae formulae generatim valebunt

$$Cb.n = \frac{Cb.n + Sb.n + Cb.n - Sb.n}{2r^{n-1}}$$

$$Sb.n = \frac{Cb.n + Sb.n - (Cb.n - Sb.n)}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.n = \frac{Cc.n + \sqrt{-1.Sc.n} + Cc.n - \sqrt{-1.Sc.n}}{2r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1.Sc.n} = \frac{Cc.n + \sqrt{-1.Sc.n} - (Cc.n - \sqrt{-1.Sc.n})}{2r^{n-1}}$$

Si n est numerus integer, vel unitas divisa per numerum integrum, res est clarissime demonstrata. In reliquis numeris ex inductione probata remanet.

11. Si cui genus hoc demonstrationis minus arrideat, asseram primum pro numeris fractis, quorum numerator non sit unitas, deinde pro negativis demonstrationem clarissimam, ex superioribus deductam. Sit fractio $\frac{n}{m}$; constat ex numero superiori

$$Cb.\frac{n}{m} = \frac{Cb.\frac{n}{m} + Sb.\frac{n}{m} + Cb.\frac{n}{m} - Sb.\frac{n}{m}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$Sb.\frac{n}{m} = \frac{Cb.\frac{n}{m} + Sb.\frac{n}{m} - (Cb.\frac{n}{m} - Sb.\frac{n}{m})}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

Cc.

$$Cc. \frac{n\mu}{m} = \frac{Cc. \frac{\mu}{m} + \sqrt{-1}. Sc. \frac{\mu}{m} + Cc. \frac{\mu}{m} - \sqrt{-1}. Sc. \frac{\mu}{m}}{2r^{\frac{n-1}{m}}}$$

$$\sqrt{-1}. Sc. \frac{n\mu}{m} = \frac{Cc. \frac{\mu}{m} + \sqrt{-1}. Sc. \frac{\mu}{m} - (Cc. \frac{\mu}{m} - \sqrt{-1}. Sc. \frac{\mu}{m})}{2r^{\frac{n-1}{m}}}$$

atque pariter ex demonstratis

$$Cb. \frac{\mu}{m} = \frac{Cb.p + Sb.p}{2r^{\frac{1}{m}}} + \frac{Cb.p - Sb.p}{2r^{\frac{1}{m}}}$$

$$Sb. \frac{\mu}{m} = \frac{Cb.p + Sb.p}{2r^{\frac{1}{m}}} - \frac{Cb.p - Sb.p}{2r^{\frac{1}{m}}}$$

$$Cc. \frac{\mu}{m} = \frac{Cc.p + \sqrt{-1}. Sc.p}{2r^{\frac{1}{m}}} + \frac{Cc.p - \sqrt{-1}. Sc.p}{2r^{\frac{1}{m}}}$$

$$\sqrt{-1}. Sc. \frac{\mu}{m} = \frac{Cc.p + \sqrt{-1}. Sc.p}{2r^{\frac{1}{m}}} - \frac{Cc.p - \sqrt{-1}. Sc.p}{2r^{\frac{1}{m}}}$$

$$Cb. \frac{n\mu}{m} = \frac{Cb.p + Sb.p}{2r^{\frac{n}{m}}} + \frac{Cb.p - Sb.p}{2r^{\frac{n}{m}}}$$

$$Sb. \frac{n\mu}{m} = \frac{Cb.p + Sb.p}{2r^{\frac{n}{m}}} - \frac{Cb.p - Sb.p}{2r^{\frac{n}{m}}}$$

$$Cc. \frac{n\mu}{m} = \frac{Cc.p + \sqrt{-1}. Sc.p}{2r^{\frac{n}{m}}} + \frac{Cc.p - \sqrt{-1}. Sc.p}{2r^{\frac{n}{m}}}$$

$$\sqrt{-1}. Sc. \frac{n\mu}{m} = \frac{Cc.p + \sqrt{-1}. Sc.p}{2r^{\frac{n}{m}}} - \frac{Cc.p - \sqrt{-1}. Sc.p}{2r^{\frac{n}{m}}}$$

$$Cb. \frac{n\mu}{m} = \frac{Cb.p + Sb.p}{2r^{\frac{n}{m}}} + \frac{Cb.p - Sb.p}{2r^{\frac{n}{m}}}$$

$$Sb. \frac{n\mu}{m} = \frac{Cb.p + Sb.p}{2r^{\frac{n}{m}}} - \frac{Cb.p - Sb.p}{2r^{\frac{n}{m}}}$$

$$Cc. - \frac{\pi \mu}{m} = \frac{Cc. \mu + \sqrt{-1. Sc. \mu} + Cc. \mu - \sqrt{-1. Sc. \mu}}{2r^{\frac{n-1}{m}}}$$

$$\sqrt{-1. Sc.} - \frac{\pi \mu}{m} = \frac{Cc. \mu + \sqrt{-1. Sc. \mu} - (Cc. \mu - \sqrt{-1. Sc. \mu})}{2r^{\frac{n-1}{m}}}; \text{ que}$$

formulæ erant demonstrandæ.

12. Quoad numeros negativos sic advertas, quod inter notari, cosinum logarithmi, aut arcus negativum eundem esse, ac cosinum positivi; contra sine logarithmi, aut arcus negativum esse quidem æqualem sinui positivo, sed tamen negativum. Quamobrem valebat hujusmodi formulæ

$$Cb. - \pi \mu = \frac{Cb. \mu + Sb. \mu + Cb. \mu - Sb. \mu}{2r^{\frac{n-1}{m}}}$$

$$Sb. - \pi \mu = \frac{(Cb. \mu + Sb. \mu) + (Cb. \mu - Sb. \mu)}{2r^{\frac{n-1}{m}}}$$

$$Cc. - \pi \mu = \frac{Cc. \mu + \sqrt{-1. Sc. \mu} + Cc. \mu - \sqrt{-1. Sc. \mu}}{2r^{\frac{n-1}{m}}}$$

$$\sqrt{-1. Sc.} - \pi \mu = \frac{(Cc. \mu + \sqrt{-1. Sc. \mu}) + (Cc. \mu - \sqrt{-1. Sc. \mu})}{2r^{\frac{n-1}{m}}}$$

Quæ formulæ in duas fractiones transmutari possunt, in quibus negativum sit divisoris exponentis in hunc modum

$$Cb. - \pi \mu = \frac{Cb. \mu}{2r^{\frac{n-1}{m}} + 1} + \frac{Cb. \mu - Sb. \mu}{2r^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$

$$Sb. - \pi \mu = \frac{Cb. \mu + Sb. \mu}{2r^{\frac{n-1}{m}} + 1} + \frac{Cb. \mu - Sb. \mu}{2r^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$

$$Cc. - \pi \mu = \frac{Cc. \mu + \sqrt{-1. Sc. \mu}}{2r^{\frac{n-1}{m}} + 1} + \frac{Cc. \mu - \sqrt{-1. Sc. \mu}}{2r^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$

$$\sqrt{-1. Sc.} - \pi \mu = \frac{Cc. \mu + \sqrt{-1. Sc. \mu}}{2r^{\frac{n-1}{m}} + 1} + \frac{Cc. \mu + \sqrt{-1. Sc. \mu}}{2r^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$

Si

Si redigas fractiones hujusmodi ad eundem denominatorem, & pro communi divisore $Cb.\mu - Sb.\mu$, aut $Cc.\mu + Sc.\mu$ substituas r illi æqualem ex natura hyperbolæ æquilateræ, & circuli, invenies æquationes quatuor, quæ a nobis probandæ sunt, scilicet

$$Cb.-\mu = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu}{2r} + \frac{Cb.\mu - Sb.\mu}{2r}$$

$$Sb.-\mu = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu}{2r} - \frac{Cb.\mu - Sb.\mu}{2r}$$

$$Cc.-\mu = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}{2r} + \frac{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}{2r}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-\mu = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}{2r} - \frac{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}{2r}$$

Quomobrem veritas formularum, quæ præmissæ, demonstrata est in omnibus numeris rationalibus. Quod spectat ad irrationales, potest ea demonstrari adhibito calculo infinitesimali. Sed quum hoc ad præsens institutum nostrum minime pertinet, satis nobis erit in præsentia, illam ex inductione probare.

13. Postquam ea, quæ necessaria visa sunt, de finibus, & cœnibus ita demonstravimus, ut ad eadem desceps redire non sit opus, accedamus propriè ad constructionem radicem tertii gradus, quæ formulæ cardanicis commentatur. Radices istæ, ut constat ex capite præcedenti hæc habeat formam

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}. \text{ Ut elegantiz serviam di-}$$

$$\text{vido per 2 hoc modo } \frac{x}{2} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}$$

atque determino $\frac{x}{2}$ dimidium radicis quæsitæ. In prima hypothesi statuo tam a , quam b positivam. Duplicem casum in hoc distinguamus oportet; nam si $\frac{bb}{4} > a^3$, nihil imaginarii formula continebit; si vero $\frac{bb}{4} < a^3$, aderit radix imaginaria. In primo casu comparanda est cum expressiõne logarithmi subtripli,

$$\text{scilicet cum } Cb.\frac{\mu}{3} = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu^3}{2r} + \frac{Cb.\mu - Sb.\mu^3}{2r}; \text{ in secundo ca-}$$

2r

Ff

su

su comparanda est cum formula arcus subtriplici, nimirum eam

$$Co. \frac{\mu}{3} = \frac{Cc. \mu + \sqrt{-1} . Sc. \mu^{\frac{1}{3}} + Cc. \mu - \sqrt{-1} . Sc. \mu^{\frac{1}{3}}}{2r - \frac{1}{3}}$$

14. Fiat primi casus collatio, & orientur æquationes duæ

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^2} = \frac{Cb. \mu + Sb. \mu}{r - 2}, \quad \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^2} = \frac{Cb. \mu - Sb. \mu}{r - 2}.$$

Facta harum æquationum additione, & subtractione exurgit $\frac{b}{2} = \frac{Cb. \mu}{r - 2}$, &

$$\sqrt{\frac{bb}{4} - a^2} = \frac{Sb. \mu}{r - 2}; \text{ atqui } Cb. \mu^2 - Sb. \mu^2 = r^2 \text{ ergo } \frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^2 = \frac{rr}{r - 4}, \text{ seu}$$

$$a^2 = r^2, \text{ seu } a^{\frac{1}{2}} = r. \text{ Itaque } \frac{x}{2} \text{ erit } Cb. \frac{\mu}{3} \text{ existente } \mu \text{ eo logarithmo, cu-}$$

jus cosinus = $\frac{b}{2a}$ existente sinu toto = $a^{\frac{1}{2}}$. Hujusmodi autem oriatur constructio (Fig. 1). Descripta hyperbõla æquilatera, cujus sinus totus, seu semia-

xis $AC = a^{\frac{1}{2}}$, abscinde $CM = \frac{b}{2a}$, & exortetur sinus MN . Ex punctis A, N demittantur in asymptotum normales AK, NP . Inter CK, CP inveniantur duæ medie proportionales, quarum prima sit CG . Ex G duc GE perpendicularem asymptoto, tum sinum EB , qui determinat cosinum $CB = \frac{x}{2}$.

15. Fiat alterius casus comparatio, & ex duabus æquationibus

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1} . \sqrt{a^2 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc. \mu + \sqrt{-1} . Sc. \mu}{r - 2}$$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{-1} . \sqrt{a^2 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc. \mu - \sqrt{-1} . Sc. \mu}{r - 2} \text{ invenietur } \frac{b}{2} = \frac{Cc. \mu}{r - 2},$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc. \mu}{r - 2}; \text{ atqui } Cc. \mu^2 + Sc. \mu^2 = r^2; \text{ ergo } \frac{bb}{4} + a^2 - \frac{bb}{4} = \frac{r^2}{r - 4},$$

$$\text{seu } a^2 = r. \text{ Itaque } \frac{x}{2} \text{ erit } Cc. \frac{\mu}{3}, \text{ dummodo sinus totus} = a^{\frac{1}{2}}, \text{ & } Cc. \mu = \frac{b}{2a}$$

Ex his pleno alveo fuit constructio. Descripto circulo, cujus sinus totus, seu radius $CA = a^{\frac{1}{2}}$, capiatur $CM = \frac{b}{2a}$, & agatur sinus MN , (Fig. 2) erit AN

arcus $= \mu$. Arcus iste in tres partes dividatur, quarum prima sit $AE = \frac{\mu}{3}$.

Ducatur sinus EB , cosinus $CB = \frac{x}{2}$. Non unus tantum arcus AN , sed ³ infiniti existunt, quorum cosinus est $CM = \frac{b}{2a}$; nempe posita circumferentia circuli $= c$, & arcu $AN = \mu$, omnes arcus

$\mu, c + \mu, 2c + \mu, 3c + \mu$ &c., imo & alii
 $\mu, -c + \mu, -2c + \mu, -3c + \mu$ &c., qui, ut vides, numero infiniti sunt, quos pariter si divides in partes tres, invenies novos arcus A_2E, A_3E , quorum cosinus C_2B, C_3B , exhibent reliquos valores radicis $\frac{x}{2}$. Ne tamen putet, reales valores radicis $\frac{x}{2}$ esse numero infinitos, sunt enim tres solutio-
 do. Nam divisio trium arcuum $\mu, c + \mu, 2c + \mu$, dat tria puncta $E, 2E, 3E$; et reliquorum arcuum divisionis in hęc eadem puncta cadent, proinde tres duntaxat habebuntur radices æquationis reales, quod clarius explicabimus capite sequenti in problemate de arcus trisectione.

15. Primæ hypothese affinis est altera, in qua supponitur quidem a positiva, ac b negativa. In hac æquatio, si speciei b mutetur signum, sequentem

inducit formam $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}}{2} + \left(-\frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} \right)^{\frac{1}{3}}$, quæ

comparanda est cum cosinu logarithmi subtriplici, si $\frac{bb}{4} > a^3$, cum cosinu arcus subtriplici, si $\frac{bb}{4} > a^3$. Comparatio præbet eosdem valores, ac hypothesis prima cum hoc tantum discriminæ, quod cosinus μ provenit negativus, existente sinu positivo. Quare in casu $\frac{bb}{4} > a^3$ hujusmodi oritur constructio. Descripta hyperbola æquilatera, cujus semiaxis

$CA = a^{\frac{1}{2}}$, (Fig. 3) abscinde $CM = \frac{b}{2a}$, quæ quando negativa inventa est,

sumitur ad partem cosinuum negativorum. Huic excitetur normalis MN quæ statuitur ad partes sinuum positivorum, quia sinus inventus est positivus. Ex N in asymptotum CK demittatur normalis NP . Inter CK, CP inveniuntur eorum medietates proportionales, quarum prima sit CG . Sit GE perpendicularis asymptoto, & EB axi, cosinus CB , qui negativus est, erit $= \frac{x}{2}$. In casu secundo ejusdem hypothese, quæ scilicet $\frac{bb}{4} > a^3$, hæc habetur constructio, quæ

docet, omnes radices esse reales. Descripto circulo, cujus radius $= a^{\frac{1}{2}}$, abscin-

datur negativus cosinus $CM = \frac{b}{2a}$, (Fig. 4) & excitetur positivus sinus MN . Arcus AN dividatur in partes æquales tres, quarum prima sit AE . Ducto sinu

EB , determinatur cosinus CB , qui erit unus ex valoribus $\frac{x}{2}$. Vocato $AN = \mu$,

capiantur tertium partes arcuum $c + \mu$, $2c + \mu$, quarum puncta ultima sint $2E$, $3E$, quæ determinant alios valores $\frac{x}{2}$, C_2B , C_3B .

16. Tertia hypothesis, in qua b positiva sit, a negativa, mutato signo speciei a , hujus formæ æquationem præbet

$$\frac{x}{2} = \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + a^2}}{2} + \frac{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} + a^2}}{2} . \text{ Hæc quæ nihil imaginarij}$$

contineat ad hyperbolam est referenda. Nonnemo primoribus oculis formulam inveniens fortassis judicabit, eam comparandam esse cum expressione cosinus logarithmi subscripti. Sed si comparationem instituat, cogitabit statim, finem totum imaginarium oriri. Quod non indicat, constructionem esse impossibilem, sed formulam non percolinam, sed per finem hyperbolicum esse construendam. Quod ex eo quoque potius colligere, quia si locus fieret, finis major esset colina, quæ in hyperbola omnino impossibile est. Itaque ut formulam referamus ad fi-

$$\text{num, ita eam disponamus } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\frac{bb}{4} + a^2} + \frac{b}{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{\frac{bb}{4} + a^2} - \frac{b}{2}}{2} \right)$$

quæ comparanda est cum sequenti

$$SB \cdot \frac{\mu}{3} = \frac{Cb \cdot \mu + Sb \cdot \mu^2}{3} - \left(\frac{Cb \cdot \mu - Sb \cdot \mu^2}{3} \right) . \text{ Collatio sufficit æqua-}$$

$$\text{tiones duas } \sqrt{\frac{bb}{4} + a^2} + \frac{b}{2} = \frac{Cb \cdot \mu + Sb \cdot \mu^2}{r^2} ,$$

$$\sqrt{\frac{bb}{4} + a^2} - \frac{b}{2} = \frac{Cb \cdot \mu - Sb \cdot \mu^2}{r^2} , \text{ ex quibus propter ambiguitatem signorum}$$

$$\text{provenit } \sqrt{\frac{bb}{4} + a^2} = \frac{Cb \cdot \mu}{r^2} ; \frac{b}{2} = \frac{Sb \cdot \mu^2}{r^2} ; \text{ atque } Cb \cdot \mu - Sb \cdot \mu^2 = r^2 ; \text{ ergo}$$

$$\frac{bb}{4} + a^2 - \frac{bb}{4} = a^2 = r^2 , \& a^2 = r^2 . \text{ Describe hyperbolam, cujus finis totus}$$

$CA = a^2$ (Fig. 1); duc AK normalem asymptoto; accomoda finem $MN = \frac{b}{2a}$; & asymptoto normalem demitte NP . Inveni CG primam ex quibus mediis proportionalibus inter CK , CP , ex G duc GE normalem asymptoto, & ex E agatur finis EB , qui erit $= \frac{x}{2}$, nempe quæsitæ radicis dimidio.

Fig. 2.

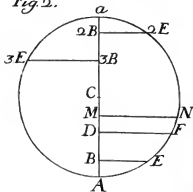
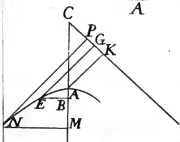
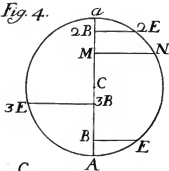


Fig. 4.





16. Quartam, & ultimam hypotesin, in qua non minus a , quam b negativa est, priori similem breviter expedit. Formula in hac provenit hujusmodi

$$\frac{\sqrt{\frac{bb+a^3}{4} - \frac{b^2}{2}} - (\sqrt{\frac{bb+a^3}{4} + \frac{b^2}{2}})^{\frac{3}{2}}}{x - 1}$$

quæ collata cum expressione finis logarithmi subtriplici eisdem determinationes præbet, ac in hypothesi superiori, cum hoc tantum discrimine, quod ab provenit negativus. Quare in eadem hyperbola ad partes finium negativorum applicetur $M, N = \frac{b}{2a}$ (Fig. 4)

& ducta in asymptotum normali NP , inveniatur CG prima ex duabus mediis proportionalibus inter CK, CP . Agatur asymptota normalis GE , & locus E, B , qui æquabit radicem $\frac{x}{2}$. Hac methodo expressiones cardiacæ, quæ proveniunt ex resolutione radicum tertii gradus, non solum utilitatem habent in questionibus arithmetiis, sed etiam in geometricis, quæ constructionem accipiunt vel descripto circulo, divisioque secus in tres partes æquales, vel descripta hyperbola æquilatera, invariisque inter duas datas duabus mediis proportionalibus.

CAPUT DECIMUM TERTIUM

Aliquot tertii, & quarti gradus problemata resolvuntur.

1. Problema primum. Inter duas datas a, b invenire duas medias proportionales. Prima ex duabus mediis proportionalibus inter a, b vocetur x . Con-

ditio problematis statim æquationem offert; nempe $a :: x :: \frac{x^2}{a} :: \frac{x}{a^2} = b$, seu $x^3 = a^2b$, quæ est æquatio tertii gradus. Ut hanc resolvas in duas indeterminatas secundi gradus, pone $xx = ay$, ex qua provenit $xy = a^2b$; quæ duæ æquationes una ad parabolam, alia ad hyperbolam ita construuntur. Ad angulum rectum (angulo enim recto utemur, nisi elegantia prohibeat) constituantur AC, AQ (Fig. 1). Abscinde in prima $AC = a$, atque hæc parametro ad axem AQ delineetur parabola ATM . Seca in altera $AB = b$, & clauso parallelogrammo $ACDB$ inter asymptota AQ, AC describe hyperbolam MD transentem per punctum D . Curvæ duæ descripse se in M , dumtaxat intersecant. Normales rectis AC, AB agantur MP, MQ . Rectæ AP , seu MQ dabit primam ex mediis proportionalibus inter $AC, AB = x$; immo AQ seu MP dabit secundam $= \frac{x^2}{a}$.

2. Si duas parabolæ ad constructionem majis adhibere, multiplica æquationem $x^3 = a^2b$ per x , ut sit $x^4 = a^2bx$. Pone ut supra $xx = ay$, undè proveniet $yy = bx$. Descripta ut supra parabola ATM , aliam describe ASM para-

parametro $AB = b$ ad axem AP . Duarum parabolaram intersectio M praebebit AP primam, AQ secundam ex duabus mediis proportionalibus inter AC , AB . Ad inveniendas tres aequationes, quas adhibuimus, non est necesse devenire ad aequationem determinatam. Nam vocatis mediis x, y est $ax : x : y :: b$; ergo statim habemus $ay = xx$, $bx = yy$, $ab = xy$.

3. Si libeat adhibere circulum, hanc sequere methodum. Duas aequationes ad parabolas simul iunge in hunc modum $yy - ay + xx - bx = 0$, sive

$$y - \frac{a}{2} + x - \frac{b}{2} = \frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}$$

aequatio ad circulum, qui in hunc modum

construitur. Sume $CD = \frac{b}{2}$, $DE = \frac{a}{2}$ (Fig. 2) positas ad angulum rectum

in D , iunge CE , quo radio describe circulum EAB . Parallelam diametro AB duc EP , erunt $EP = x$, $MP = y$. Quare si vertice E parametro $= b$, ad axem; EP describas parabolam, intersectio M parabolae, & circuli dabit EP primam, MP secundam ex mediis proportionalibus inter a, b . Quoniam in uno tantum puncto curvae se lecant, una tantum est realis solutio problematis.

4. Problema secundum: Intra rectum angulum ABC (Fig. 3.) ducere lineam AC transeuntem per datum punctum D ita, ut ex vertice B demissa in ipsam normalis sit pars $AE = DC$. Supponatur factum, & ex punctis D, E agatur DN, EM parallelae BA . Quando $AE = DC$, etiam $BM = NC$, ergo $BN = MC$. Vocetur $DN = a$, $BN = MC = b$, $NC = BM = x$. Quum ME sit media proportionalis inter BM, MC propter angulum rectum BEC erit $EM = \sqrt{bx}$; atqui $NC : ND :: MC : ME$; ergo $x : a : b : \sqrt{bx} :: \sqrt{b} : \sqrt{x}$;

ergo $x^2 = a^2 b$, quae formula, ut ex superiore problemate patet, docet, & esse primam ex mediis duabus proportionalibus inter a, b . Hoc idem sine specibus poterat facile demonstrari. Agantur DP, EQ parallelae. Constat $AQ = BP$, & $AP = BQ$. Itaque a se CN, AP esse duas medias proportionales inter DN, DP . Nam ob angulum rectum BEA est $AQ : QE$, seu $ND : NC :: QE = NC : BQ = AP$. Sunt itaque in continua proportione ND, CN, AP . Praeterea $BM = NC : ME = AP : ME = AP : MC = PD$; ergo sunt pariter continue proportionales CN, AP, DP ; igitur NC, AP sunt mediae proportionales inter datas DN, DP . Quare soluto superiori problemate hoc quoque solutionem accipit, & per hujus solutionem duae mediae proportionales inveniuntur.

5. Ad huiusmodi problematis solutionem ita sine speciosa analysi possunt loci duo determinari. Ob angulum rectum BEC erit $EM^2 = MC \cdot BM = BN \cdot BM$. Quare si vertice B , axe BC , parametro BN describatur parabola; in hac curva situm erit punctum E . Similiter quum sit $EM : DN :: MC = BN : NC = BM$ habebimus $EM \cdot BM = BN \cdot ND$ quae est proprietas hyperbolae inter asymptota; ergo si inter asymptota BA, BC describatur hyperbola tranfrens per punctum D , punctum E erit pariter in hac curva. Quare aliud esse non potest, quam punctum intersectionis parabolae, & hyperbolae.

6. Sed elegantior fortasse erit sequens solutio. Juncta BD describatur super ipsam semicirculus BED . In huius periferia jacebit punctum E ob angulum rectum BEC . Deinde inter asymptota BA, BC describatur hyperbolae tranfrens per punctum D . Quoniam hujus hyperbolae proprietas est, ut ubique

EA

EA = CD punctum E in hyperbola jacere debet. Ergo in intersectione hyperbolae, & circuli: igitur si ab intersectione jungatur E D, quae utriusque producatur, haec erit linea quaesita. Elegimus potius hyperbolam quam parabolam, quia hyperbola inferre solvendo problemati, tametsi angulus ABC rectus non fuerit. Imo eadem solutio valebit, etiamsi angulus BEC rectus eius non debeat, sed quilibet datus, dummodo supra DB ejusmodi segmentum constituatur, quod datum angulum capiat: Quod si AE:DC debeat esse in qualibet ratione data, docuimus Cap. 7. Num. 4. hoc pariter ab hyperbola praestari; quare hujus, & circuli intersectio solutionem problematis sufficit.

7. Problema tertium. Datum arcum in tres aequales partes dividere. Arcus datus MPN, (Fig. 4.) cujus chorda MN, divisus sit in punctis P, Q, ut chordae MP, PQ, QN inter se aequales sint. Age radios CM, CP, CQ, CN, & ex puncto P duc PZ parallelam CQ. Quoniam angulus MYP = CYR = CPQ = CMP, triangula duo CMP, MYP erunt similia; ergo MY = MP, eodem modo demonstratur NR = QN. Praeterea GM:MP::MP:PY. Triangulum CYR est simile ZPY; sed idem CYR est simile CPQ, seu CMP, seu MPY; ergo MPY est simile ZPY; ergo MP:PY::PY:YZ, igitur YZ est quarta proportionalis post CM, MP. Vocata itaque CM = a, MP = x,

erit $YZ = \frac{x^2}{a}$. Voca MN = b. Quoniam MN = RN + ZR + MY - ZY

erit aequatio $b = 3x - \frac{x^2}{a}$; ergo $a^2b - 3a^2x + a^2b = 0$.

8. Ut exemplum proponam constructionis peraequae per circulum, & ellipsim speciei datae, cujus axes sint ut $\sqrt{2}$: 1, multiplico inventam aequationem per x, ut habeam $x^4 - 3axx + a^2bx = 0$. Pono $xx = ay$, ut facta substitutione proveniat aequatio $yy - 3xx + bx = 0$, cui adda $xx - ay = 0$ multiplicatam per m, ut oriatur $yy - may + mx^2 + bx = 0$. Ut circulus habeatur po-

senda est $m = 4$, & aequatio nascetur $yy - 4ay + xx + bx = 0$. Ad ellipsim speciei datae fiat $m = 5$, & aequatio nascetur $yy - 5ay + 2xx + bx = 0$. Ut construamus

ellipsim adde $\frac{25aa}{4}$, & erit $\frac{5a - y}{2} = \frac{25aa}{4} - 2xx - bx$; dividatur per 2

$\frac{1}{2} \cdot \frac{5a - y}{2} = \frac{25aa}{8} - xx - \frac{b}{2}x = \frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} + (x + \frac{b}{4})$; ergo

$\frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} - (x + \frac{b}{4}) = \frac{5a - y}{2} :: 1:2 :: \frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} - \frac{25aa}{4} + \frac{bb}{8}$. Sum

mixae majori CA = $\sqrt{\frac{25aa}{4} + \frac{bb}{8}}$, & minore CB = $\sqrt{\frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16}}$ descri-

batur ellipsis ABDE, (Fig. 5.) abscinde CE = $\frac{5a}{4}$, duc applicatam FL,

quae = $\frac{b}{4}$. Age LQ parallelam AC, erunt LP = y, PM = x. Ut circulus

conjugatur cum ellipfi, ita difpone æquationem $a^2 - y^2 + x^2 = 4aa$

ex qua hæc oritur constructio, abscinde $FS = 2a$, cui fit normalis $RS = CQ$

age RL . Centro R radio KL describe circulum, in quo pariter LP erunt $= a$, $PM = x$. Circulus fecabit ellipfem præter punctum L ubi fit $x, y = 0$ in tribus punctis $M_1, 2M, 3M$, ex quibus si agantur ordinatæ $MP, 2M_1P, 3M_3P$, hæc sufficient noſtræ æquationis radices duas positivas, unam negativam.

9. Si velles uſurpare in constructione circulum datum, nihil faciendum est aliud, quam describere ellipfem, cujus axes ſint ad axes AD, BE , ut radius circuli dati ad RL ; cum ſemper uſurpatis proportionalibus eodem modo peragatur constructio; ordinatæ quas interfectiones præbunt non erunt quidem æquationis noſtræ radices; ſed ad has radices erunt in ratione data rectæ RL ad radium circuli dati. Cui problemati inſerviant tres radices inventæ paulo infra ostendam.

10. Verum arcum datum in tres partes ita elegantius dividemus. Sit arcus datus $MPQN$ in tres æquales partes diviſus in punctis P, Q , (*Fig. 6*) ut chordæ MP, PQ, QN æquales ſint. A punctis P, Q demittantur normales PS, QT in chordam MN . Fecit MN, ST biliarum dividantur ab eodem puncto D . Vocetur $DM = a, DS = x, SP = y$, erit $ST = PQ = MP = 2x$; ergo, quum ſit $MP^2 = MS^2 + PS^2$, erit analytice $4x^2 = aa - 2ax + xx + yy$, vel $xx + \frac{2ax}{3} + \frac{aa}{9} = \frac{4aa}{9} + \frac{yy}{3}$. Pone $x + \frac{a}{3} = z$, ut ſit $zz = \frac{4aa}{9}$.

$yy :: 1 :: \frac{4aa}{9} : \frac{4aa}{3}$, quæ æquatio eſt ad hyperbolam, cujus ſemixis primus $= \frac{2a}{3}$, ſecundus $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$, quæ ita conſtruitur divide MN in tres partes æquales MR, RA, AN . Centro A cum primo ſemixe $AR = AN = \frac{2a}{3}$, & cum ſecundo $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$ describatur hyperbola. Hujus interſectio P cum circulo dabit

MP tertiam partem arcus MN ; ex puncto P duc PQ parallelam MN , & punctum Q determinabit alias duas tertias partes PQ, QN .

11. Alio modo hæc ſolutio enunciari poteſt. Per punctum D age DB normalem MN . Foco M , vertice R , directrice DB describe hyperbolam, quæ ſecabit circulum in P ita, ut arcus MP ſit tertia pars arcus MPQ . Quod ita demoſtratur. Junge MP , duc directricem normalem PB , quam produc in Q . Ex proprietate hyperbolæ $MR:RD :: MP:PB$; ſed MR eſt dupla RD ; ergo MP dupla PB ; ſed PQ eſt etiam dupla PB ; ergo $MP = PQ$, cui etiam eſt æqualis QN . Hyperbola ita deſcripta invenietur habere centrom in A , & oppoſitum verticem in N .

12. Hyperbola ſecat circulum non ſolum in puncto P , ſed etiam in aliis duobus punctis $2P, 3P$. Quid iſtæ interfectiones indicent videndum eſt. Punctum P trifecat arcum datum MPN . Punctum $2P$ trifecat arcum coalſcèntem ex integra circumferentia, & arcu dato. Nam ductis $M_2P, 2P_2Q$ parallela MN , & $2QN$, hæc omnes ex analyſeos constructione æquales eſſe debent;

ergo arcus MP_1P , MP_2P , MP_3P aequales erunt; atque horum summam datam integram circumferentiam simul cum arcu dato MPN ; ergo singuli ex tribus arcibus sunt tertius pars circumferentiae simul; & arcus dato. Similiter punctum $3P$ inservit dividendis trifariam duabus circumferentiis simul cum arcu dato. Etenim aequales sunt chordae M_1P_1 , M_2P_2 , M_3P_3 , quarum secunda est parallela MN ; ergo arcus semicircumferentiae majores MN_1P_1 , MN_2P_2 , MN_3P_3 aequales erunt; sed isti simul sumpti dant duas circumferentias, & arcum datum MN ; ergo singuli sunt tertius pars duarum circumferentiarum & arcus dato. Ad dividendas tres circumferentias & arcum datum, inservit punctum P , quatuor circumferentias & arcum datum punctum $3P$, quinque circumferentias & arcum datum punctum $3P$; atque ita deinceps. Similiter punctum $3P$ in tres partes aequales partitur circumferentiam dempto arcu dato, punctum $3P$ duas circumferentias dempto arcu dato, punctum P tres circumferentias dempto dato arcu, atque ita deinceps. Quare apparet, constructionem ejusque constructionem inferre dividenda in tres partes aequales arcubus inservit, nimirum illis omnibus, qui terminos habent in punctis M , N , qui inservit sunt numero. Quare problema esse gradus indefiniti, aut transcendens, nisi tria puncta P , $3P$, $3P$ successive redirent eadem.

14. Facile est cogniti, puncta P , $3P$, $3P$ dividere peripheriam in tres aequales partes. Nam vocata circumferentia $= c$, & arcu dato $= a$, est $MP_1P = \frac{c+a}{3}$; sed $MP = \frac{a}{3}$; ergo $MP_1P = \frac{c+a}{3}$. Similiter $MN_1P = \frac{c+a}{3}$; sed $MaP = \frac{c+a}{3}$; ergo $MP_2P = \frac{c}{3}$; ergo etiam $MP_3P = \frac{c}{3}$. Circumferentia ergo in tres partes divisa est in punctis P ,

$3P$, $3P$. Nihil diximus de puncto N , in quo circulus, & hyperbola pariter se intersectant. Nam si ex puncto M ad N recta ducatur, tum ex N eidem parallela MN , & ex M iterum MN tres rectae coincidunt; quare licet fiat aequalitas, quum coincidunt, trisectioni arcus non inserviant.

15. Problema quartum. Datis duabus rectis ad angulos rectos se intersectantibus in C (Fig. 7), ex dato puncto A ducere lineam AEF ita, ut pars EF sit aequalis dato. Clavo recta angulo A DCB , vocetur $BC = a$, $DC = b$, $EF = c$, $BE = x$, ergo $CE = a - x$, & $AE = \sqrt{bb + xx}$. Quoniam est $AE : BE :: FE : CE$, erit analytice $\sqrt{bb + xx} : x :: c : a - x$, & quadrando

$$x^2 - 2ax + a^2 = \frac{c^2}{a^2} (bb + xx) \quad \text{factoque transitu ad aequationem invenitur}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = \frac{c^2}{a^2} (bb + xx)$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - \frac{c^2}{a^2} (bb + xx) = 0.$$

16. Ad hanc constituendam pono $xy = a^2$, & substitutio dat

$$x^2 - 2ax + a^2 - \frac{c^2}{a^2} (bb + xy) = 0, \text{ & dividendo per } xy$$

$$\frac{x^2}{xy} - \frac{2ax}{xy} + \frac{a^2}{xy} - \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{bb}{xy} + 1 \right) = 0$$

$$\frac{x}{y} - \frac{2a}{y} + \frac{a^2}{xy} - \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{bb}{xy} + 1 \right) = 0$$

$$x - 2a + \frac{a^2}{y} - \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{bb}{y} + y \right) = 0, \text{ seu } x - 2a + \frac{a^2}{y} - \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{bb}{y} + y \right) = 0, \text{ quae aequatio est}$$

Triangulum CBE est simile BDE; ergo CE:CB::BE:DB, sive analytice

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x+2a} \Rightarrow x^2 = a^2 + 2ax \Rightarrow x^2 - 2ax - a^2 = 0$$

sed propter triangulum CDB isosceles

$$CD = DB = \frac{a}{2} \Rightarrow DA + DC = AC, \text{ erit } x = \frac{a}{2}$$

ex qua prodit æquatio tertij gradus $x^3 - 2ax^2 - a^2x + a^3 = 0$.

18. Ad constituendam æquationem utar una eademque parabola in duabus positionibus constituta. Multiplico æquationem per x , novamque radicem introduco, idest $x=0$; provenit autem $x^3 - 2ax^2 - a^2x + a^3 = 0$. Pono $x - ax = ay$, & quadrando $x^2 - 2ax + a^2 = ay^2$, demptaque ex una parte $2ax$, ex altera $2ay + a^2$, eritur $x^2 - 2ax + a^2 = ay^2 + 2ay + a^2$, factaque substitutione, & divisione per $ay^2 - 2ay - a^2 = 0$. Sit $AB = a$

linea data, quæ bisariam dividatur in F (Fig. 9.), & erigatur normalis FG = $\frac{a}{2}$. Vertice G, & parametro = a , describatur parabola, quæ transibit perpendiculari A. B. Rectæ AL, LI erunt coordinatæ x, y æquationis $xy - ax = ay^2$. Rectæ AB erigatur normalis, AH = AB = a , & parallela HK = a . Punctum K cadet extra parabolam jam descriptam, Vertice K, axe KH, videmque parametro = a , describatur eadem proflus parabola, quæ transibit per punctum A, & rectæ AL, LI erunt coordinatæ x, y æquationis $yy - 2xy - ax = 0$. Parabolæ istæ duæ secantur sese in punctis 1, 2I, 3I, quare tres erunt radices æquationis, nempe AL, A2L, A3L. Prima positiva, & $> a$, secunda negativa, & aliquantum $< a$; tertia positiva pariter $< a$, omnes autem sunt

De intersectione in puncto A non loquor, quia puzhet radicem intro-

19. Videndum est sedulo, quid indicent tres radices reales. Patet ex ipsa analysi primam esse pariter triangulum ABC (Fig. 8.) in quo angulus ACB est ad CAB. 1:1:3. Ad detegendum triangulum, quod sufficit radix altera negativa aliquantum $< a$, sequamur præparationem effectam. Sit hoc triangulum ACB (Fig. 10.). Ducenda est BE \perp AC, ut triangulum ABE sit simile ACB, ut AB = BE, & angulus ACB = ABE. Deinde ducenda BD in triangulum ECB sit simile EBD, & debet autem esse EB = DC, DA = AB, igitur angulus CBE = ADB, ergo ACB = CBA = ADB = CAB, & ADB = ADB + ABD, sed ADB = ABD, ergo ACB = ADB, sed CAB = ADB + ABD = a + ADB, ergo a + ADB = CAB. Respondeo si in hac hypothese positum AC = x , restat eadem proflus æquatio. Quapropter radix negativa minor aliquantum quam a inseritur constituendo triangulum isosce-

20. Spectanda restat radix minima, sit hæc AC (Fig. 11.), in quoque triangulo isoscele ACB, ducatur BE, quæ dividat AB, & triangulum ABE sit simile ACB. Dando autem BD in, ut triangulum EBD sit simile ECB, debet esse BD = DC, & AD = AB. His positis, angulus ACB = ABE =

$ABC + CBE = CAB + BDE$; sed BDE equum sit. equalis duobus equalibus CBD , BCD erit duplus BCD , qui aequat duos aequales CAB , CBA ; adeoque est duplus CAB ; igitur ACB quintuplus CAB . Quare radix minima inseruit construendo triangulo isoscele, in quo angulus ad verticem ad alterutrum ex angulis ad basim se habeat ut 3 ad 1.

21. Quodlibet ex tribus triangulis conducit ad divisionem circuli in septem partes aequales. Etenim inscribitur circulo triangulum ACB (Fig. 12.), cuius angulus ACB sit subtriplex cujuslibet angulorum A, B , erit arcus AB septima pars circumferentiae. Inscribebatur triangulum DCE , in quo angulus DCE sit ad unum ex duobus D, E ut 3 ad 2, dimidium arcuum DC, CE erit circumferentiae pars septima. Demum inscribitur triangulum FCG habens angulum FCG quintuplum tam anguli F , quam G , quilibet ex arcibus CF, CG erit pars septima circumferentiae.

22. Hoc idem problema per circularis arcus trisectionem ope theoriae sinusum, & cotinum non ineleganter ita solvetur. Equationem $x^3 - 2ax^2 - 2x + a = 0$, ut tractationes vitentur, transmutato facta $x = 3f$, ut f sit datae a pars tertia.

Oritur aequatio $x^3 - 6fx^2 - 9ffx + 27f^3 = 0$. Ut secundus terminus arceatur pono $x = z + 2f$, & inuenio $z^3 - 21ffz - 7f^3 = 0$. Quae resoluta more Cardano, & facta divisione per a habet

$$z = \sqrt[3]{\frac{27f^3}{2} + \sqrt{\frac{27f^6}{4} - 7f^6}} + \sqrt[3]{\frac{27f^3}{2} - \sqrt{\frac{27f^6}{4} - 7f^6}}$$

ex qua nascitur

haec constructio. Radius $KM = f\sqrt{7}$ describe circulum. Sumo $KH = \frac{f}{2}$, & duc finem HI (Fig. 13.). Arcum $M1$, circumferentiam + arcum $M1$, duas circumferentias + arcum $M1$ efficta in punctis $Q_1, 2Q, 3Q$, & duc sinus $Q_1P, 2Q_2P, 3Q_3P$, erunt KP, K_2P, K_3P valores tres $\frac{x}{2}$. Abscissae $KL = \frac{f}{2}$, erunt L_1P, L_2P, L_3P valores $\frac{x}{2}$; medius negativus est, reliqui positivi.

Quae eorum dupla debent triangularum latera.

23. Problema sextum. In linea positione data CE (Fig. 14.) invenire punctum E , ad quod si ex punctis datis A, B ducantur rectae AE, BE , tum si erigatur perpendicularis RS , sinus anguli AER sit ad sinus anguli BES in ratione data. Per A agatur $FACD$ perpendicularis CE , tum producat BE in F . Angulus $AER = EAC, BES = EFC$; ergo sinus angulorum EAC, EFC debent esse in ratione data. Abscissae $FP = AE$, & duc PQ normalem AC . Sumpto pro linea toto AE , aut EP , constat EC, PQ esse sinus angulorum EAC, EFC ; ergo EC, PQ debet esse in ratione data; sed EC, PQ ; EF ; $FP = AE$; Ergo EF, EA debent esse in ratione data. Postquam in hoc conversum est problema propositum, complecti rectangulum CG . Vera $CF = x$, $FG = CE = y, AC = a$, & demissa in FC normali BD sit $CD = b, BD = c$. Similiendo triangularum dat FC, CE ; $FD:DB$, sive ana yote $x:y::b+a:xc$, sive $x^2 = by + xy$, quae est aequatio hyperbolae inter asymptota. Praeterea

FE

$FE = \sqrt{xx + yy}$, $AE = \sqrt{aa + yy}$, denominataque ratione data $m : a$, erit $xx + yy : aa + yy :: mm : aa$. Si $m = a$, & ratio data foret aequalitatis, ex ultima aequatione colligetur $x = \pm a$, quod etiam sine calculo apertum est. Si $m > a$, aequatio est ad hyperbolam; si $m < a$, est ad ellipsim. Curva autem hac simul cum hyperbola inter asymptota problematiz exhibet solutionem.

24. Constructionem perficiamus in suppositione $m > a$. Producatur ad utramque partem BD, & huic ducatur perpendicularis BH. Inter asymptota BD, BH, describatur hyperbola transiens per punctum C, erunt CE, FG coordinatae x, y primae aequationis. Abscissa $CM = CaM = m$, & hoc semiaxis

primo, altero vero $= \frac{m a}{\sqrt{m m - a a}}$, describere hyperbolam MG. In duobus punctis G, αG hyperbolae secant se, ex quibus si demittantur ad CE normales GE, $\alpha G \alpha E$, determinabuntur duo puncta E, αE , quae duplicem dant problematiz solutionem. Si fuerit $m < a$, centro E, semiaxis m , $\frac{m a}{\sqrt{a a - m m}}$ descri-

benda ellipsis, quae semper hyperbolae ramus CG in duobus punctis secabit, oppositum vero aut nusquam, aut in punctis duobus.

25. Problema septimum. Dato circulo, cujus centrum C, (Fig. 15.) datisque duobus punctis A, B, invenire punctum M, ad quod si agantur AM, BM, anguli AMC, BMC aequales sint. Agatur radius CM, tum ducatur MD faciens angulum MDC aequalem BMC, item ME faciens angulum MEC aequalem AMC. Quoniam triangula BMC, MDC similia sunt, erit BC : CM :: CM : CD; sed BC, CM sunt datae; ergo fiet data CD. Eodem modo propter similitudinem triangulorum AMC, MEC est AC : CM :: CM : CE, igitur CE data est. Supponamus $BC > AC$, erit $CD < CE$. Vocataque $CD = a$, $CE = b$. Age MF, MG parallela CA, CB, & vocata $CF = MG = y$, $MF = CG = x$. Propter aequalitatem angulorum MDC, MEC ex conditione problematiz erunt similia triangula MDF, MEG, ergo MF : DF :: MG : EG, live analytice $x : y - a :: y : x - b$, igitur $x x - b x = y y - a y$,

ergo $x x - \frac{b b}{y} + \frac{a a}{y} = y y - \frac{a a}{y}$, quae est aequatio ad hyperbolam aequilateram, cujus constructio perficietur infra.

26. Interca advertet, si $a = b$, hoc est si $BC = AC$, provenire ex extractione radicum duas aequationes, nempe $x = y$, $x - a = y$. Prima docet, punctum esse bifarium angulum ACB (Fig. 16.) duae lineae MA, MB & puncta intersectionum M, αM solum problema exhibere. Secunda docet, inveniendum esse aequales CD, CE, (Fig. 17.) quae hinc tertium proportionales post OM, seu CA, & radiam circuli tum ductosum ED secantem circulum in punctis βM , γM . Quomodo puncta haec solutum exhibeam problema videntem esse. Agatur $A_3 M$, $B_3 M$; & $A_3 M C$. Quoniam $A_3 C = C_3 M$; $C_3 M : C_3 M : CE$, angulus $A_3 M C = \frac{1}{2} M E C$. Simili modo quoniam $BC = C_3 M$; $C_3 M : M_3 P$, angulus $B_3 M C = \frac{1}{2} M D C$; atque $\frac{1}{2} M E C$ est complementum ad duos rectos angulorum MDC; ergo angulus $A_3 M C$ completus est rectus cum $B_3 M C$, quod est producti $C_3 M$ in L, angulus $A_3 M L = B_3 M C$. Item deveniunt de puncto αM . Haec animadvertit in casu maxime simpliciter ostendit, quomodo tres sectionum puncta solutum problema exhibeant.

27. Ad constructionem venio. Inventis ut supra CD, GE , (Fig. 18.) claudatur parallelogrammum END ; ejus diagonalis CN bifariam dividatur in O , ex quo puncto agantur OR, OS parallelæ CA, CB . Punctum O erit hyperbolæ centrum, OR, OS positiones diametrorum conjugatarum. Abscindantur OP, OQ æquales $\sqrt{bb - aa}$. Ex verticibus P, Q delineatur hyperbola æquilatera, quæ transibit per puncta B, N, C, D , & secabit circulum in punctis $M, 2M, 3M, 4M$. Si agantur A_1M, B_1M , angulus $A_1MC = BMC$. Idem dic de puncto $2M$. Si agantur A_3M, B_3M , angulus A_3MC complebit duos rectos cum angulo B_3MC , quod dicendum item est de puncto $4M$.

28. Problema octavum. Invenire circulum ABD (Fig. 19, 20, 21.) in quo si ab extremis punctis diametri præcipitur chordæ $BD = a, AE = c$, sit chorda $ED = b$. Antequam solutionem aggredior, modos omnes, quibus in circulo sitæ esse possunt chordæ, contemplor. Primum chordæ AE, BD sitæ sint ad eandem diametri partem, & arcus, quos subtiendunt, simul sumpti minores sint circumferentiæ dimidio, ut exhibet fig. 19. Deinde chordæ AE, BD jaceant quidem ad eandem diametri partem, sed arcus simul sumpti superent dimidium circumferentiæ, quod ostendit fig. 20. Postremo chordæ AE, BD sitæ sint ad diversas diametri partes, ut in fig. 21. In casibus omnibus agatur AI normalis DE , si opus est, producitur tum jungatur AD . In fig. 19, angulus AED complet duos rectos cum ABD , in reliquis $AED = ABD$, ergo in omnibus $AEI = ABD$, ergo triangula reëctangula ABD, AEI sunt similia, æquo erit $AB : BD :: AE : EI$. Quare vocatis $AB = p, EI = x$, erit $y : a :: c : x$, & $yx = ac$, quæ æquatio valet in omnibus casibus.

29. In omnibus figuris $AB^2 = BD^2 + AD^2$; sed in figura prima $AD^2 = AE^2 + DE^2 + 2ED, EI$, in aliis $AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2ED, EI$. Quare adhibita præcedibus analyticis fiet in prima $yy = aa + bb + 2c + 2bx$; in aliis $yy = aa + bb + cc - 2bx$. Secunda ex his æquationibus convenit cum prima, dum modo in hac spectetur x tanquam negativa. Quam autem in omnibus valet $yx = ac$, si x est negativus y quoque negativa sit, oportet. Quare si adhibeamus primam ex duabus æquationibus, x, y positivæ inservient primo casui, x, y negativæ reliquis duobus. Verum ut negativarum radicibus rectus fiat usus, quid intersit inter secundum & tertium casum, oportet considerare. In secundo quando chordæ AE, BD sitæ sunt a centro, quam alis chordæ AE, DB , erit DE minor tum AE , tum BD seu analyticè $b < a, b < c$. At in tertio chordæ DE non potest esse minor utraq; ex chordis AE, BD , sed debet esse alterutra major itaque positæ negativæ x, y , si b sit minor tum a , tum c , habebit casus secundus, si b sit major casus tertius. Verum si accidat ut inveniantur y minor una ex tribus chordis & circulus sit impossibilis, & ex solutio evadit imaginaria.

30. His notatis revocamus æquationes inventas, easque constructivas, nempe $yx = ac$, quæ est ad hyperbolam, & $yy = aa + bb + cc - 2bx$, quæ est ad parabolam. Se intersectent RS, KG (Fig. 22.) ad angulos rectos in F . Sit $ms = a, GH = c$, supra ambo sint positivæ, infra negativæ, & inter se asymptota RS, KG describatur hyperbola transiens per punctum H . Abscinda

$FK = \frac{aa+bb+cc}{ab}$, & vertice K parametro ab , describe parabolam. In

triplici puncto habet curvarum intersectio. Primum in M, quod dat $FL = x$, $LM = y$ ambas positivas, atque adeo unam solutionem ad casum primum spontaneam. Secunda intersectio in puncto P, quae, ut in pluribus periculum fecimus, dat semper diametrum PQ aliqua ex tribus chordis inoprem, quare inutilis hae est circulo describendo. Tertia in N, quae praebere potest tum secundum, tum tertium casum; dabit secundum si $b < a$, & $b < c$, secus dabit tertiam.

31. Sed earum equationum auxilio ejecta specie, inveniamus formam, in qua insit tantum y. Ex equatione prima $x = \frac{a^2c}{y}$, quo valore substitu-

tituto in secunda fit $3y = aa+bb+cc + \frac{2abc}{y}$, sive

$3y^2 - aa - bb - cc - \frac{2abc}{y} = 0$. Equationem hanc per cosinus circulares hoc modo

construamus (F. 23). Describatur circulus, cujus radius $CB = \sqrt{\frac{aa+bb+cc}{3}}$. Su-

matur $Cq = \frac{2abc}{y}$, ductoque linea qQ , arcus BQ dividatur in

tres partes aequales, & tertia eius pars sit BI . Demitto It . Cosinus Ct erit

$= \frac{2}{3}$, adeoque radius circuli requisiti. Si subtrahatur quadrans $= q$, & integra

circumferentia $= 4q$, accipiam $BKR = \frac{4q+BQ}{3}$, tum $BKAS = \frac{8q+BQ}{3}$,

Ct , Cs exhibebunt dimidia reliquarum radicum: $2q + \frac{BQ}{3} = 3H$

32. Aliquot determinationes ex constructione colligantur. Si $a=b=c$, ut tres chordae sint inter se aequales, erit $CB = a$, $Cq = c$, ergo $Bq = a$, quod dimidium unius radicum equationis est CB , & circulus descriptus radio CB ille est, qui quaeritur. Reaple tres chordae in semicirculo aequales radium singulas aequant. Ut alias radices nanciscamur, dividenda est integra circumferentia in tres partes aequales in punctis M, N ; linea autem MN normalis est AC , quare reliquarum radicum dimidia erit Cm , quae, ut notum est, aequat dimidium CB . Si radio Cm describatur circulus, tres chordae aequales omnes coincident cum diametro. Quamquam deinceps mutatur radius circuli; tamen litterae B, K, M &c. signabunt puncta analogia illis, quae supra definivimus, aut

definiamus infra. Pono unam chordam ex ca. $b=c$, fiet $CB = \sqrt{\frac{aa+cc}{3}}$,

& $Cq = a$, ergo BQ erit quadrans, & punctum Q coincidet cum K . Summam

BP tertia pars quadrantis, & Cp erit radius circuli describendi, in quo chordae a, c circumferentiam exhaustient. Ad alias radices inveniendas accipiamus

BKQ aequalis tertiae parti quinque quadrantum, hoc est $= \frac{5q}{3}$, & habebimus

$KO = KP$, & $AO = BP$; igitur $Co = Cp$. Demum sumendus arcus, qui sit tertia pars novem quadrantum, hoc est aequalis tribus quadrantibus; punctum igitur extremum circuli cadet in L , quod dat tertiam radicem nullam.

33. Si non omnes a, b, c , sint æquales, quæ abc semper sit minor

$\frac{aa+bb+cc}{3}$, erit ubique $CQ < CB$, ergo Cs erit unius radicis dimi-

dium, quod dabit radium primo casui interservientem, existente BT tertia parte arcus BQ , qui arcus BT est semper minor BP . Seca $MR = BT$, punctum R cadet inter puncta M, O . Hoc punctum præbet Cs dimidium secundæ radicis negativæ, quæ interservit aut secundo casui, si $b < a$, & $b < c$, aut tertio, si formulæ istæ locum non habeant. Demum accipe $NS = BT$, punctum S cadet inter N, L . Tertia radix est dupla Cs negativæ, sed non potest circulo describendo interservire, quia diameter aliqua chorda minor invenitur.

34. Problema novum. Datur parabola ADE , (Fig. 24.) cujus princeps parameter $AI = a$, exitataque verticis tangente AB , datoque in hac puncto B , ducere lineam BDE ita, ut, demissa ex puncto sectionis ordinatis DF, EG , intercepta $FG = s$, hoc est parametrum. Hoc problema non difficile propono, ut methodus cognoscatur, qua problemata tractentur, quæ lineas includunt dependentes a duobus punctis sectionis. Si enim in hoc assamam tanquam incognitam unam ex duabus AF, DF , quam hæc reciprocatur cum lineis AG, GE , æquario absurgit ad gradum duplo majorem, quam necesse est. Quapropter ejusmodi incognita æstimanda est, quæ eadem sit respectu utriusque puncti sectionis D, E . Producta EDB in H hujusmodi erit angulus BHA , & lineæ ab eo dependentes. Accipiamus itaque pro incognita tangentem anguli BHA , quam vocemus $= r$, posito sicuti toto $= b$. Vocemus præterea $AB = b$, $AE = x$; ergo ex natura parabole $DF = \frac{b^2}{2x}$ quædam taliter expressa.

35. His positis manifestum est, fore $AE : AF :: AB : AH$, ergo

$HF = \frac{ab}{x} + x$; atqui $s : r :: HF : DE$, seu $s : r :: \frac{ab}{x} + x : \frac{b^2}{2x}$, ergo $2s + 2rx = \frac{ab}{x} + x$

& quadrando $s^2 + 2srx + r^2x^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + 2ab + x^2$, sive $x^3 + \frac{2srx^2}{2} - \frac{a^2b^2}{x} - 2ab - x^2 = 0$

Ad inveniendum duplicem valorem x , formulam ita dispono

$x^3 + \frac{2srx^2}{2} - \frac{a^2b^2}{x} - 2ab - x^2 = 0$

$x^3 + \frac{2srx^2}{2} - \frac{a^2b^2}{x} - 2ab - x^2 = 0$

$x = \frac{a^2b^2}{2s} - \frac{ab}{s} + \frac{s}{4} \sqrt{\frac{a^2b^2}{s^2} - \frac{ab}{s}}$. Duplex valor x dat duas AF, AG ;

signum superius $+$ denotat majorem AG , signum inferius $-$ denotat minorem AF ; ergo differentia duorum valorum nempe $\frac{2a^2b^2}{s} - \frac{2ab}{s}$ denotat interceptum FG ; quæ ex conditione problematis debet $= s$; ergo nascitur æquatio

$\frac{2a^2b^2}{s} - \frac{2ab}{s} = s$, sive $\frac{2a^2b^2}{s} - \frac{2ab}{s} - s = 0$, sive $2a^2b^2 - 2ab - s^2 = 0$

$2a^2b^2 - 2ab - s^2 = 0$, sive $2a^2b^2 - 2ab - s^2 = 0$

36. Ut ad constructionem perveniamus, ponamus $rs = ax$, atque hæc est parabola ipsa data, si in axe sumamus abscissas x , ejusque ordinatæ sint

r . Peracta substitutione $a^2x^2 + 4a^2bx - a^4 = 0$, vel $x^2 + 4bx - aa = 0$.

Huic addamus æquationem primam, ut sit $x^2 - ax + rs + 4bx = aa$, five

$$x - \frac{a}{2} + r + 2b = \frac{5a^2}{4} + 4bb, \text{ quæ est ad circulum, cujus radius}$$

$$= \sqrt{\frac{5a^2}{4} + 4bb}. \text{ Hanc constructionem analysis suppeditat. Sumpta AK du}$$

pla AB, eique normali $KL = \frac{a}{2}$, centro L, radio $= \sqrt{\frac{5a^2}{4} + 4bb}$ de-

scribe circulum, qui secabit parabolam in punctis M, 2M, ex quibus ad AB productam duc normales MN, 2MN. Ex punctis N, 2N age NI, 2NI, quibus sint parallelæ BDE, B2D2E, istæ erunt lineæ a problemate requisitæ. Quamquam hoc est problema quarti gradus, tamen hæc constructio certat eum constructionibus æquationum secundi gradus; nam quum data sit parabola, per solas rectas, & circulos perficitur. Quod pro virili parte curandum est, quor- ties sectio aliqua conica data supponitur.



LIBER TERTIUS

DE LOCIS TERTII, ET SUPERIORUM GRADUM
ET DE ÆQUATIONIBUS EXCEDENTIBUS GRADUM QUARTUM.

CAPUT PRIMUM.

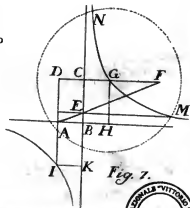
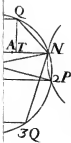
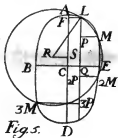
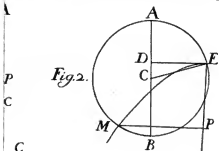
De formatione æquationum.

Quoniam ad resolutionem, & constructionem accedimus earum æquationum, quæ superant gradum quartum, monemus statim oportet, methodos plerisque ab auctoribus inventas non ita late patere, quemadmodum in æquationibus gradus inferioribus. Ingenium nihilominus, & fortiam suspiciemus, qua methodi amplificatae sunt; & remedia exhibita ad earum defectum supplendum. Ab æquationum formatione initium ducamus.

1. Ut res a suis principiis ducatur, necesse est meminisse eorum, quæ de æquationibus generatim docuimus in libro primo, nimirum æquationem nihil aliud esse, quam productum, cuius unus, aut plures factores $= 0$, aut potius in quo factus singuli esse possunt $= 0$, & æquationum radices esse eorundem factorum terminos secundos affectos signo contrario. Tot autem sunt, & factores, & radices, quot dimensiones maximæ potestatis incognitæ. Quod quamquam constet ex iis, quæ diximus de æquationibus primi, secundi, tertii, & quarti gradus; tamen, ut res universalius probetur, & ut detegantur methodi determinandi radices, ab analysi scriptoribus problema inversum spectatum est, nimirum quænam resultet æquatio, si ejus radices supponuntur esse datæ quantitates; quod problema directo multo est facilius. Quærat causa exempli, quænam sit æquatio, in qua valor x potest æque esse aut 2, aut 3, aut 5. Formetur tres factores simplices $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$, & eorum productum fiat $= 0$. Nascetur æquatio $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$. Quando hæc exprimi quoque potest hoc modo $x - 2$, $x - 3$, $x - 5 = 0$, perspicuum est, eam veram esse vel $x - 2 = 0$, vel $x - 3 = 0$, vel $x - 5 = 0$, quia si multiplicator unus $= 0$, totum productum $= 0$; ergo æque valere potest $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$, quæ sunt æquationis radices. Quare radix æquationis invenietur, si habeatur binomium per quod exacte dividi possit; est enim secundus terminus binomii mutato signo. Præterea si pro x scribas aut 2, aut 3, aut 5, æquatio nulloset. Itaque si habes quantitatem, quæ substituta pro x , reddat formulam nullam, habebis æquationis radicem.

2. Sed ad opportuna consecutaria deducenda, rem generalius pertractemus. Radices æquationis sint a , b , c , d , e . Efforma binomia $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, $x - e$, eademque simul multiplica, ut obtineas

$$x^5 - a.$$





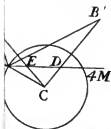
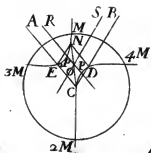
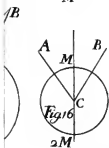
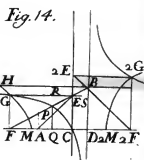
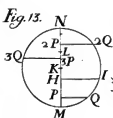
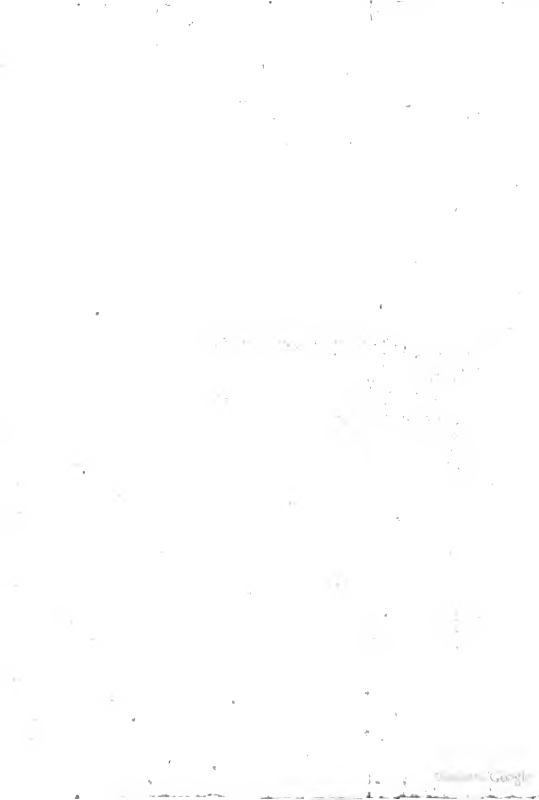


Fig. 18.





$$\begin{array}{r}
 x^5 - a.x^4 + ab.x^3 - abc.x^2 + abcd.x - abcde = 0 \\
 -b \quad +ac \quad -abd \quad +abce \\
 -c \quad +ad \quad -abe \quad +abde \\
 -d \quad +ae \quad -acd \quad +acde \\
 -e \quad +bc \quad -ace \quad +bcde \\
 +bd \quad -ade \\
 +be \quad -bcd \\
 +cd \quad -bce \\
 +ce \quad -bde \\
 +de \quad -cde
 \end{array}$$

æquationem, in qua x potest singulos hos valores obtinere a, b, c, d, e . Ex hac sequentes proprietates deducantur. Primus terminus nihil est, nisi incognita elevata ad potestatem expressam a radicem numero; unde sequitur tot esse radices, quot sunt unitates componentes maximum exponentis incognitæ. Secundus terminus continet incognitam elevatam ad potestatem unitate minorem, habetque pro coefficiente omnes secundos terminos factorum simul sumptos, sive summam omnium radicem mutato signo. In tertio termino exponens item unitate minuitur, ejusque coefficientis est summa productorum, quæ fiunt ex binis secundis terminis factorum, seu ex binis radicibus. In quarto potestas incognitæ gradatim minuitur, & coefficientis est aggregatum factorum, quæ coalescunt ex ternis secundis terminis factorum, sive mutato signo ex ternis radicibus, atque ita deinceps usque ad ultimum terminum, qui est productum ex omnibus secundis terminis factorum, sive radicem, si harum signa mutantur. In tertio, quinto, ceterisque terminis imparibus non est necesse mutare signa radicum, quia quum numerus earum, quæ in sese ducuntur, par sit, vel mutantur, vel eadem retineatur signum, factum idem, eodamque signo affectum exurget. Proprietates istæ maxime secundæ sunt, & faciem præterunt in multis inquisitionibus.

3. Ut harum proprietatum fiat usus, necesse est ordinare æquationem respectu incognitæ, ita ut terminus primus habeat pro coefficiente solam unitatem, & reliqui gradatim collocentur omnes ad unam æquationis partem. Si aliquis terminus desit, non est omittendus, sed numerandus facto coefficiente $= 0$. Si secundus terminus desit, oportet ut secundi termini factorum, sive radices omnes simul sumptæ propter contrarietatem signorum sese destruant, & fiant $= 0$. Si ultimus terminus desit, una ex radicibus, aut ex secundis terminis factorum erit $= 0$. Renatus Cartesius regulam deducit ab expositis proprietatibus, per quam cognoscitur, quotnam sint in æquatione positivæ radices, quot negativæ. Nam tot sunt radices positivæ, quot in terminis, qui consequuntur, adsunt mutationes signorum $+in-$, aut $-in+$. Tot sunt radices negativæ, quot vicibus signum idem in duobus successivis terminis reperitur.

Ita in æquatione $x^2 + 3x - 4 = 0$, quia una est successio signorum, & una mutatio, una erit radix negativa, nempe $x = -4$, una positiva hoc est $x = 1$. Hæc regula apprimè cum veritate consentit, si reales fuerint omnes æquationis radices. Verum si sint aliquæ imaginarie, fallax est, & nullius usus. Propo-

simus exemplum. In æquatione $x^2 - 3x + 7 = 0$ ex permutatione signorum colligere oporteret, duas esse radices positivas. Multiplico per $x + 3$, & radix

H h 2

quæ

quæ additur, est negativa. Provenit æquatio $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, in qua, quum nunquam signum mutetur, radices omnes debeant esse negativæ. Itaque quoties adfunt radices imaginariæ, deficit regula cartesiana; utrum autem adfint necne, plerumque nobis ignotum est.

4. Iam vero supponamus, æquationis radices omnes æquales esse, & singulos factores $= x + a$, existente eorum numero $= m$. Facile est cognitu, primum terminum $= x^m$; secundum terminum $= x^{m-1}$ multiplicatum per ma , quia factorum secundi termini omnes $= a$, & eorum numerus $= m$; tertium terminum esse x^{m-2} multiplicatum per aa toties sumptum, quot rectangula ab, ac, ad &c. componi possunt ex quantitativibus a, b, c, d &c. quarum numerus est m , quia termini secundi factorum omnes $= a$; quartum terminum esse x^{m-3} , & quæque coefficientes a^3 toties accipiendum, quot producta potest præbere numerus m quantitatum, si ternæ inter sese multiplicentur; atque ita de terminis aliis. Questio igitur ad hoc redacta est, ut cognoscamus, quot combinationes fieri possunt ex numero m quantitatum, si binæ, si ternæ, si quaternæ accipiuntur, atque ita deinceps. Nam supponentes numeros harum combinationum exprimi per $A, B,$

C, D &c., habebimus potestatis $x + a$ questum valorem esse

$$x^m + m a x^{m-1} + A a^2 x^{m-2} + B a^3 x^{m-3} + C a^4 x^{m-4} + D a^5 x^{m-5} \text{ \&c.}$$

5. Ad inveniendum quot combinationes, seu producta ab, ac, ad &c. sufficiat numerus m litterarum a, b, c &c., si binæ sumantur, advertamus, formatis omnibus productis, numerum litterarum, quæ in ipsis scriptæ sunt, duplum esse numeri productorum. Advertamus deinde, quamlibet ex litteris a, b, c eisdem vicibus repeti, & quum per alias omnes litteras debeat multiplicari, non per se ipsam, non posse repeti nisi vicibus $m - 1$; igitur numerus litterarum scribendarum ad formanda producta erit $= m \cdot m - 1$; sed numerus litterarum duplus est numeri productorum; ergo productorum numerus erit $= \frac{m \cdot m - 1}{2}$; atque hic est valor A , sive coefficientis tertii termini formulæ questæ.

6. Quod spectat ad coefficientes termini quarti, id est ad numerum productorum abc, abd, abc &c., si litteræ ternæ sumantur, manifestum est, numerum hunc esse tertiam partem numeri litterarum, quæ scriptæ reperiuntur, formatis productis omnibus. Observemus præterea, singulas litteras iisdem vicibus repeti, & harum vicium numerum eum esse, qui exprimit quot producta præbeant omnes alie litteræ, illa una excepta, si binatim sumantur. Etenim patet, quamlibet litteram ex ca. a conjungendam esse cum productis omnibus bc, bd, cd &c. binarum aliarum litterarum. Numerus igitur vicium, quo repetitur quilibet ex litteris a, b, c, d &c. idem est ac numerus productorum, quæ præbeantur a litteris numero $m - 1$ binatim acceptis; atqui constat, productorum numerum esse $= \frac{m-1 \cdot m-2}{2}$; ergo hic quoque est numerus, quo quilibet littera repetitur; igitur quum numerus litterarum sit $= m$; numerus litterarum scriptarum $= \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2}$; ergo numerus productorum, quæ dant litteræ ternatim

tim sumptis, quando hujus est pars tertia, erit $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3}$. Atque hic est valor B, seu coefficientis termini quarti.

7. Coefficientis quinti termini C, idest numerus productorum, quæ quater-
næ literæ efficiunt, similiter invenietur $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Nam nu-
merus iste debet esse pars quarta litterarum scriptarum in hisce productis, &
quælibet litera iisdem vicibus repetitur, & conjungitur cum omnibus productis
trium litterarum, quarum numerus $= m-1$. Patet enim, horum productorum
numerum esse $\frac{m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3}$; igitur quum literæ sint numero m , producta qua-
ternarum erunt numero $\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Eadem methodo coefficientia
reliquorum terminorum invenies, progressu satis manifesto.

8. Quæ quum ita sint valor binomii $x+a$ elati ad potestatem m detegi-
tur $x^m + m a x^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$
 $+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^{m-4} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 x^{m-5}$

&c. Si habetur binomium $x-a$, eadem formula valet, dummodo a specta-
retur tamquam negativa; quare signa mutanda essent in illis terminis, ubi a
dimensionem obtinet imparem, hoc est in secundo, quarto, ceterisque terminis
paribus.

9. His explicatis nihil facilius est, quam uti præcedente formula ad ele-
vandam binomium ad potestatem datam. Namque in valore $x+a$ substituen-
dus erit pro x primus binomii terminus, pro a secundus, pro m potestas datæ.
Elevandum sit binomium $3ec-2bd$ ad potestatem quintam. Pone $3ec = x$,

$$-2bd = a, 5 = m, \text{ \& invenies } x^m = 3ec^5 = 143ec^5,$$

$$m a x^{m-1} = 5 \cdot (-2bd) \cdot 3ec^4 = -810bd^4ec^4$$

$$\frac{m \cdot m-1}{2} \cdot a^2 x^{m-2} = 10 \cdot 4b^2d^2 \cdot 3ec^3 = 1080b^2d^2ec^3$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} \cdot a^3 x^{m-3} = 10 \cdot (-2bd^3) \cdot 3ec^2 = -720b^3d^3ec^2$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^4 x^{m-4} = 5 \cdot (-2bd^4) \cdot 3ec = 140b^4d^4ec$$

$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot a^5 x^{m-5} = 1 \cdot (-2bd^5) \cdot 3ec = -32bd^5ec$$

Termini isti succedunt, & præbent potestatem quaesitam; nam reliqui, qui con-
sequuntur, quum habeant in coefficiente factorem $m-5=0$, omnino nullificent.

Itaque si inventos terminos in summam colligas, habebis $3ec^5 - 2bd^5$.

10. Formula inventa, quæ tamquam canonica spectari debet, utilitatem habet in elevandis ad potestatem datam polynomii. Incipiamus a trinomio. Fiat x æqualis primo trinomio termino, & a reliquorum duorum summæ. Facta substitutione sese offerunt sola binomia ad datas potestates elevanda, quæ ex formula canonica tractantur. Si habeatur quadrinomial; posito x æquali primo quadrinomiali termino, & a reliquis terminis, factaque substitutione sese offerent solum trinomia ad datam potestates elevanda. Ita elevatio polynomii cujuslibet ad potestatem datam reducetur ad polynomium simplicius, quod elevandum erit ad datas potestates.

11. Afferamus exemplum in trinomio $e + 2b - c$ elevando ad potestatem quartam. Erit $m = 4$, $x = e$, $a = 2b - c$. Qui valores substituti in formula

canonica dant, $x^m = e^4$; $ma x^{m-1} = 4 \cdot 2b - c \cdot e^3 = 8be^3 - 4ce^3$

$$\frac{m \cdot m - 1}{2} a^2 x^{m-2} = \frac{2 \cdot 1}{2} (2b - c)^2 \cdot e^2 = 24b^2e^2 - 24bce^2 + 4c^2e^2;$$

$$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3} (2b - c)^3 \cdot e = 32b^3e - 48b^2ce + 24bc^2e - 4c^3e$$

$$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^{m-4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} (2b - c)^4 = 16b^4 - 32b^3c + 24b^2c^2 - 8bc^3 + c^4.$$

Quare his terminis collectis habebis potestatem quæsitam.

12. Quoniam radices omnes exprimi possunt per potestates fractas, & fractiones per potestates negativas, quia $\sqrt[n]{\frac{x}{x+a}} = \frac{x^{\frac{r}{n}}}{x+a}$, & $\frac{1}{x+a} = x^{-1} + a^{-1}$, videtur nostra formula canonica sese extendere ad extractionem radicem, & ad evolendas fractiones in series, si in ipsa pro m substituatur in primo casu $\frac{r}{n}$, in secundo $-r$. Sed quoniam modus hic probandi per inductionem nonnullis minus placeat, danda est opera, ut demonstremus, valere formulam canonicam etiam in exponentibus fractis, & negativis. Primum quoad numeros fractos, ajo, veram esse æquationem A (Tab. 1), in qua nostra formula continetur.

Si æquationem A divides per $x^{\frac{r}{n}}$, & ponas $\frac{a}{x} = z$, proveniet æquatio B, cujus veritas probanda est. Ad quod præstandum sufficit ostendere, eandem quantitatem oriri, si æquationis B pars utraque elevetur ad integram potestatem n , seu posita æquatione C veram esse æquationem D. Quando r , n sunt numeri integri elevetur ex formula canonica duo binomia ad suas potestates, & proveniet æquatio E, cujus veritas est, patefacienda. Hanc ob rem ex valore s inveniendi sunt s^2, s^3, s^4 &c., tum multiplicanda s per n, s^2 per $\frac{n \cdot n - 1}{2}, s^3$ per $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3}$ atque ita de aliis, ut habeantur valores omnium terminorum componentium æquationis E partem alteram. Valores isti inventi, & alii aliis opportune suppositi æquationem F sufficient. Si fiat autem termi-

terminorum reductio in secunda æquationis parte, provenit æquatio G, quæ eadem est ac æquatio E. Igitur æquatio B, atque adeo æquatio A probata remanet. Itaque formula canonica rite applicatur omnibus potestatibus positivis vel integræ sint, vel fractæ.

13. Accedens ad exponentes negativos ajo, valere æquationem A (Tab. 2), vel r sit numerus integer, vel fractus. Si hanc æquationem divides per x^{-r} , tum ponas $\frac{a}{x} = z$, invenies æquationem B. Quum autem $1+z = \frac{1}{1+z}$,

æquatio C eadem erit ac, B. Evolvatur binomium $1+z$ per formulam canonicam, & orietur æquatio D; quæ apprimè cum veritate consentiet, si denominator primæ partis cum parte altera multiplicatus exhibeat unitatem. Facta autem hac multiplicatione provenit formula E, in qua, si reductio fiat, nihil aliud remanet nisi unitas, ceteris terminis lese ex contrarietate ygnorum destruentibus. Quamobrem satis demonstratum est, formulam canonicam ubique valere quæcumque sint exponentes integri vel fracti, positivi vel negativi. Demonstrandum quidem superest eandem formulam valere, si exponentes sint numeri irrationales; sed hoc præstare non licet sine calculi integralis auxilio. Hac autem est celeberrima formula newtoniana, per quam & potestates obtinentur, & radices fractionelque nullo negotio in series convertantur. Ad hanc vero probandam usi sumus methode Clairaut viri doctissimi, quæ nobis maxime viam est elegans, & exacta.

CAPUT SECUNDUM.

De transformatione æquationum, & earumdem reductione per factores racionales.

1. Quoniam methodi transformandæ æquationis cujuslibet gradus eadem sunt ac illæ, quæ Cæpi 8. lib. 2. tradidimus ad transformandas æquationes tertii, & quarti gradus, ideo eorundem hic paucis attingam ostendens, quomodo, & ad quem usum superioribus æquationibus applicari possunt. Transformantur æquationes ævæ, vel minutis earum radicibus quantitatibus data. Hoc præstabitur si ponas $x = y + m$; per hanc enim substitutionem augeb x , si m sit negativa, minues, sit sit positiva. Ufus præcipuus hujus transformationis in eo politus est, ut arceatur ab æquatione secundus terminus, opportune determinata quantitate m , quæ quantitas debet esse æqualis coefficienti secundi termini diviso per exponentem primi signo mutato. Hoc autem ita generatim ostendo. Sit

æquatio $x^n + ax^{n-1} + \&c. = 0$. Pone $x = y + m$, factaque substitutione invenies

$$y^n + mny^{n-1} + m \cdot \frac{n \cdot n-1}{2} y^{n-2} + \&c. = 0.$$

Ut deleatur secundus, sit oportet

$$+ ay^{n-1} + m \cdot n-1 \cdot a \cdot y^{n-2} + \&c.$$

tet

per $mx + n = 0$, five $m = -\frac{n}{x}$. Q. E. D.

2. Per hanc transformationem licet etiam removere ab æquatione tertium, quartum, quintum &c. terminum, resolvendo æquationem secundi, tertii, quarti &c. gradus. Verum ad removendum quartum, sextum, ceterisque terminos in sedibus paribus collocatos, obtinebis semper valorem realem m , quia m data est in æquatione gradus imparis, que semper prædita est saltem una radice reali. At in tertio, quinto, ceterisque terminis imparibus, m data erit in æquatione pari, que aliquando nullam habebit radicem realem, sed omnes imaginarias. Ad tollendum terminum ultimum, necesse est resolvere æquationem ejusdem gradus, imo eandem cum proposita. Intervit etiam hæc transformatio ad obtinendum, ut terminus dato coefficienti afficiatur. Facta enim substitutione satis erit, ponere coefficientem dati termini æquale datæ quantitatis, & per resolutionem æquationis, que oritur, valorem m determinare.

3. Transformatur æquatio, si alia inveniat, si alia inveniat, cujus radices ad radices propositæ sint in data ratione. Hoc obtinetur per substitutionem $x = \frac{my}{n}$. Præcipuus usus hujus transformationis elucet in eliminandis fractionibus ab æquatione. Quoniam usus iste maximi momenti est, uno aut altero exemplo videtur illustrandus. Sit æquatio $x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} = 0$. Pono $x = \frac{my}{n}$:

ergo $\frac{m^5}{n^5}y^5 - \frac{m^4}{2n^4}y^4 + \frac{m}{3n}y - \frac{1}{4} = 0$; five facta multiplicatione per n^5 , &

divisione per m^5 , $y^5 - \frac{n}{2m}y^4 + \frac{n^4}{3m^4}y - \frac{n^5}{4m^5} = 0$. Ut æquatio omni fractione

liberetur, oportet ut n sit divisibilis per $2m, 3m, 4m$, quod obtinebis, si ponas

$n = 12m$; proveniet enim $y^5 - \frac{12m}{2m}y^4 + \frac{12^4 m^4}{3 \cdot m^4}y - \frac{12^5 \cdot m^5}{4 \cdot m^5} = 0$, five

$y^5 - 6y^4 + 4 \cdot 12^3 y - 3 \cdot 12^4 = 0$, que omnium fractionum est expers. Ex hoc exemplo patet nihil referre, quicumque fuerit valor m ; quare expeditioris calculi causa præstabit ponere $m = 1$.

4. Exemplum alterum sufficiat æquatio tertii gradus

$x^3 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{d}x + \frac{e}{f} = 0$, Pono $x = \frac{ny}{m}$, ut fiat

$\frac{1}{m^3}y^3 + \frac{a}{n^2 b}y^2 + \frac{c}{nd}y + \frac{e}{f} = 0$, five multiplicando per n^3

$y^3 + \frac{na}{b}y^2 + \frac{n^2 c}{d}y + \frac{n^3 e}{f} = 0$. Ut removeantur fractiones necesse est, ut n sit divisibilis per b, d, f . Erit autem semper, si ponas $n = bdf$. Nam orietur $y^3 + adfy^2 + b^2 f^2 dcy + b^3 d^2 f^2 e = 0$, in qua nulla est fractio.

5. Potes

$$A \quad \frac{r}{x+d} = \frac{r}{x} + \frac{r}{n} x^{\frac{r}{n}-1} + \frac{r}{n} \frac{r}{n} x^{\frac{r}{n}-2} + \dots$$

$$B \quad \frac{r}{1+z} = 1 + \frac{r}{n} z + \frac{r}{n} \frac{r}{n} z^2 + \frac{r}{n} \frac{r}{n} \frac{r}{n} z^3 + \dots$$

$$C \quad s = \frac{r}{n} z + \frac{r}{n} \frac{r}{n} z^2 + \frac{r}{n} \frac{r}{n} \frac{r}{n} z^3 + \dots$$

$$D \quad \frac{r}{1+z} = \frac{r}{1+s}$$

$$E \quad 1 + rz + \frac{r \cdot r - 1}{2} z^2 + \frac{r \cdot r - 1 \cdot r - 2}{2 \cdot 3} z^3 + \frac{r \cdot r - 1 \cdot r - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 + \dots$$

$$F \quad \left(\begin{array}{l} 1 \\ + ns \\ + \frac{n \cdot n - 1}{2} s^2 \\ + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} s^3 \\ + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} s^4 \\ + \&c. \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} 1 \\ + n \cdot \frac{r}{n} z + n \cdot \frac{r}{n} \frac{r}{n} z^2 \\ + \frac{n \cdot n - 1}{2} z^3 \\ + \dots \end{array} \right)$$

$$G \quad 1 + ns + \frac{n \cdot n - 1}{2} s^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} s^3 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} s^4 + \dots$$

5. Potes per hanc transformationem obtinere, ut æquationis terminus datus dato afficiatur coefficiente, quod non $= 0$ ponendum est. Nam facta substitutione $x = \frac{y}{n}$, eliminatisque divisoribus, pone coefficientes dati termini æquale

datis quantitati, & resoluta æquatione determina valorem n . Sed si resolvenda sit æquatio gradus parisi, aliquando valor n provenit imaginarius, & operatio turbabitur. Ad exemplum unicum propono æquationem

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$. Facta substitutione, $x = \frac{y}{n}$, eliminatisque divisoribus, oritur $y^4 + 2ny^3 - 3n^2y^2 + 2n^3y + n^4 = 0$. Si velis secundum terminum habere coefficientes $= 1$, pone $2n = 1$, & $n = \frac{1}{2}$, & rem coefficientes. Si velis tertii termini coefficientes $= -2$, fac $3n^2 = 2$, & $n = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. At si optares, ut coefficientes ejusdem termini esset $= 2$, tum invenires $n = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}}$, qui valor est imaginarius, & imaginariis æquationem repletet. Idem dic de terminis aliis.

6. Transformatio æquationis in aliam, cujus radices sint reciprocae, convertit primos æquationis terminos in ultimos, & viceversa. Quare si æquatio careat penultimo termino in aliam transmutabitur, quæ carebit secundo. Substitutio adhibenda est $x = \frac{A}{y}$, in qua A prohibito potest determinari. Sit æquatio

$x^7 - 3x^6 + 2x^2 - 2 = 0$. Utas substitutione invenies

$\frac{A^7}{y^7} - \frac{3A^6}{y^6} + \frac{2A^2}{y^2} - 2 = 0$. Multiplica per y^7 , divide per 2, & inverso terminorum ordine, omnia signa in contraria converte, ut nasciscaris

$\frac{y^7}{2} - \frac{A^2y^5}{2} + \frac{3A^6y}{2} - \frac{A^7}{2} = 0$, quæ caret secundo termino, quum proposita caret penultimo. Hæc a fractionibus libera erit, si A accipiatur numerus par, qui sit divisibilis per 2.

7. Omnes istæ transformationes utilitatem habent in reductione æquationum. Nam sæpe æquatio, cujus redactio difficultatem habet maximam, & laborem poscit improbum, si opportune transformetur, negotio facili reducitur. Reduci æquationes dicimus, quum resolvuntur in duas, aut plures gradus inferioris. Ita reducetur æquatio $x^4 + a + b \cdot x^3 + a b x^2 + a - b \cdot x - c = 0$, si resolvatur in duas secundi gradus nempe $x^2 + ax - cc = 0$, $x^2 + bx + cc = 0$. Constat autem æquationem semper esse divisibilem per singulas earum, in quas resolvitur. Sed quoniam redactio æquationum & maximi momenti est, & maximæ difficultatis, methodi aperientur sunt, quibus, quam fieri potest, voti compotes efficiamur. Ac primum loquamur de reductione per factores simplices racionales.

8. Ad hanc rem meminisse oportet, ultimum terminum æquationis esse productum ex secundis terminis omnium factorum simplicium ex quibus, æquatio

tio componitur. Quare si æquatio divisorem habet linearem, hic constabit ex incognita addito, demptove divisore aliquo ultimi termini. Quapropter si omnes divisores rationales ultimi termini inveniantur, & tantetur æquationis divisio per incognitam additis, demptive hisce divisoribus, palam fiet, utrum æquatio habeat, nec ne divisorem simplicem, adeoque radicem rationalem, ac propterea hac ratione resolvi possit. Ad exemplum ponatur æquatio $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$. Video, ultimum terminum alios divisores rationales habere non posse præter 1, 3, quibus tam signum +, quam - est præfigendum. Per quatuor itaque factores tentari potest divisio $x - 1$, $x - 3$, $x + 1$, $x + 3$. Per duos ultimos frustra tentatur divisio; per duos primos divisio completur, & utraque divisione facta remanet $x - 1$; ergo æquatio coalescit ex tribus factoribus $x - 3$, $x - 1$, $x - 1$, & tres habet radices rationales $x = 3$, $x = 1$, $x = 1$, quarum duæ sunt æquales. Verumtamen si nullus sit factor simplex, qui constet ex incognita addito, demptove aliquo rationali divisore ultimi termini, evidens est, æquationem nulla præditam esse radice commensurabili. Adverte, quo expeditior fiat methodus, æquationem fore divisibilem per factorem linearem, quoties hujus secundus terminus mutato signo pro incognita substituitur, præbet terminus omnes ex contrarietate signorum sese elidentes.

9. Adversus hanc methodum sese offert difficultas, quæ primo intuitu videtur n. x. m. Si æquationis radix, seu secundus factoris terminus non sit numerus integer, sed fractus, qua ratione tentando inveniri poterit, quum ultimus terminus per infinitas fractiones dividi possit. Sed hanc difficultatem tollemus, si demonstremus, in æquatione, in qua nulla sit fractio, non posse valorem incognitæ esse fractionem. Hoc ostendam in æquatione secundi gradus, ex qua progrediar ad superiores. Sit æquatio $ax^2 + bx + c = 0$ in qua a, b non sint fracti.

Si fieri potest valor x sit fractio $\frac{m}{n}$; ergo facta substitutione habebimus

$$\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} + b = 0; \text{ ergo } \frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} = -b; \text{ igitur } \frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n}, \text{ sive } \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} + a$$

debet esse numerus integer; ergo $\frac{m}{n} + a$ aut debet esse n , aut multipla n . Sit

$$fn; \text{ ergo } \frac{m}{n} = fn - a; \text{ sed hic est numerus integer; ergo } \frac{m}{n} \text{ est integer, quod}$$

est contra hypothesein. Simili modo in æquatione tertii gradus

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \text{ ubi nulla est fractio, sit } x = \frac{m}{n}; \text{ ergo}$$

$$\frac{m^3}{n^3} + \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n} = -c; \text{ igitur } \frac{m^3}{n^3} + \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n}, \text{ seu } \frac{m}{n} \cdot \frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} + b$$

est numerus integer; ergo necessario $\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} + b$ erit multipla n . Sit fn ; ergo

$$\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} = fn - b; \text{ ergo } \frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n}, \text{ sive } \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} + a \text{ est numerus integer;}$$

igi-

igitur $\frac{m}{n} + a$ multipla n . Sit gn ; ergo $\frac{m}{n} = gn - a$; igitur $\frac{m}{n}$ est numerus integer contra hypothesim. Quisque videt, progressum hunc demonstrandi eodem modo extendi ad æquationes quarti, quinti, & superioris gradus. Constat igitur radicem æquationis, in qua nulla sit fractio, fractionem esse non posse. Quæ quum ita sint, hoc unice evincit difficultas, difficile esse invenire factores rationales æquationum, in quibus continentur fractiones. Verum istæ per methodos paulo ante traditas transformantur in æquationes omni fractione carentes. Ad rem nostram redeamus.

10. Si divisores ultimi termini pauci fuerint, haud ægre analytici calculos aggrediatur. Sed si plures fuerint, ut aliquando contingit, multiplicium calculorum labor adeo improbus, ac molestus evadit, ut quilibet analystam valeat deterrere. Quare danda est opera, ut methodi pateant, quibus inutiles cognoscantur, & calculi solum in quæsumtis instituantur. Si formula A, cujus incognita est x , habeat factorem linearem $x + a$, advertendum est, facta $x = b$, numerum, in quem æquatio A convertitur, fore divisibilem per $b + a$. Ita

formula $x^4 - x^3 + x - 10$, quæ habet factorem simplicem $x + 1$, si ponatur $x = 3$, ut evadat 65, erit divisibilis per $3 + 1 = 4$, quod cum veritate consentit. Ex hac annotatione colligitur, in æquatione habente pro factore $x + a$, si fiat $x = 0$, debere esse a divisorem ultimi termini, quod supra monuimus; si fiat $x = 1$, numerum in quem mutatur æquatio habere divisorum $1 + a$; demum si fiat $x = -1$, numerum, qui resultat, habere divisorem $-1 + a$. Quandoquidem numeri $1 + a$, a , $-1 + a$, ita sunt affecti, ut primus secundum, secundus tertium unitate superet, proclive est cognitu, nullum ex divisoribus, quos præbet suppositio $x = 0$, posse esse quæritum numerum x , nisi aliquis ex divisoribus, quos sufficit suppositio $x = 1$, superet a unitate, & nisi aliquis ex illis, quos dat suppositio $x = -1$, sit minor a unitate. Si hoc criterium adhibeas, multas divisiones inutiles effugies, dum inquiris radices commensurabiles. Si inter divisores ultimi termini, seu qui oriuntur ex suppositione $x = 0$, plures fuerint, qui hæc conditionibus præditi sint, pone $x = 2$, & observa, qui nam divisores orti ex hac suppositione excedant unitate illos, qui oriuntur ex suppositione $x = 1$; qui enim hanc conditionem non habeant, sunt excludendi. Ceterum memoria retinendum, singulis divisoribus præfigi posse non minus signum $+$, quam $-$.

11. Ut theoria hæc usu fiat familiaris, aliquot exemplis illustranda est.

Inquirere radices commensurabiles æquationis $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$. Inci-

A	B	C	D	E
2	20		1	11
1	8	1, 2, 4, 8	4	-2
0	6	1, 2, 3, 6	3	-3
-1	16	1, 2, 4, 8, 16	2	-4
-2	16			

pio a suppositionibus, quas scribo in columna A, & pono $x = 0$, formula fit 6; in suppositione $x = 1$, formula fit 8, in suppositione $x = -1$, fit 16. Hos numeros scribo in columna B. In hac operatione signa negliguntur. Numerorum, qui inventi sunt, divisores omnes scribo sub C unus post alium; nempe numeri 6 divisores sunt 1, 2, 3, 6; atque ita de aliis. Observo, unum in divisoribus

ribus suppositionis $x=0$ fit aliquis, cui si addatur unitas, inveniat in divisoribus suppositionis $x=1$, & si unitas detrahatur, inveniat in divisoribus suppositionis $x=-1$. Invenio duos, nempe 3, & -3. Hos scribo in D simul cum divisoribus aliarum suppositionum, qui implent conditiones requisitas. Præter hos nullus apparet. Rejctis igitur ceteris omnibus, unice per $x+3$, $x-3$ divisio tentanda est. Si optas cognoscere, utrum ambo factores, an unus tantum sit utilis, pone $x=2$. Formula fit 20, in quo continetur factor 5, qui superat unitate quatuor, & -2, qui superat unitate -2. Hæc itaque suppositio neutrum excludit. Pone $x=-2$, formula fit 16, in quo numero continetur quidem divisor 2, qui deficit unitate a 2; at non continetur -5, qui unitate est minor quam -4. Excluditur ergo tamquam inutilis factor $x-3$.

& solum tentanda divisio per $x+3$. Facta vero divisione remanet x^2-5x+2 .

Æquatio igitur proposita in duas resolvitur $x+3=0$, $x^2-5x+2=0$, & habet radicem rationalem $x=-3$.

12. Exemplum alterum præbeat æquatio $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$

A	B	C
$x=2$	24	divisores omnes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
$x=1$	0	
$x=0$	24	
$x=-1$	24	
$x=-2$	0	

D					
I	II	III	IV	V	VI
0	3	-1	4	-2	5
-1	2	-2	3	-3	4
-2	1	-3	2	-4	3

Exordior a suppositionibus, quæ continentur in columna A, & dant numeros columnæ B. Horum numerorum divisores omnes continentur in C, ubi advertendum est o habere tamquam divisores numeros omnes. Sex sunt numeri, qui implent conditiones requisitas, qui notati sunt in D simul cum divisoribus superioribus, & inferioribus; a quibus differunt unitate. Aliqui sine dubio inutilis sint oportet. Quare ponamus $x=2$, & formula evadit 24. Primus, secundus, quintus & sextus numerus non excluduntur, quia in 24 inveniuntur divisores 1, 4, -1, 6; at secundus, & quartus excluduntur, quia in 24 non inveniuntur divisores, 0, 5. Si poneret $x=-2$, formula evaderet 0, qui quom omnes divisores contineat, numerum nullum potest excludere. Si poneret $x=2$, $x=-3$, nullus ex quatuor excluderetur. Reapse æquatio est divisibilis per quatuor factores $x-1$, $x+2$, $x-3$, $x+4$, & habet quatuor radices rationales $x=1$, $x=-2$, $x=3$, $x=-4$. Quotiescumque formula per aliquam suppositionem evadet $=0$, advertendum est, in ea suppositione radicem æquationis contineri. Ita quoniam proposita æquatio in duplici suppositione evadit $=0$, nempe $x=1$, $x=-2$, radices æquationis sunt 1, -2.

13. Ad exemplum tertium proponatur æquatio

$$x^3-30x^2+29x-32x+60=0$$

A

A	B	C
$x = 2$	96	1, 2, 4, 7, 14, 28
$x = 1$	28	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
$x = 0$	60	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150
$x = -1$	150	

I	II	III	IV	
*	*			In suppositionibus $x=1$, $x=0$, $x=-1$, quæ notatæ sunt in A., invenitur quid fiat formula. Hoc autem indicat columna B. Numerorum inveniantur divisores omnes, ut factum est in C. In D. noto omnes divisores mediae lineæ, quibus in linea superiore est divisor major unitate, in inferiore minor. Sunt autem quatuor. Præter hos ceteri exclusi remanent. Ut ad pauciores redigantur, pone $x=2$, & formula fiet 96. Ut primus divisor valeret, deberet 96 habere pro divisore 0; quod quum non accidat, primus numerus excludatur. Ut valeret secundus, deberet 96 esse divisibilis per 5; quod quum fieri non possit, etiam secundus excluditur. Ut reliqui valeant, necesse est, ut 96 sit divisibilis per -1 , & 8; dividi autem potest per utrumque. Dividit itaque æquationem per duos factores $x-3$, $x+6$. Divisio completur, & utraque pæfacta remanet formula $x^2 - x - 2 = 0$. Quare æquatio proposita resolvitur in tres duas lineares; & unam gradus tertii; & habet duas radices commenturabiles nimirum $x=5$, $x=-6$.
-1	4	-4	7	
-2	3	-5	6	
-3	2	-6	5	

itaque pæfacta remanet formula $x^2 - x - 2 = 0$. Quare æquatio proposita resolvitur in tres duas lineares; & unam gradus tertii; & habet duas radices commenturabiles nimirum $x=5$, $x=-6$.

14. Postquam rationem docuimus inveniendi factores simplices rationales æquationum cujuslibet gradus, si adint, postulat nonnemo, ut etiam factores rationales secundi gradus inveniam; nam quum æquationum secundi gradus resolutio sit in potestate, maximam hæc theoria præbet utilitatem. Ponamus $xx+bx+a$ esse factorem rationalem formulæ datæ; seu quod idem est esse ejuſdem formulæ divisorem exactum. Si fiat $x=0$, patens est in æquatione nihil remanere præter ultimum terminum, & in divisore remanere tantummodo $+a$. Igitur necesse est a esse unum ex divisoribus ultimi termini. Si fiat $x=1$, divisor evadet $1+b+a$, qui est divisor numeri, in quem convertitur formula in eadem suppositione. Igitur hujus numeri divisores omnes inveniantur, ab iisdem affectis tam signo +, quam - dematur unitas. In numeris, qui prodibant, continetur oportet numerus $b+a$. Simili modo facti $x=-1$, divisor evadet $1-b+a$, qui dividet numerum, in quem in facta suppositione formula mutatur. Inveniantur ergo divisores hujus numeri, ab iisque unitas detrahatur. In numeris, qui inveniantur, existet numerus $-b+a$. Quoniam a est media arithmetica inter $b+a$, $-b+a$, sequitur, in tribus seriebus, quæ continent numeros $b+a$, a , $-b+a$, eos tantum numeros esse considerandos, qui sunt in arithmetica progressionem. Ex numeris tribus arithmetice proportionalibus, qui respondent suppositioni $x=0$, accipiendus est tanquam a ; qui vero respondet suppositioni $x=1$ accipiendus tanquam $b+a$. Superior ab hoc detrahatur & remanebit b . Substituæ hos valores in trinomio $xx+bx+a$, & habebis factorem, per quem tentanda est divisio, quæ si completur, habebitur æquationis factor rationalis secundi gradus, qui querebatur.

15. Verum si plures habeantur numeri arithmetice proportionales respondentis suppositionibus $x=1$, $x=0$, $x=-1$, no divisionum multipliciter analysim detraeat, alia suppositiones faciendæ erunt, ut $x=-2$, $x=-3$, vel $x=2$,

$x=2, x=3$, per quas inutiles numeri excludantur. Pone causa exempli $x=-2, x=-3$, trinomium evadet $4-2b+a, 9-3b+a$, per quod erit divisibilis formula, si in ipsa quoque fiat substitutio. Igitur ex divisoribus hujus numeri tam positive quam negative acceptis faciende est deductio 4, 9, & inveniantur numeri, in quibus $-2b+a, -3b+a$ debent contineri. Hi autem quam sint termini progressionis $b+a, a, -b+a, -2b+a, -3b+a$ &c., evidens est, illas tantum progressionis utris esse posse, quæ in novis suppositionibus habent terminos, qui consequantur. Ceteras omnes tamquam inutiles rejice.

14. Exemplum primum præbeat æquatio quinti gradus

$$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21 = 0.$$

A	B	C	D	E
1	1	1	1	1
0	21	1, 3, 7, 21	0	1, -2, 0, -3, -1, +1, +3, +7, +21
-1	65	1, 5, 13, 65	1	-66, -14, -6, -2, 0, +4, +12, +64
-12	115	1, 5, 25, 125	4	-129, -29, -9, -3, -3, +1, +21, +121
-3	147	1, 3, 7, 21, 49, 147	9	-156, -58, -30, -16, -12, -10, -8, -6, -2, +12, +40, +138

I	II	III	IV	V
*	*	*	*	*
-2	-2	0	0	0
-1	+1	-7	-3	-1
0	+4	-14	-6	-2
+1			-9	-3
			-12	

Suppositiones continentur in columna A, nempe $x=1, x=0, x=-1$. Formula in his evadet 1, 21, 65 ut in columna B. Horum numerorum invenio divisores omnes, quos pono in C. In D pone suppositionum quadrata. Ex singulis divisoribus sumptis tam positive, quam negative fac demas hæc quadrata, & convenient numeri, qui scripti sunt in E. Vide quot series arithmeticas possint habere in tribus lineis, quæ respondent tribus suppositionibus. Quinque dumtaxat sunt, quas scribo in F. Secundum scribe in trinomio pro a , primum dempto secundo pro b , & habebis quinque trinomia, per quæ tentanda est æquationis divisio.

17. Verum ut a tot molestis divisionibus liberemur, fiat nova suppositio $x=-1$. Formula evadit 125. Hujus numeri omnes divisores scribantur in C. Ab his tam præfigendo signum +, quam -, detrahatur quadratum suppositionis 4, & numeri qui proveniunt scribantur in E. Ut prima series arithmetica valere possit, in his debet reperiri +1; reperitur; ergo non remanet exclusa. Ut valeat altera, deberet apparere +7; non apparet; ergo excluditur. Excluditur tertia, quia non adest -21, quarta, & quinta non excluduntur, qui adfunt numeri -9, -3, per quos producuntur progressionis arithmetica. Ut aliquas excludam ex tribus, quæ reliquæ sunt, utor nova suppositione $x=-3$, per quam formula convertitur in numerum 147, cujus divisores omnes invenio, & eo loco in C. Ab his sumptis cum positive, tum negative demo quadratum suppositionis 9, & proveniunt numeri, qui apparent in E. In his, ut prima, & ultima series valeant, debet inesse +3, -4; non adfunt ergo series istæ excluduntur. Ut valeat quarta, debet adesse -12; adest; ergo series hæc, quæ est unica, tentanda est, itaque $a=-3$, & $b=0+3=3$; qui valores possunt in

ti in trinomio dant $x^2 + 3x - 3$. Tenetur divisio, qua peracta provenit $x^2 + 5x - 7$. Aequatio itaque quinti gradus in duas resolvitur rationales, alteram secundi, alteram tertii gradus, nempe $x^2 + 3x - 3 = 0$, $x^3 + 5x - 7 = 0$.

18. Secundum exemplum præbeat æquatio

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5 = 0$. Ut brevitati calculi serviam, accipio quinque suppositiones, nempe $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, quas scribo in A.

A	B	C	D	E
2	133	1, 7, 19, 133	4	- 37, - 23, - 11, - 5, - 3, + 3, + 15, + 129
1	33	1, 3, 12, 33	1	- 34, - 12, - 4, - 2, 0, + 2, + 10, + 32
0	5	1, 5	0	- 5, - 1, + 1, + 5
-1	1	1	1	- 2, 0
-2	3	1, 3	4	- 7, - 5, - 3, - 1

I	I I
25	3
10	2
5	1
0	0
- 5	- 1

Observo an habere possint combinationes numerorum arithmetice proportionalium, quorum unus sit in prima linea, alter in secunda, tertius in tertia, atque ita deinceps. Invenio duas quas scribo in F. Superfluum est, efficere novas suppositiones, ut una excludatur; nam quum formula sit quarti gradus, si gaudet uno factore secundi gradus rationali, gaudet etiam altero. Ex prima serie colligimus $a=5$, $b=10-5=5$; ergo nascitur trinomium $x^2 + 5x + 5$. Ex secunda sequitur $a=1$, $b=2-1=1$, unde secundum trinomium $x^2 + x + 1$. Recipro si unum per alterum multiplicetur, redit formula proposita. Quare æquatio resolvitur in duas rationales secundi gradus.

19. Supposuimus hæcenus primum æquationis terminum omni coefficiente carere, si unitatem excipias. Quod si alio affectus sit coefficiente, licet per hoc dividere æquationem, tum eandem transformare in aliam fractionum expectem, deinde ad inveniendos factores rationales uti regulis exponentis. Sed si molesta est hæc transformatio, principia tradita huic quoque casui applicari possunt. Incipiamus a divisoribus unius dimensionis. Formulæ datæ sit factor $m x + a$. Si ponas x successive æqualem $2, 1, 0, -1, -2$; hic factor evadet $a m + a, m + a, a, -m + a, -2m + a$; quæ sunt in arithmetica progressionem, in qua hæc advertenda sunt. Omnium terminorum differentia m est coefficientis speciei x in factore. Eadem differentia m debet esse divisor coefficientis primi termini formulæ propositæ. Quantitas a respondens suppositioni $x=0$ est factoris secundus terminus. Demum termini progressionis arithmetice erunt divitiores formulæ propositæ, si in ipsa pro x successive substituantur $2, 1, 0, -1, -2$. his animadvertis, quam querendi sunt divitiores lineares, in prima columna pone suppositiones in secunda columna numeros, in quos proposita formula convertitur in singulis suppositionibus. Horum numerorum invenio divitiores omnes in his serie illos, qui sunt in arithmetica progressionem, cujus differentia sit divisor

ficiens primi termini propozitæ est 4, qui habet tres divifores, nempe 1, 2, 4. Si eligam 1, nequidquam res tentatur, nullus enim obtinetur factor secundæ dimensionis satisfaciens. Affumamus 2, & in D scribantur quadrata suppositio- num multiplicata per 2. Hi numeri detracti a singulis diviforibus pofitis in C acceptis tum positive, tum negative obtineo numeros notatos in E. His sedulo examinatis unam dumtaxat invenio progressionem arithmeticam, quam scribo in F. Hujus numerus medius — 11 respondens suppositioni $x = 0$ ponatur in trinomio pro a . Ut habeam b demo, — 11 ex — 3, & habeo $b = 8$; ergo tri- nomium fit $2x^2 + 8x - 11$, per quod si dividatur formula, exurgit quotiens

$$2x - 7.$$

23. Si querantur factores formulæ, quæ quintum gradum non superent, si existant, semper inveniuntur per methodos expositas. Nam si formulæ istæ ca- rent factoribus gradus primi, & secundi, nullum habere possunt factorem gra- dus tertii. Sed si formula ad sex, aut amplius dimensiones ascendat, poterit sæpe resolvi in factores trium, aut plurim dimensionum. Methodus inveniendi hujusmodi factores insititur iisdem principiis. Sed quum calculus longus satisfiat, ac molestus, neque magnam habeat utilitatem, ad utiliora progrediemur.

24. Quæ tradita sunt hætenus, pertinent ad æquationes numericas, quarum hæc res rationales determinantur. Nunc de æquationibus literalibus. Ac primum æquatio præter x includat solum a , atque ita, ut in singulis terminis summa exponentium x , & a sit eadem. In his res est nullius negotii. Nam, pone $a = 1$, tum æquationis numericæ, quæ provenit, inveni factores rationales. Si fiat linearis secundum terminum multiplica per a , si fiat secundi gradus, multiplica secundum terminum per a ; tertium per a^2 , & habebis factores qua- sitos. Sit data æquatio $x^3 + 4ax^2 - 17a^2x - 12a^3 = 0$. Pone $a = 1$, ut ex- urgat æquatio numericæ $x^3 + 4x^2 - 17x - 12 = 0$. Hæc, ut ex regulis traditis cognosces, habet factorem simplicem $x - 3$; ergo propozita habebit factorem, $x - 3a$. Similiter si proponatur æquatio $2x^5 + 5a^4x - 3a^2x^3 - 8a^3x^2 - 20a^4x + 12a^5 = 0$, pone $a = 1$, ut habeas $2x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 20x + 12 = 0$, quæ prædita est factore duarum dimensionum $2x^2 + 5x - 3$; igitur propozita erit prædita factore $2x^2 + 5ax - 3aa$.

25. Quamquam in æquationibus illis, quæ præter x duas literas a, b , con- tinent, utens iisdem regulis, potes obtinere factores simplices, & duarum dimen- sionum, tamen aliquot artificia analytica, quæ quasi non vocata sese offerunt, te voti competentem expeditius efficiunt. Inquiramus primum, utrum formu- a ha- beat factores, qui non contineant nisi duas literas ex. ca. x, a . Quoniam b in factore locum non habet, nihil conferet divisioni; ergo divisio æque perfici poterit, tamen si $b = 0$. Deleantur itaque termini omnes, in quos ingreditur b ; quæ residua est formula, eundem factorem habebit; idem igitur erit divisor tum quantitatis residuæ, tum integræ, seu, quod idem est, eorum terminorum, qui deleri sunt. Quapropter si inveniatur harum quantitatum communis divisor maximus, obtinebitur factor quæritus ex duabus literis coalescens, cujuscumque sit dimensionis.

16. Ut theoria aliquo exemplo fiat clarior, fit æquatio $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4 + a^2b^2 = 0$, cujus inquiritur factor constans ex solis litteris x, a . Sepone terminos, in quibus adest b , nempe $abbx + a^2b^2$; remanent $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4$. Duarum formularum, nempe sepositæ, & residuæ, inveni divisorem communem, qui est $x + a$; hic erit factor propositæ. Similiter fit æquatio $x^5 - 4ax^4 + 6a^2x^3 - abx^2 + abbx^2 + 2a^2bx^2 - 4a^3x^2 - 2a^2b^2x - 2a^3bx + 2a^3b^2 = 0$. Sepone terminos, ubi adest b , hoc est formulam A. $-abx^2 + abbx^2 + 2a^2bx^2 - 2a^2b^2x - 2a^3bx + 2a^3b^2$, & reliqua est B. $x^5 - 4ax^4 + 6a^2x^3 - 4a^3x^2$. Duarum formularum A, B inveniendus est divisor communis. Formulam A divide per b , & sepone terminos, ubi b adhuc locum habet, hoc est C. $abx^2 - 2a^2bx + 2a^3b$, & remanet D. $-ax^2 + a^2x^2 - 2a^3x$. Idem divisor debet esse communis etiam formulis C, D. Harum formularum divisor est $xx - 2ax + 2aa$. Inquiri, utrum dividat etiam formulam A. Divisio perficitur ergo $x^2 - 2ax + 2aa$, est factor æquationis propositæ.

17. Nunc vero spectemus formulam ex tribus litteris x, a, b constantem, quæ aut nullum habeat factorem ex duabus tantum litteris compositum, aut, si habeat ab eodem fuerit liberata. Queramus ejus factores unius dimensionis, qui consistat tribus litteris. Factorem hujusmodi exprimo per $mx + na + pb$. Si successive fiant $a, x, b = 0$, factor in tres mutatur $mx + pb, na + pb, mx + na$. In his terminis quilibet bis reperitur; nam si spectes primum, terminus mx apparet etiam in tertia, & pb in secunda. Ita de aliis. Præterea earum summa dat duplum divisoris integri. Nemo unus non videretis formulas $mx + pb, na + pb, mx + na$ dividere formulam datam, si in ipsa successive fiant $a, x, b = 0$. Quare ad inveniendos divisores simplices formulae propositæ, fac successive $a, x, b = 0$, & adnota tres formulas, quæ exurgunt in tribus suppositionibus, quæ duabus tantum litteris constabunt. Harum omnium fac invenias divisores omnes simplices duabus litteris constantes. Ex his elige tres, quibus insit conditio supra posita, ut quilibet unius terminus in aliis duobus reperatur. Si hujusmodi invenias divisores, dimidium eorum summæ factorem simplicem formulæ propositæ exhibebit. Si ad inveniendos tres divisores duarum litterarum, qui impleant conditiones requisitas, necesse est, in aliquo utriusque termini signa mutare, id omnino faciendum esse constat, quia quæ quantitas aliam dividit, dividet etiam mutatis signis.

18. Exemplis theoria illustranda est. Sit æquatio $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10ab^2 - 6b^3 = 0$.

A	B	C	D
$x = 0$	$10abb - 6b^3$	$5a - 3b$	$5a - 3b$
$a = 0$	$2x^3 - 3bx^2 + 4b^2x - 6b^3$	$2x - 3b$	$2x - 3b$
$b = 0$	$2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$	$2x + 5a$	$2x + 5a$

In

In A pono suppositiones; In B scribo quantitates, in quas in singulis suppositionibus mutatur proposita; In C harum quantitarum divisores omnes duarum literarum; in D vero divisores tres, qui implent condiciones requisitas, ut scilicet termini unus in duobus aliis reperiantur. Hos divisores collige in summam, & accipe dimidium, & habebis factorem propositæ $2x + 5a - 3b$. Re-

ple peracta divisione remanebit quotiens $x^2 + ax + 2b$.

29. Exemplum alterum præbeat æquatio

$$8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12abbx + 9a^2b + 15ab^3 = 0$$

$x = 0$	$9a^2b + 15ab^3$	$3a + 5b, 9a + 15b$	$-3a - 5b$
$a = 0$	$8x^4 - 10bx^3$	$4x - 5b, 8x - 10b$	$4x - 5b$
$b = 0$	$8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$	$4x - 3a, 2x + a$	$4x - 3a$

In A habes suppositiones, in B formulas, in quas mutatur proposita in istis suppositionibus, in C harum formularum divisores omnes duarum literarum. Si primo ex his diversibus mutes omnia signa, tres invenies, qui requisitis conditionibus satisfaciunt, quos scribo in D. Dimidium summæ horum trium $4x - 3a - 5b$ præbet divisoorem propositæ, factaque divisione poteris quotiente

$$2x^2 + ax^2 - 3abb.$$

30. In his exemplis non scripsimus in columna C divisores unus literæ, quia isti sufficere non possent factorem compositæ ex tribus literis constantem, sed tantum ex duabus. Hos autem paullo ante alia methodo docuimus invenire. Verum si quis hac methodo vellet divisores duarum literarum simul cum divisoibus trium literarum determinare, id facere posset, dummodo una tantum dimensione donati sint. Unico exemplo rem patefaciam in æquatione

$$16x^5 + 16bx^4 - 48ax^4 + 35a^2x^3 - 16abbx - 6a^3 + 3a^2b = 0$$

$x = 0$	$-6a^3 + 3a^2b$	$(3) \quad (3)$	$a, -2a + b$
$a = 0$	$16x^5 + 16bx^4$	$(16) \quad (16)$	$x, x + b$
$b = 0$	$16x^5 - 48ax^4 + 35a^2x^3 - 6a^3$	$x, x - 4a, 3a - 4x, x - 2a$	

I	II	III
$-a$	$-3a$	$-2a + b$
$4x$	$4x - 3a$	$x + b$
$4x - a$	$4x - 3a$	$x - 2a$

In A de more scribo suppositiones, in B formulas, in quas mutatur proposita in singulis suppositionibus, in C harum formularum divisores. Ne autem eorum numerus plus nimio augetur, apposui supra numerum intra () positum, qui indicat divisoorem illum literalem posse multiplicari & per eum numerum, & per singulos ejusdem numeri divisores. Ita formulae medii divisor est x , qui habet suprapositum (16), qui docet, non solum x , sed etiam $2x, 4x, 8x, 16x$ esse similiter ejusdem formulæ divisores. His effectis inquiri inter divisores tres, qui implent conditionem, ut termini unus in aliis duobus reperiantur. Tab-

plici modo id obtinetur, ut apparet in D. Igitur dimidium summa accipiendo habebimus tres factores propositæ $4x - a$, $4x - 3a$, $x - 2a + b$. Reapse si dividas propositam per $4x - a$, invenies quotientem $4x^2 - 11ax + 4bx + 6a^2 - 3ab$. Hunc si dividas per $4x - 3a$, invenies $x - 2a + b$.

31. Aliquot animadvertiones non dissimiles illis, quas fecimus in divisoribus unius dimensionis, methodum aperient invenientiæ factores duarum dimensionum. Sit factor, qui queritur, $m^2 + nx + px + qa^2 + rab + sb^2$. Ponantur successive $x, a, b = 0$, atque in his suppositionibus factor in tres formulas convertitur nimirum

$qa^2 + rab + sb^2$		quæ sine dubio dividunt formulam propositam, si in ipsa successive fiant $x, a, b = 0$. In his divisoribus termini, qui continent quadrata literarum x, a, b , bis inveniuntur in duobus, qui autem continent rectangula, ex duabus literis semel. Quare in tribus divisoribus duarum literarum, quæ a proposita elicientur, hæc conditio spectanda erit, ut quadrata semper reperiantur in duobus, rectangula nunquam repetantur. His inventis accipiatur dimidium summae quadratorum, et integra summa rectangulorum. Quod prodibit erit factor quæsitus æquationis.
$m^2 + pbx + sb^2$		
$m^2 + nax + qa^2$		

32. Exemplum primum det formula

$$x^4 - 3ax^3 - a^2x^2 + abx^2 - b^2x^2 + 3a^2x - 3ab^2x - a^3b - ab^3 = 0$$

A	B	C	D
---	---	---	---

x = 0	-a ² b - ab ³	ab, aa + bb	ab
a = 0	x ⁴ - b ² x ²	xx, xx - bb	xx
b = 0	x ⁴ - 3ax ³ - a ² x ² + 3a ² x	x ² - 3ax, xx - aa	xx - 3ax, xx - aa

In A continentur suppositiones, in B quantitates, in quas mutatur proposita in suppositionibus singulis. Harum divisores duarum dimensionum continentur in C. Qui implent condiciones requisitas habentur in D. Ex his, si accipias dimidium summae quadratorum, et integra rectangula, invenies duos factores $xx - 3ax + ab$, $xx - aa - bb$, quos si invicem multiplices restituent propositam formulam: in primo factorum ternario potest rectangulum ab , affici utroque signo +, -. Ambiguitas vero per actualem divisionem tollenda est. Si instituas divisionem propositæ formulæ per $xx - 3ax - ab$, divisio non completeretur; ergo hic non est factor propositæ. Completer autem, si fiat per $xx - 3ax + ab$.

33. Exemplum secundum, & ultimum habebis in æquatione $2x^5 - 3ax^4$

$$+ 3ax^3 + b^2x^3 - 3a^2x^2 - ab^2x^2 + a^4x + a^2bx^2 - 3b^3 = 0$$

A	B	C	D
---	---	---	---

x = 0	a ⁴ b ²	a ² , ab, bb	I
a = 0	2x ⁵ + b ² x ³	x ² , 2x ² + bb	II
b = 0	2x ⁵ - 3a ² x ² + 3a ² x ³ - 3a ² x ² + a ⁴ x	2x ² - ax, x ² + aa	

bb	aa	Formula convertitur in eas, quæ sunt in B, si fiant suppositiones propositæ in A. Divisores duarum dimensionum formularum B habes in C. Inquiri eos, qui implent condiciones, quæ postulantur. Qui	scri-
xx + bb	xx		
2xx - ax	xx + aa		

scripti sunt in D primo loco, sine dubio adimplent. Ex his formatur factor $ax^2 - ax + bb$, per quem reapse formula proposita divisibilis est. Adverto tres quoque, qui scripti sunt secundo loco, conditionem implere, tamen in illos b non ingrediatur; nam quadrata iterantur non iteratis reatungulis; ergo per illos invenimus factorem duarum literarum $xx + aa$. Facta autem utraque divisioe orietur $x - a$. Quare æquatio resolvetur in tres unam simplicem, & duas secundi gradus. Non vacat, dicere de divisionibus plurium dimensionem, & literarum; quæ majorem utilitatem habent, ea satis nobis explicata videntur. Theoriam hanc factorum rationalium dilucide, eleganter, atque accurate pertractavit Clairaut Vir Doctissimus, a quo accepimus. Ceterum usus, atque exercitatio, quæ in hisce rebus plurimum valet, faciliores methodos tibi suggeret ad invenendos factores rationales plurium æquationum.

CAPUT TERTIUM.

De resolutione æquationum per factores quoscumque.

POSTquam methodum tradidimus resolvendi æquationes per factores rationales, ut rectum ordinem sequamur, ea tradenda est, quæ pertinet ad factores quoscumque. Quemadmodum autem illa, ita hæc quoque tentando perficitur. Primum methodum speriemus in æquationibus quarti gradus, deinde in æquationibus quinti, & sexti, unde quantum generalis sit, apparebit.

I. Sit proposita æquatio $x^4 + ax^3 + aax^2 - a^2bx - a^3b = 0$. Accipe duas

æquationes secundi gradus $xx + yx + u = 0$, $xx + sx + z = 0$, in quibus y, u, z sunt quantitates determinandæ in progressu analysis; easdemque simul multiplica,

ut habeas $x^4 + yx^3 + ux^2 + sx^2 + zx = 0$. Hujus termini singuli comparentur,

$$+ sx^3 + syx^2 + zyx$$

$$+ zx^2$$

& æquantur cum singulis terminis propositæ. Secundi termini comparati dant

$s = a - y$, ultimi $z = -\frac{a^3b}{u}$, quarti $yx + su = -a^2b$. In hac substituatur

valores s, z , ut habeatur sequens æquatio inter y, u ; $y = \frac{au^2 + a^2bu}{u^2 + a^2b}$. Ex æ-

quatione $z = -\frac{a^3b}{u}$ docemur, u esse divisorem termini a^3b . Hujus quantitatis inveniantur divisores omnes secundi gradus (divisores unius, aut trium dimensionum ad-

rem non faciunt, quia æquationes subsidiariæ sunt secundi gradus). Si autem sunt

$\pm ab, \pm aa, \pm a\sqrt{ab}$. Incipiamus a primo, & ponamus $u = ab$, qui valor dabit $y = \frac{2ab}{a+b}$. Quare una ex æquationibus subsidiariæ fiet $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = 0$.

No.

Nequidquam tentabis per hanc dividere æquationem propositam, divisio enim non perficitur; igitur divisor assumptus est inutilis. Tentemus alium divisorem $-ab$, facta $y = -ab$, invenietur autem $y = 0$; ergo subsidiaria æquatio fiet $xx - ab = 0$. Per hanc dividitur formula proposita, & quotiens resultat $xx + ax + aa$. Itaque æquatio data resolvitur in duas $xx - ab = 0$, $xx + ax + aa = 0$. Si simpliciter $n = aa$, invenies $y = a$, & formula subsidiaria mutata fuisset in $xx + ax + aa$, per quam divisa proposita, ortus fuisset quotiens $xx - ab$. Quod si tentatis divisoribus omnibus, divisio non perficitur, æquatio saltem per hanc methodum reduci non potest.

2. Si in hac analysi divisiones vitare vells, ex assumpto valore n inveni reliquos y, a, z . Eorum valores in trinomiis colloca, trinomia inter se multiplicata. Si exurgat æquatio proposita, res perfecta est; sin minus alii divisores tentandi. Sed expeditius hoc cognoscere, si eam æquationem respicias, quam tertii termini præbent, nempe $u + sy + z = aa - ab$, cujus usus factus est nullus. Si valores n, y, s, z substituti reddant hanc æquationem identicam, inserviunt resolutioni propositæ; secus sunt profus inutilis.

3. Quarantur factores æquationis $x^4 + 2bx^3 + bbxx - a^3b = 0$. Hujus termini comparantur cum singulis terminis ejus, quæ nascitur ex duobus trinomiis auxiliariis inter se multiplicatis, quæ habetur N. 1. Orientur quatuor æquationes $y + s = 2b, u + sy + z = bb, xy + su = 0, xu = -a^3b$. Ex prima $s = 2b - y$, ex ultima $z = -\frac{a^3b}{u}$, qui valores s, z ponantur in tertia $xy + su = 0$

$+ 2by - uy = 0$ id est $y = \frac{2by}{y + u}$. Quando autem ex æquatione $z = -\frac{a^3b}{u}$ apparet u esse divisorem quantitatis $-a^3b$, accipiamus hujus divisores omnes secundi gradus, qui sunt $aa, -ab, a\sqrt{ab}$. Si primi duo rationales examinentur, palam fiet, eos esse omnino inutilis, quia secunda æquatio non reduitur identica. Examinemus $a\sqrt{ab}$, quæ fiat $= u$, invenietur $y = b, z = -a\sqrt{ab}, s = b$. Hi valores ponantur in secunda æquatione, & exurgat $a\sqrt{ab} + bb - a\sqrt{ab} = bb$, quæ est identica; ergo isti valores resolutionem suppeditant. Trinomia autem erunt $xx + bx + a\sqrt{ab} = a, xx + bx - a\sqrt{ab} = 0$. Eadem invenies, supponendo $n = -a\sqrt{ab}$. Reapse duo trinomia multiplicata æquationem propositam producent.

4. In æquationibus quinti gradus duæ æquationes accipiendæ sunt in subsidium, altera secundi gradus, altera tertii, atque earum productum comparandum est cum proposita, ut coefficientes determinentur. Sit æquatio

$x^5 - 4ax^4 + 6a^2x^3 - 8a^3x^2 + 5a^4x - a^5 = 0$. Sume duas æquationes auxiliares

$xx + yx + u = 0, x^2 + sx + z = 0$, quarum productum erit

$x^3 + yx^2 + ux + sx^2 + sx + z = 0$. Si hujus termini æquantur singulis

$+ sx + yx^2 + yx^2 + zy$

$+ s^2 + zx^2$

ter.

terminia proposita nascentur quinque equationes nempe $y + z = -4a$, $u + yz + s = 6a^2$, $ru + sy + z = -8a^3$, $su + zy = 5a^4$, $zu = -a^5$. Ex prima $r = -4a - y$; ex ultima $z = -\frac{a^5}{u}$; ex quarta $s = \frac{5a^4 - zy}{u} = \frac{5a^4 + ay}{uu}$.

Valores isti collocentur in secunda, ut oriatur $u - 4ay - yz + \frac{5a^4}{u} + \frac{ay}{uu} = 6a^2$,

sive $yy + 4ay - \frac{a^2y}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$. Quoniam ex equatione $z = -\frac{a^5}{u}$, cognoscimus u esse divisorem a^5 , accipiamus hujus quantitatis divisores omnes, qui sunt $\pm aa$. Ponamus primum $u = aa$. Equatio ultimo inventa fiet $yy + 4ay = 0$, hoc est vel $y = 0$, vel $y = -4a$. Examinemus valores primus $y = 0$. His suppositis,

erit $r = -4a$, $s = 5aa$, $z = -a^3$. Valores isti collocentur in tertia equatione, cujus nullus factus est usus, & fiet $-3a - a = -8a$, quae minime identica est; ergo sunt inutilis. Examinemus secundum valores $y = -4a$, & habebantur valores $r = a$, $s = 2a^2$, $z = -a^3$, qui in tertia positi dant

$-a^2 - 8a^2 - a^2 = -8a^3$, quae identica est, ergo valores isti satisfaciunt. Positi itaque in formalis subsidiarii dabant duas, in quas resolvitur proposita equatio, nimirum $xx - 3ax + aa = 0$, $x - ax + 2ax - a^2 = 0$; quae duae equationes simul multiplicatae propositam restituant. Si divisor $+aa$ inutilis inventus esset, tentare oporteret $-aa$. Quod si neuter satisfaceret, equatio factam per hanc methodum esset irreducibilis.

5. Altera equatio resolvenda sit $x^3 + ax^2 + a^2x - a^2bx - a^3 = 0$. Hujus

termini singuli comparentur cum terminis ejus, quae oritur ex multiplicatione duarum auxiliarium, & habeatur N. 4. Equationes quinque provenient $r + y = a$, $u + yz + s = 0$, $ru + sy + z = a^3 - a^2b$, $su + zy = -a^2b$, $zu = -a^2b$.

Ex prima $r = a - y$, ex ultima $z = -\frac{a^2b}{u}$. In quarta substituitur valor z , & invenies $s = -\frac{a^2b^2 + a^2by}{u}$. Secunda substituitur valoribus r, s fiet $u + ay - yz$

$-\frac{a^2b^2}{u} + \frac{a^2by}{uu} = 0$, sive $yy - ay - \frac{a^2by}{uu} = \frac{uu - a^2b^2}{u}$. Quam u debeat dividere quantitatem a^2b , hujus divisores secundi gradus accipiantur omnes, qui sunt $\pm aa$, $\pm ab$, $\pm a\sqrt{ab}$. Singuli examinandi sunt, sed aliis frustra tentatis, examinemus $-ab$, & ponamus $u = -ab$. Equatio inter y, b proveniet

$yy - ay - \frac{a^2y}{b} = 0$, ex qua $y = 0$, & $y = \frac{ab + aa}{b}$. Si hoc secundo valore y

$-7a^3 - 42a^3 - 22a^3 = -71a^3$, quæ identitas est. Quare formulæ duæ, in quas proposita resolvitur, erunt $xx - 2ax + 2aa = 0$, $x^4 - 11ax^3 + 21a^2x^2 - 7a^3x + a^4 = 0$, quæ in sese ductæ eandem restituent.

7. Animadversio hic omittenda non est. Si adhibuissem non quartam æquationem, sed tertiam, prodiisset æquatio cubica $2y^3 + 26ay^2 + 81a^2y + 74a^3 = 0$; quum antea invenerim æquationem quadraticam, quæ facilioris est resolutionis. Quare electio terminorum, quibus utamur, plurimam afferre potest utilitatem. Nihilominus per æquationem cubicam rem eodem modo conficerem, quia ejus radices sunt $y = -2a$, $y = -\frac{11a}{2} \mp \frac{a}{2} \sqrt{47}$, quarum una, nimirum $-2a$, eos valores præberet, quæ quartam æquationem redderent identicam.

8. Propono nunc æquationem sexti gradus resolvendam in duas tertii, scilicet, $x^6 + 3ax^5 + 4aa^4 + 6a^3x^3 + 6a^4x^2 + 3a^5x + 2a^6 = 0$. In auxilium vocandæ sunt de more duæ æquationes tertii gradus $x^3 + yx^2 + px + u = 0$, $x^3 + tx^2 + sx + z = 0$, quarum productum est hujusmodi.

$$\begin{aligned} x^6 + yx^5 + px^4 + ux^3 + tux^2 + sux + zu \\ + tx^5 + syx^4 + px^3 + psx^2 + pzx \\ + sx^4 + syx^3 + zyx^2 \\ + zx^3 \end{aligned} = 0. \text{ Terminorum comparatio}$$

dabit sex æquationes scilicet $y+t=3a$, $p+sy+s=4a^2$, $u+pt+sy+z=6a^3$, $su+ps+z=6a^4$, $su+pz=3a^5$, $zu=2a^6$. Ex prima $t=3a-y$; ex ultima $z=\frac{2a^6}{u}$. In quinta isti valores substituantur, & inveniantur

$$s = \frac{3a^5}{u} - \frac{2ap}{uu}. \text{ Ex secunda substitutis valoribus}$$

$$p = \frac{4a^2u^2 - 3a^5u + u^2y - 3a^2uy}{uu - 2a^6}; \text{ item ex tertia}$$

$$p = \frac{6a^3u^2 - u^3 - 3a^5uy - 2a^6}{3a^2uu - u^2 - y2a^6}. \text{ Duo valores } p \text{ inter se æquantur, expurgataque æquatione invenietur}$$

$$\begin{aligned}
 y^3 - 6a^7uy^2 + 8a^8uy - 6a^3u^3 \\
 - 6a^3y^2 - 6a^4y + 9a^6u^2 \\
 + 13a^2uy - 12a^9u \\
 + 4a^{12} \\
 - u^4 \\
 \hline
 u^3 + 12a^6
 \end{aligned} = 0. \text{ Quoniam ex ultima constat } u \text{ esse}$$

divisorem $2a$, omnes hujus quantitatis divisores tentemus. Pono itaque $u = a^3$, & æquatio orietur $y^3 - 4ay^2 + 5a^2y - 2a^3 = 0$, quæ habet duas radices æquales nempe $y = a$, & unam inæqualem $y = 2a$. Hac utamur, & inveniemus valores $r = a$, $z = 2a^3$, $p = a^2$, $s = a^2$, qui valores positi in quarta æquatione dant $a^4 + a^4 + 4a^4 = 6a^4$, hoc est identicam. Valores itaque utiles sunt, & dant æquationes tertij gradus $x^3 + 2ax^2 + aax + a^3 = 0$, $x^3 + ax^2 + a^2x + 2a^3 = 0$, quæ in sese ductæ propositam restituunt. Si voler $y = 2a$ fuisset inutilis, tentassem alium $y = a$. Si hic quoque inutilis deprehensus fuisset, ponenda foret successively u æqualis aliis divisoribus tertij gradus quantitatis $2a^6$. Quod si omnes forent inutiles, per hanc methodum resolvi æquatio non posset.

9. Quamquam methodus ista applicari etiam possit æquationibus graduum superiorum, tamen difficultas maxime ob terminorum multipliciter auctur. Si resolvenda esset æquatio gradus octavi in duas quarti, in singulis æquationibus auxiliaribus quatuor indeterminatæ haberentur; quare fracto etiam unius termino ultimo æquali divisorii ultimi termini propositæ, se se offerrent æquationes solidæ, quæ difficilis sunt resolutionis. Attamen si resolvantur, voti compotes efficiemur. Methodus ista, quæ tentando progreditur, ad optatum exitum læonumero non perdit. Attamen si formulæ eæ sint, quæ convertibiles nominantur, sine dubio istæ in plures secundi gradus resolventur quæ quidem aliquando imaginaria possunt continere. Æquationes convertibiles sunt gradus paris, eujusque exponents vocetur $= n$; In primo termino adest x^n , habens pro coefficiente solam unitatem, in ultimo est quantitas constans, quam voco $= a^n$. Quilibet terminus positus inter medium, & ultimum divisus per congruam radicem a^n debet esse præditus eodem coefficiente, & signo, quo terminus respondens positus inter medium, & primum. Ita convertibiles erunt æquationes $x^4 + bx^2 + cxx + aabx + a^4 = 0$, $x^6 - bx^4 + b^2x^3 - a^4bx + a^6$. Methodus resolvendi has æquationes est hujusmodi. Assumatur formula secundi gradus $xx + fx + aa = 0$, in qua f est quantitas determinanda. Deinde formetur formula convertibilis inferior duobus gradibus, ita ut primus terminus sit x^{n-2} , ultimus a^{n-2} , cujus coefficientes pariter sint indeterminati. Istæ duæ æquationes simul multiplicentur, & ejs, quæ nascitur, termini singuli comparantur cum terminis datæ, usque ad terminum medium inclusive; ceterorum enim comparatio eadem, ac primi æquationes præbent. Ejo-

His omnibus indeterminatis præter f , proveniat æquatio inter f , & constantes Valores omnes ex hac æquatione elicitæ, positi in trinomio $xx + fx + aa = 0$, exhibebunt æquationes secundi gradus, in quas proposita resolvitur.

10. Propono ad exemplum primum æquationem convertibilem

$x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4 = 0$. Efformo æquationem convertibilem duobus gradibus inferioriorem, scilicet $xx + bx + aa = 0$, quam multiplico per trinomialium $xx + fx + aa$, ut nascatur convertibilis æquatio

$x^4 + bx^3 + 2a^2x^2 + a^2fx + a^4 = 0$. Comparatio terminorum duas æquationes

$$+fx^3 + fbx^2 + a^2bx$$

præbet $f + b = 2b$, $2aa + fb = 0$. Valorem b elicitum ex prima substitue in secunda, ut habeas $2aa + 2bf - ff = 0$, seu $ff - 2bf = 2aa$, cujus radices sunt $f = b \pm \sqrt{2aa + bb}$. Hos valores pone in trinomio, & habebis

$xx + bx + x\sqrt{2aa + bb} + aa = 0$, $xx + bx - x\sqrt{2aa + bb} + aa = 0$, in quas æquatio proposita resolvitur.

11. Exemplum alterum sufficiat æquatio $x^6 + a^6 = 0$. Efformo æquationem

convertibilem gradus quarti $x^4 + gx^2 + bx^2 + a^2gx + a^4 = 0$, quam multiplico per trinomialium $xx + fx + aa = 0$, ut habeam formulam convertibilem gradus sexti

$x^6 + gx^5 + bx^4 + a^2gx^3 + a^4x^2 + a^4fx + a^6 = 0$. Factæ comparatione cum pro-

$$+fx^5 + fgx^4 + fbx^3 + a^2fgx^2 + a^4gx$$

$$+ a^2x^4 + a^2gx^3 + a^2bx^2$$

posita secundi, tertii, & quarti termini præbentur tres æquationes $f + g = 0$,

$b + fg + a^2 = 0$, $2a^2g + fb = 0$. Ex prima $g = -f$, qui valor substitutus in

reliquis dat duas $b - ff + aa = 0$, $-2a^2f + fb = 0$. Ex harum prima

$b = -aa + ff$; ergo facta substitutione in altera $f^2 - 3a^2f = 0$, ex qua tres

valores f proveniunt $f = 0$, $f = a\sqrt{3}$, $f = -a\sqrt{3}$. Hi valores positi in trino-

mio $xx + fx + aa = 0$ dant tres æquationes secundi gradus, in quas proposita

resolvitur, scilicet $xx + aa = 0$, $xx + ax\sqrt{3} + aa = 0$, $xx - ax\sqrt{3} + aa = 0$.

Gabriel Manfredus Analysta doct.issimus in primo Ac. Bononiensis tomo formu-

las convertibiles in usum traduxit ad resolvenda nonnulla binomia, & trinomia

in factores reales secundi gradus; quod nos deinceps adhibita faciliiori methodo

abolvemus.

12. Non videtur hoc loco omittenda methodus deprimenti æquationes, quo-

tiescumque constat, eas præditas esse duabus, aut pluribus radicibus æqualibus,

quam tradit Joannes Huddenius vir celeberrimus in sine Geometriæ cartesianæ

de reductione æquationum regula 10. Illa enim sæpe in usum traducitur, & uti-

lissima est. Sed quoniam sine ulla demonstratione proponitur, danda nobis opera

est, ut certa fundamenta detegamus, quibus innititur. Demonstravimus Cap. primo,

binomialium $x + a$ elevatum ad potestatem m ita exprimi

$x^m + m a x^{m-1} + \frac{m \cdot m-1}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$ &c. Si ab

L 1 2

hac

hæc formulâ tollamus primum terminum x^m , tum auferamus maximum factorem cujuslibet divisoris, demum dividamus per ma , proveniet formula

$$x^{m-1} + \frac{a}{m-1} x^{m-2} + \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{m-2} x^{m-3} \&c., \text{ quæ nihil est aliud, nisi binomium } x+a \text{ elatum ad potestatem } m-1, \text{ uno scilicet gradu minore.}$$

Verum facile est cognoscere, hæc omnia obtineri, si singulos formulæ terminos multiplicemus per singulos terminos seriei arithmeticæ $0, 1, 2, 3 \&c.$, eosque omnes dividamus per ma . Quapropter si supponamus $x+a=0$, constat

fore tum $x+a=0$, tum $x+a^{m-1}=0$, atque in hæc secunda formula numerum radicem æqualium eius unitate minorem quam in prima. Igitur si singulos terminos expositæ formulæ, quæ supponitur $=0$, multiplicemus per singulos terminos seriei arithmeticæ $0, 1, 2, 3 \&c.$, resultabit formulâ quæ erit $=0$, & habebit numerum radicem æqualium unitate imminutum. Idem manifestum est valere, si singuli termini multiplicentur per seriẽ arithmeticam $0, n, 2n, 3n \&c.$ quia hæc nova series hoc solum discrimen inducit, quod singulos terminos multiplicat per n .

13. Idem dicas velim, si æquationis singulos terminos multiplices per singulos terminos cujuslibet seriei arithmeticæ $b, b+n, b+2n, b+3n \&c.$ Nam hæc operatio nihil aliud prestat, quam multiplicare primum singulos terminos

per b , quod dat $b \cdot x+a$; tum eosdem successive multiplicare per $0, n, 2n,$

$3n \&c.$; quod ut constat ex N. superiore dat $nm a \cdot x+a^{m-1}$; ergo hæc operatio præbet formulam æqualem $b \cdot x+a + mn a \cdot x+a^{m-1}$, seu

$$\frac{bx + ba + mn a \cdot x + a^m}{x+a}, \text{ quæ habet } m-1 \text{ radices æquales, adeoque } = 0.$$

14. Quod demonstratum est de illis æquationibus, quæ solis radicibus æqualibus constant, idem non est difficile extendere ad illas quoque, quæ radices habent partim æquales, partim inæquales. Intelligantur primum, omnes termini formulæ exprimentis potestatem m binomii $x+a$ duci in x^p , tum termini singuli multiplicentur per terminos singulos seriei arithmeticæ cujuslibet $b, b+n, b+2n, \&c.$ manifestum est provenire formulam, quæ æquabit

$\frac{bx + ba + mn a \cdot x^p \cdot x + a^m}{x+a}$, quæ $= 0$, & habet radices æquales $m-1$. Iam vero spectâ quamlibet æquationem coalescentem partim ex radicibus æqualibus, partim ex inæqualibus. Radices æquales det $x+a$, inæquales formula

$x^p + Ax^{p-1} + Bx^{p-2} \&c.$ Itaque æquatio ita disponi poterit

$$\frac{x^{m+p} + mx^{m+p-1} + \frac{m \cdot m-1}{2} a^2 x^{m+p-2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{6} a^3 x^{m+p-3} \&c.}{x^{m+p} + mx^{m+p-1} + \frac{m \cdot m-1}{2} a^2 x^{m+p-2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{6} a^3 x^{m+p-3} \&c.}$$

$$+ Ax^{m+p-1} + mA Ax^{m+p-2} + \frac{m \cdot m-1}{2} a^2 Ax^{m+p-3} \&c.$$

$$+ Bx^{m+p-2} + ma Bx^{m+p-3} \&c.$$

+ &c.

Si

Si hujus formulæ termini singuli ducantur in terminos seriei arithmetice $b, b+2n, b+2n, b+3n$ &c., manifestum est, terminos positos in superiori linea horizontali multiplicari per seriem, ejus primi termini sunt $b, b+n$; terminos positos in secunda linea horizontali duei in terminos seriei, cujus sunt primi termini $b+n, b+2n$; similiter qui positi sunt in linea horizontali tertia duei in seriem, cui primi termini sunt $b+2n, b+3n$, atque ita deinceps; sed istæ lineæ horizontales sunt potestas m binomij $x+a$, ducta in terminos $x^p, Ap x^{p-1}$,

Bx^{p-2} &c.; ergo facta multiplicatione omnes $= 0$, & continent $m-1$ radices æquales; ergo tota æquatio $= 0$, & continet radices æquales numero $m-1$.
Q. E. D.

15. His demonstratis regula Huddenii fit manifesta. Si habeas æquationem, cui insint duæ, aut plures radices æquales, ejus terminos multiplica per terminos cujuslibet seriei arithmetice; æquatio, quæ proveniet, continebit eadem radices æquales, sed earum numerus erit unitate minutus. Formulæ datæ, & inventæ divisor communis inveniatur, qui continebit factorem præbentem radices æquales: Per hunc dividatur data tot visibus, quot sunt radices æquales, & remanebit formula alias radices continens. Utile autem erit vel maxime eligere seriem arithmeticam, quæ incipiat a 0; nam ita æquatio provenit uno gradu depressior. Verum potes, adhibitis duabus seriebus arithmeticis duos æquationes invenire, quarum divisor communis dabit factorem, per quem data est dividenda. Cave tamen, ne utraq; æquatio oriatur eadem. Juvabit vero secundam seriem eligere, quæ desinat in 0. Ita enim, facta divisione per x , obtinebitur æquatio inferior gradus uno. Si radices æquales essent plures, quam dum, potes multiplicationem per seriem arithmeticam iterare, donec habeas æquationem unam tantum ex radicibus æqualibus continentem. Adverte, in hæc analysi non esse omittebdos terminos, qui defunt, & spectandos esse, ut multiplicatos per 0.

16. Æquationem præditam duabus radiceibus æqualibus $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$ multiplico per seriem arithmeticam 0, 1, 2, 3, ut fiat $-5x^2 + 16x - 12 = 0$. Eandem multiplico per seriem inversam 3, 2, 1, 0, ut oriatur $3x^3 - 10x^2 + 8x = 0$, sive facta per x divisione $3x^2 - 10x + 8 = 0$. Æquationum inventarum divisor communis est $x-2$, per quem bis divisa æquatione data fit $x-1=0$. Itaque æquationis duæ radices æquales erunt $x=2$, inæqualis $x=1$.

17. Proponatur resolvenda æquatio quarti gradus, in qua constet adesse duas radices æquales

$x^4 - 43x^3 + 150x^2 - 144x = 0$. Multiplica terminos singulos per

0, 1, 2, 3, 4

$-86x^3 + 450x^2 - 576x = 0$, seu facta divisione per 2

$-43x^3 + 225x^2 - 288x = 0$. Si multiplicarem per seriem 4, 3, 2, 1, 0 proveniret æquatio tertii gradus. Hujus autem, & superioris inveniendus esset divisor communis. Quare satius erit multiplicare per seriem 3, 2, 1, 0, -1, ut proveniat æquatio quarti gradus, sed quæ resolvi possit ad modum quadraticæ, hoc est $3x^4 - 43x^3 + 144x^2 = 0$. Resolvamus primam æquationem, & fiet

$$x = \frac{225}{2 \cdot 43} = \frac{225}{2 \cdot 43} - \frac{288}{43} = \frac{50625 - 49536}{2 \cdot 43} = \frac{1089}{2 \cdot 43}; \text{ ergo}$$

$$x = \frac{225 \pm 33}{2 \cdot 43}, \text{ Ex qua duo eruntur valores } x = 3, x = \frac{96}{43}. \text{ Resolvamus al-$$

$$\text{teram } x^2 - \frac{43}{2 \cdot 3} = \frac{47}{2 \cdot 3} - \frac{144}{3} = \frac{1849 - 1728}{2 \cdot 3} = \frac{121}{2 \cdot 3}; \text{ ergo}$$

$$x^2 = \frac{43 \pm 11}{2 \cdot 3}, \text{ ex quo duo valores } x^2 = \frac{54}{2 \cdot 3} = \frac{27}{3} = 9, x^2 = \frac{32}{2 \cdot 3} = \frac{16}{3}. \text{ Primus}$$

dat $x = 3$. Itaque communis divisor erit $x - 3$. Per hunc bis divisa æquatione proposita prodibit $xx + 6x - 16 = 0$, quæ radices inæquales præbet.

18. Quoniam in æquationibus raro existunt conditiones, per quas radices veræ ex superioribus methodis deteguntur, propterea conati sunt analytæ, hæcæ radices per approximationem, ut ajunt, determinare, hoc est invenire radicem, quæ differt a vera, quantitate quantum volueris minima. Plures methodi excogitate sunt; nos unam tantum scilicet newtonianam paucis exponemus. Quam ob rem necesse est præmittere aliqua de limitibus æquationum, quam theoriam Erasmus Bertolinus in introductione ad geometriam Cartesii acceptam refert Florimundo de Baune. Limites æquationum sunt quantitates duæ inæquales, intra quas radix vera posita est. Quomodo autem hi limites inveniantur propositis aliquot exemplis declaramus.

19. Sit æquatio $x^2 + px = q$; ergo $px < q$, & $x < \frac{q}{p}$. Similiter erit $q > x^2$, & $\sqrt{q} > x$, & $x\sqrt{q} > x^2$, & addendo px , fiet $px + x\sqrt{q} > x^2 + px$; sed $x^2 + px = q$; ergo $px + x\sqrt{q} > q$, & $x > \frac{q}{p + \sqrt{q}}$. Itaque verus valor x positus

est inter quantitates inæquales $\frac{q}{p}$, $\frac{q}{p + \sqrt{q}}$, quæ sunt limites, est enim x minor

prima, major secunda. Nunc queramus limites æquationis $x^2 - px + q = 0$; erit $x^2 + q = px$; ergo $x^2 < px$, & $x < p$. Similiter quia $x^2 = px - q$, quantitas $px - q$ erit positiva; igitur $px > q$, & $x > \frac{q}{p}$. Itaque limites erunt p , $\frac{q}{p}$.

Sit æquatio $x^2 = px + q$, erit $x^2 > q$, & $x > \sqrt{q}$, & $x\sqrt{q} > q$; ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$; sed $px + q = x^2$, ergo $px + x\sqrt{q} > x^2$, ex qua sequitur $x < p + \sqrt{q}$. Similiter $x^2 > px$, & $x > p$; ergo $px > p^2$, & $px + q > p^2 + q$; sed $px + q = x^2$; ergo $x^2 > p^2 + q$, & $x > \sqrt{p^2 + q}$.

Quare limites æquationis sunt $p + \sqrt{q}$, quæ x minor est, & $\sqrt{p^2 + q}$, quæ x est major.

20. Definiamus limites æquationis $x^3 + r = qx$; Erit $qx > r$; ergo $x > \frac{r}{q}$;

Similiter $x^3 < qx$; ergo $x^2 < q$, & $x < \sqrt{q}$. In æquatione $x^3 + qx = r$ ita procedo; est $qx < r$; ergo $x < \frac{r}{q}$. Item $r > x^3$, & $r^{\frac{1}{3}} > x$, & $r^{\frac{2}{3}} > x^2$; ergo $r^{\frac{2}{3}}x > x^3$, & $r^{\frac{2}{3}}x + qx > x^3 + qx$; sed $x^3 + qx = r$; ergo $r^{\frac{2}{3}}x + qx > r$, & $x > \frac{r}{r^{\frac{2}{3}} + q}$; quare x posita est inter limites, & est minor $\frac{r}{q}$, major

$\frac{r^{\frac{2}{3}} + q}{r^{\frac{2}{3}} + q}$. Si habeatur æquatio $x^5 - px^2 = r - qx$. Si fit $x > p$, erit quoque

$r > qx$, seu $x < \frac{r}{q}$. Si vero $x < p$, erit quoque $r < qx$, & $x > \frac{r}{q}$. In utroque casu igitur limites sunt p , & $\frac{r}{q}$. In æquatione $x^3 + r = px^2 + qx$ est

$px^2 + qx > r$, & $x^2 + \frac{q}{p}x > \frac{r}{p}$, & $x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{q^2}{4p^2} > \frac{r}{p} + \frac{q^2}{4p^2}$, & $x + \frac{q}{2p} > \frac{1}{2p} \sqrt{4rp + 9q^2}$, demum $x > \frac{\sqrt{4rp + 9q^2} - q}{2p}$. Similiter

$px^2 + qx > x^3$, & $q > x^2 - px$, & $q + \frac{pp}{4} > x - \frac{p}{2}$; ergo

$x - \frac{p}{2} < \frac{1}{2} \sqrt{4q + pp}$, demum $x < \frac{\sqrt{4q + pp} + p}{2}$. Limites itaque sunt

$\frac{\sqrt{4rp + 9q^2} - q}{2p}$, $\frac{\sqrt{4q + pp} + p}{2}$. Hæc exempla sufficiant ad ostendendam methodum

inveniendi limites æquationis, quæ solum industriam in analysi requirit.

21. Inventis limitibus ad determinandam radicem præpè veram per approximationem hæc methodus tenenda est. Assume quantitatem intra limites positam, quam voco $= p$, tum fac $x = p + y$, quæ y satis exigua erit. Facta substitutione inveniatur æquatio continens y , in qua ob exiguitatem y , omnes ejus potestates excepta infima deleantur; quare valor y statim determinabitur, quem valorem adde p , & qui resultat voca $= q$, hic erit valor x proprius verò. Si optat appropinquare magis, fac $x = q + y$, & repete operationem, donec valor x quantum volueris parum a vero discrepet. Ut autem radicalia, & fractiones diversæ vitentur, utile erit, quemadmodum vulgo fit, omnia in fractionibus decimalibus exprimere. Unum aut alterum exemplum methodum declarabit.

22. Æquationis $x^2 - 5x - 3 = 0$ radix per approximationem invenienda sit.

fit: Quoniam 8 positus est inter $5 + \sqrt{31}$, & $\sqrt{56}$, qui sunt limites æquationis, pone $x = 8 + y$. Facta substitutione fiet

$$\begin{array}{r} x^2 \quad 64 + 16y + yy \\ - 5x = -40 - 5y \\ - 31 \quad - 31 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Ergo deleta } yy \text{ propter} \\ \text{exiguitatem fiet} \\ - 7 + 11y = 0, \text{ five} \end{array}$$

$y = \frac{7}{11}$, five proxime $= 0.6$; ergo $x = 8.6$. Pono iterum $x = 8.6 + y$, & æquatio in hanc mutatur

$$\begin{array}{r} x^2 \quad \frac{7396}{100} + \frac{172}{10} y + yy. \text{ Deleta } yy, \text{ \& reductione facta} \\ - 5x = - \frac{430}{10} - 5y \\ - 31 \end{array}$$

$$- 0.04 + 1220y = 0; \text{ ergo } y = \frac{0.04}{1220} = 0.0032;$$

Itaque $x = 8.6032$, qui valor magis ad verum accedit. Fac tertio $x = 8.6032 + y$ invenies

$$\begin{array}{r} x^2 \quad 74.01505024 + 17.20640000. y + y^2 \\ - 5x = -43.01600000 - 5.00000000. y \\ - 31 = -31.00000000 \end{array} = 0$$

five $- 0.00004976 + 12.20640000. y$, five $y = 0.00007808$, seu $x = 8.6032077808$. Atque hac methodo progredieris, si velis ad valorem verum x magis magisque accedere.

23. Simili modo investigo radicem æquationis $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$. Limitum methodus me docet, valorem x non multum abesse a 5. Quare fit $x = 5 + y$. Æquatio omittis superioribus potestatibus y fiet

$$\begin{array}{r} x^3 \quad 125 + 75y + \dots \\ + 2x^2 \quad 50 + 20y + \dots \\ - 23x \quad - 115 - 23y \\ - 70 \quad - 70. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{five } - 104 - 72y = 0 \\ \text{aut } y = \frac{10}{72} = 0.1 \text{ pro-} \\ \text{xime. Itaque habemus} \end{array}$$

$x = 5.1$. Ponamus iterum $x = 5.1 + y$, habebimus

$$\begin{array}{r} x^3 \quad 132.651 + 78.030. y + \dots \\ + 2x^2 \quad 52.020 + 20.400. y + \dots \\ - 23x \quad - 117.300 - 23.000. y \\ - 70 \quad - 70.000 \end{array} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Reducta itaque} \\ \text{æquatione obti-} \\ \text{nemus} \end{array} \right\}$$

$- 2.629 + 75.430. y = 0$, five $y = \frac{2.629}{75.430}$, quæ quam proxime $= 0.0349$; ergo $x = 5.1349$. Eodem modo licet progredi, quousque liberit.

24. Sed relictis methodis, quæ aut tentando procedunt, aut solum valorem vero proximum inveniunt, videamus, quænam æquationes gradum quartum excedentes talem exactamque resolutionem accipiunt; non enim suppetit methodus

æquationes, qua omnes resolvamus. Resolvantur autem primo, quum spoliata secundo termino careat aliis omnibus, si ultimum excipias; deinde quum unus tantum terminus ex mediis adest, in quo exponens incognitæ dimidium est exponentis termini primi, quod contingere non potest, nisi exponens maximum sit numerus par; post resolvuntur, quum ex mediis adsint termini duo ita, ut exponentia in tribus terminis sint quemadmodum 3, 2, 1, quod postulat exponens maximum esse divisibile per 3; demum quum medii termini tres sunt, & exponentia sunt ut 4, 3, 2, 1, quod obtineri nequit, nisi exponens primi termini dividi possit per 4. Adverte, perfici eodem modo resolutionem, tametsi aliquis ex terminis desit, & intelligatur multiplicatus per 0. Hæc omnia clara sunt ex iis, quæ diximus de resolutione æquationum secundi, tertii, & quarti gradus. Nemo unns non videt, conditiones istas angustis admodum finibus contineri in omnibus æquationibus, sed in illis præsertim, in quibus incognitæ exponens maximum est numerus primus. In his enim præter primam conditionem nulla haberi potest, sub qua resolutionem accipiant. Verum Vincentius Riccatus opusculo quarto tomi primi methodum aperuit determinandi omnes æquationes cujuscumque gradus, quarum radix una eodem modo exprimi potest, quo radix cardanica æquationum cubicarum. Ne theoriam maximi momenti prætermittamus, quæ magis necessaria sunt, desumemus ex eo opusculo, quod si legas, eandem uberior tractatam comperies.

25. Rem itaque aggrediens incipiam ab æquationibus gradus alterius, deinde ad altiores progrediar. Pono $x = m + n$, elevo ad quadratum

$$xx = mm + 2mn + nn, \text{ sive } xx - 2mn - \frac{mm}{nn} = 0. \text{ Hujus radix est}$$

$x = m + n$, cui etiam addere possumus $x = -m - n$, ut radicem extrahenti pariam her. Ad æquationes cubicas progrediens elevo $x = m + n$ ad tertiam potestatem

$$x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3, \text{ quam ita dispono } x^3 = m^3 + 3mn.$$

$m + n$. Ad eandem partem translatis terminis, substituo x pro $m + n$,

$$\text{\& invenio } x^3 - 3mnx - \frac{m^3}{n^3} = 0, \text{ cujus radix una erit } x = m + n. \text{ Ad hanc}$$

æquationem unica hæc conditio requiritur, ut secundus terminus desit, quod semper obtinere possumus. Ut æquationes gradus quarti expediam, effero ad

$$\text{quartam potestatem } x = m + n, \text{ \& invenio } x^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4,$$

quæ hoc modo est distribuenda $x^4 = m^4 + 4mn \cdot \frac{m+n}{n} + n^4$. Pro $m + n$ pono

$$x, \text{ \& translatis terminis nanciscor } x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 - \frac{m^4}{n^4} = 0, \text{ cujus ra-}$$

dix una $x = m + n$. In qua æquatione hæc conditio necessaria est, ut desit: n e secundo termino desit etiam quartus, adeoque nulla potestas impar incognitæ reperitur.

26. Elevetur ad quintam potestatem $x = m + n$, & prodibit $x^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$. Hæc autem ita disponenda est

est $x^3 = m^3 + 3mn \cdot \overline{m+n}^2 + n^3$, Ejice binomium $m+n$ substituta x , &

transfer terminos, $x^3 - 3mnx^2 + 3m^2n^2x - m^3 = 0$. Conditiones in æquatio-

ne insunt duæ. Prima petit, ne termini omnes non absint, in quibus incogni-
tâ parem tenet dimensionem. Altera exigit, ut coefficientis x^1 elatum ad qua-
dratum sit quintuplum coefficientis x . Sexta potestas æquationis $x = m+n$ e-
rit $x^6 = m^6 + 6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^3 + 15m^2n^4 + 6mn^5 + n^6$. Hanc ita

dispone $x^6 = m^6 + 6mn \cdot \overline{m+n}^4 + n^6$. Si transferas terminos, & substituas x

pro $m+n$, habebis $x^6 - 6mnx^4 + 9m^2n^2x^2 - 2m^3n^3 - \frac{m^6}{6} = 0$, in qua
præter conditionem requirentem, ut omnis terminus absit, in quo x ad impa-
rem potestatem ascendit, necesse est, ut coefficientis termini x^2 sit æquale qua-
drato coefficientis x^4 diviso per 4.

27. Quum agitur de æquatione gradus septimi, potestas septima æquatio-
nis $x = m+n$ ita erit distribuenda $x^7 = m^7 + 7mn \cdot \overline{m+n}^5 + n^7$, quæ facta

confucta substitutione, & translatis terminis in hanc mutabitur

$x^7 - 7mnx^5 + 14m^2n^2x^3 - 7m^3n^3x - \frac{m^7}{7} = 0$. Hæc caret terminis omnibus,

in quibus x ad parem potestatem ascendit. Præterea si coefficientis termini
 x^5 divisi per 7 quadratum sumas, & multiplices per 14, habebis coefficientis
termini x^3 , si sumas cubum, & multiplices per 7, habebis coefficientis termini
 x . Æquatio his conditionibus prædita obtinet radicem $x = m+n$. Postquam
elevaveris $x = m+n$ ad octavam potestatem, æquationem ita distribuere

$x^8 = m^8 + 8mn \cdot \overline{m+n}^6 + n^8$, cujus terminos si transferas, & pro $m+n$

ponas x , invenies

$$x^8 - 8mnx^6 + 20m^2n^2x^4 - 16m^3n^3x^2 + 2m^4n^4 - m^8 = 0. \text{ Ab hac absunt}$$

termini omnes potestatis imparis, & coefficientia determinata sunt uno determinato. Ad æquationem gradus noni inveniendam, eadem methodo utere, atque hanc obtinebis $x^9 - 9mnx^7 + 27m^2n^2x^5 - 30m^3n^3x^3 + 9m^4n^4x - m^9 = 0$,

cujus radix una est $x = m + n$.

28. Mirabuntur fortasse nonnulli, me usque ad æquationem gradus noni methodum produxisse, quæ cæterokin non videtur difficilis intellectu. Verum hoc maxime necessarium visum est, ut eas, quibus æquationes nostræ præditæ sunt, condiciones determinarem. Quisque videt æquationes viduatas secundo termino carere similiter quarto, sexto, aliisque tenentibus sedes pares. Quare æquatio gradus imparis nullum habet terminum, in quo x obtineat potestatem parem; contra in æquationibus gradus paris nullus erit terminus, in quo x teneat impari dimensionem. Ultimus terminus communis omnibus est $-m^p - n^p$: p est exponents maximum incognitæ x . Præterea in æquationibus paribus adest termi-

nus $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$; qui censendus est coefficientis quantitatis x^0 . Termini, qui existunt in æquatione, si excipias m^p, n^p , quibus semper præfigitur signum $-$, si-

gna habent alternantia. Quapropter in æquationibus paribus termino $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$ præfigendum est signum $+$, si p sit numerus pariter par, hoc est ex serie hæc 4, 8, 12, 16 &c.; contra scribendum est $-$, si p sit numerus impariter par, idest ex serie 2, 6, 10, 14 &c. In coefficientibus habetur gradatim mn, m^2n^2, m^3n^3 &c. Verum numeri his præfigendi non ita facile inveniuntur, si excipias illum, qui multiplicat mn , quem constat esse semper $=p$. Ut cæteros inveniam, ex octo illis casibus, quos supra tractavi, efformo tabulam hoc modo.

19. Tabula

	mn	2^2	3^3	4^4	5^5	6^6	7^7
II	2						
III	3						
IV	4	2					
V	5	5					
VI	6	9	2				
VII	7	14	7				
VIII	8	20	16	2			
IX	9	27	30	9			
X	10	35	50	25	2		
XI	11	44	77	55	11		
XII	12	54	112	105	36	2	
XIII	13	65	156	182	91	13	
XIV	14	77	210	294	196	49	2

Mm 2

Iu

In primo ordine horizontali colloso mn , m^2n^2 , m^3n^3 &c., quibus numeri, qui quærentur, sunt præfigendi. In prima columna verticali, quæ est ad sinistram, numeris romanis exprimo gradum æquationis, cui numeri, qui sequuntur, conveniunt. Scribo numeros, qui in octo casibus consideratis inventi sunt, non omisso 1 in

æquationibus paribus, qui ducendus est in $\frac{P}{m^2} \frac{P}{n^2} x^0$.

30. Si perpendo columnam subjectam mn , video, eam esse seriem arithmetican crescentem per unitatem, ejuque terminos imper æquales esse numeris gradum æquationis indicantibus: quare produci poterit nullo negotio, addendo cuilibet numero unitatem. Quilibet numerus columnæ, quæ subest m^2n^2 , est summa cum numeri, qui supra ipsum positus est in eadem columna, tum ejus, qui in columna proxima ad sinistram sita per duas sedes superior est. Ita in gradu quoto numerus quæritus est $2+3$, in sexto $5+4$, in septimo $9+5$, atque ita deinceps. Hac autem ratione in altioribus gradibus hanc columnam sum persequutus. Similis lex valet in omnibus aliis columnis. Quilibet enim numerus est æqualis numero superiori ejusdem columnæ, & numero antecedentis columnæ, qui respondet gradus per duas unitates minori. Ex hac methodo formavi etiam in gradibus superioribus tabulam, quam exnibui, quæ nullo negotio produci potest, quouique libuerit. Ex hac autem tabula æquationem cuiuscumque gradus reperies, cujus radix una est $x = m + n$, quam æquationem deinceps canonicam appellabo.

31. Formularum canonicarum usus modo declarandus est. Æquatio quælibet cuiuscumque gradus, quæ careat terminis omnibus in sedibus paribus, excepto ultimo, & quæ terminorum existentium coefficientes proportionales habeat quantitibus mn , m^2n^2 , m^3n^3 &c. multiplicatis per numeros nostræ tabulæ gradui æquationis convenientes, hæc inquam æquatio recipiet radicem similem radici æquationis cubicæ. Radix autem hæc invenitur per collationem æquationis datæ cum æquatione canonica. In æquationibus secundi, & tertii gradus methodus declarata est, ubi de hisce æquationibus egimus. Incipiamus ab æquatione gradus quarti, quam generatim ita expono $x^4 - 4ax^2 + 2aa - b = 0$. Facta comparatione cum canonica invenio $mn = -a$, $m^4 + n^4 = b$. Eliminata specie fiet $m^4 + \frac{a^4}{m^4} = b$, sive $m^8 - bm^4 = -a^4$, quæ resoluta dabit

$$m = \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}. \text{ Calculus idem determinabit}$$

$$n = \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}. \text{ Radices quartæ unitatis sunt quatuor, nimirum } +1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}. \text{ Quare si signum radicale radicem illam designet, quæ respondet unitatis radici } +1, \text{ hæc inveniemus quatuor}$$

Valores m	Valores n
$\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$	$\sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$
$-\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$	$-\sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}$
$\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1}$	$\sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1}$
$-\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1}$	$-\sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1}$

Ex his valoribus m, n , qui simul multiplicati exhibent $-a$, radices præbet bunt æquationis propositæ, quum valet signum superius. Qui vero simul multiplicati dant $+a$, præbet radices æquationis, quum valet signum inferius.

32. Itaque æquationis $x^4 - 4ax^2 + 2aa - b = 0$ radices erunt

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \\
 x &= -\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \\
 x &= \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1} \\
 x &= -\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1} + \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1}
 \end{aligned}$$

Æquationis vero $x^4 + 4ax^2 + 2aa - b = 0$ radices erunt

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \\
 x &= -\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} + \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \\
 x &= \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1} + \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1} \\
 x &= -\sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1} - \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}} \cdot \sqrt{-1}
 \end{aligned}$$

33. Ad quinti gradus æquationem progredior, quæ est hujusmodi $x^5 - 5ax^2 + 5a^2x - b = 0$. Hæc comparata cum canonica præbet æquationes

$$\begin{aligned}
 \text{duas } mn &= a, \quad m^5 + n^5 = b, \quad \text{ex quibus elicies } m = \sqrt[5]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^5}}, \\
 n &= \sqrt[5]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^5}}. \quad \text{Quinque sunt unitatis radices quintæ, nempe}
 \end{aligned}$$

$$r, \frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{+\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{+\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}. \text{ Qua de}$$

re quinque cum m , tum n valores inveniuntur, ex quibus illi radicem propositæ æquationis expriment, qui simul multiplicati præbent $+a$. Ex hoc criterio radices determinabis, quas, ut brevioribus formulis complectar, pono m, n æquales radicibus illis, quæ respondent unitatis radici quintæ $+1$. Hoc supposito en tibi æquationis radices $x = m + n$

$$x = m. \frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4} + n. \frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m. \frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4} + n. \frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m. \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4} + n. \frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x = m. \frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4} + n. \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

34. Ex hisce exemplis, quæ diligenter persequutus sum, perspicuum est, qua methodo altiores æquationes sint pertractandæ. In æquationibus gradus imparis $x^p - pax^{p-2} \&c. - b = 0$, invenies semper hanc radicem

$$x = \sqrt[p]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} + \sqrt[p]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}, \text{ in qua radicalia signa eas}$$

expriment radices, quæ respondent unitatis radici $p^{\text{esima}} + 1$. In æquationibus paribus, quæ secundum terminum affectum habent signo $-$, ut $x^p - pax^{p-2} \&c. - b = 0$, radices sunt

$$x = \sqrt[p]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} + \sqrt[p]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}$$

$x = -\sqrt[p]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} - \sqrt[p]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}$. Quæ vero secundum terminum habent affectum signo $+$, duas hasce radices recipiunt

$$x = \sqrt[p]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} - \sqrt[p]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}$$

$x = -\sqrt[p]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}} + \sqrt[p]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}$, in quibus omnibus eæ ra-

dices a signis radicalibus designantur, quæ respondent unitatis radici $p^{\text{esima}} + 1$. Censeo, non esse prætermittendum discrimen, quod intercedit inter æquationes gradus imparis, ac gradus paris. Nam in æquatione gradus imparis si a tran-

seat

seat in negativam, mutatur radix $\sqrt[3]{\frac{bb}{4} - a^p}$; quum enim includat a clatam ad potestatem imparem, terminus a^p est positivus, si a sit positiva, negativus, si a sit negativa. Quare non est necesse distinguere casus duos, a positivæ, a negativæ; una enim eademque formula utriusque radicem exhibet per solam mutationem signorum. Non ita accidit æquationi pari: nam vel a sit positiva, vel negativa, clata ad potestatem parem eodem signo afficitur. Quapropter per solam mutationem signorum utriusque casus radices obtinere non possumus, & necessarium est alterum ab altero distinguere, ac separatim radices exhibere, ut præstitum est.

35. Ad alias radices eruendas, necesse est cognoscere omnes radices p^{simas} unitatis, deinde singulas multiplicare tum per $\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}$, tum per $\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}$; demum illas conjungere, quæ simul multiplicatæ efficiunt $+a$, si p sit impar; velposito p pari, si in secundo termino insit $+$, quæ exhibent $-a$, contra quæ dant $+a$, si in secundo termino insit $-$. Quibus rite perspectis satis constat, quænam sint æquationes, cujus radix una potest exprimi ad modum radicis cubicæ cardanicæ.

36. Si huc referas, quæ de sinus, & cosinibus docuimus libro secundo cap. 12, statim cognosces, formulas omnes, ad quas devenimus, construi posse inventis sinus, aut cosinibus logarithmi, aut arcus submultipli, quod facilius fiet, si divides formulas per 2 ita, ut non quæras integram radicem x , sed ejus dimidium. Ut sublata omni dubitatione methodus clare exponatur, tractatio omnis in quatuor hypotheses est distribuenda. Prima hypothesis ponit ambas a, b , positivæ; secunda a positivam, b negativam; tertia a negativam, b positivam; quarta demum utramque negativam. Hypothesis primæ formulæ est hujusmodi,

$$\frac{x}{2} = \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}{2} + \frac{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}}{2}, \text{ quæ duos complectitur casus,}$$

in primo ponitur $\frac{bb}{4} > a^p$, in secundo $\frac{bb}{4} < a^p$. In primo casu comparanda est cum expressione cosinus logarithmi submultipli, nempe cum

$$Cb. \frac{\mu}{p} = \frac{Cb. \mu + Sb. \mu}{2 \cdot r^{\frac{1}{p}} - 1} + \frac{Cb. \mu - Sb. \mu}{2 \cdot r^{\frac{1}{p}} - 1}. \text{ In secunda casu compa}$$

randa erit cum formula cosinus arcus submultipli, nempe cum

$$Cc. \frac{\mu}{p} = \frac{Cc. \mu + \sqrt{-Sc. \mu}}{2 \cdot r^{\frac{1}{p}} - 1} + \frac{Cc. \mu - \sqrt{-Sc. \mu}}{2 \cdot r^{\frac{1}{p}} - 1}.$$

37. Fiat primi casus collatio, & oriuntur æquationes duæ

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu}{r^{1-p}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{His æquationibus simul additis, dela-} \\ \text{de ex prima detracta altera, obtinemus} \end{array} \right.$$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Cb.\mu - Sb.\mu}{r^{1-p}}$$

atque $\frac{Cb.\mu}{r^{1-p}} - \frac{Sb.\mu}{r^{1-p}} = rr$; ergo substitutis valoribus $\frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^p = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, sive $a^p = r^{2-2p}$, demum $a^{\frac{p}{2}} = r$. Quapro-

pter $\frac{x}{2} = Cb.\frac{\mu}{p}$ existente μ eo logarithmo, cujus cosinus = $\frac{b}{r^{p-1}}$,

& sinu toto = $a^{\frac{p}{2}}$. Hujusmodi oritur constructio. Descripta hyperbola æquilatera, cujus sinus totus, seu semiaxis $AC = a^{\frac{p}{2}}$, abscinde $CM = \frac{b}{r^{p-1}}$,

& excita sinum MN . (Fig. 2.) Ex punctis A, N in asymptotum demitte normales AK, NP . Inter CK, CP inveni tot medias proportionales, quot sunt unitates in $p-1$, quarum prima sit CG . Ex G duc GE perpendicularem asymptoto, tum sinum EB , qui determinat cosinum $CB = \frac{x}{2}$. Si p sit numerus impar, prima ex mediis proportionalibus inter CK, CP unicum tantum valorem habet realem, quare una solum erit æquationis radix realis. Si vero p sit numerus par, prima ex mediis proportionalibus duos valores reales habet æquales, unum positivum, alterum negativum, nempe CG, Cg ; quare etiam $Cb.\frac{\mu}{p}$ duos valores æquales habebit, nempe CB, Cb primum positivum, secundum negativum: igitur etiam $\frac{x}{2}$.

38. Inficue alterius casus comparisonem, & ex æquationibus

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1} \cdot Sc.\mu}{r^{1-p}}$$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\mu - \sqrt{-1} \cdot Sc.\mu}{r^{1-p}}, \text{ invenies}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{Cc.\mu}{r^{1-p}}, \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc.\mu}{r^{1-p}}; \text{ atque } \frac{Cc.\mu}{r^{1-p}} + \frac{Sc.\mu}{r^{1-p}} = rr; \text{ ergo}$$

$$\frac{bb}{4}$$

$$\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = \frac{rr}{r^2 - 2p}, \text{ siue } a^p = r^{2p}, \text{ aut } a^{\frac{1}{2}} = r. \text{ Itaque } \frac{x}{2} = Cc. \frac{r}{p},$$

admodum finus totus = $a^{\frac{1}{2}}$, $Cc. \mu = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$. Ex his plano alveo fuit con-

structio. Descripse circulo, cujus finus totus, seu radius $CA = a^{\frac{1}{2}}$, capiatur $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & agatur finus MN (Fig. 2.), erit AN arcus = μ . Hic in tot par-

tes dividatur, quot unitates sunt in p , quarum prima sit $AE = \frac{r}{p}$. Demittatur finus EB , cofinus $CB = \frac{x}{2}$. Non unus tantum est arcus AN , cujus co-

finus est CM , nempe vocata circumferentia circuli = c , & arcu $AN = \mu$, omnes arcus $\mu, c + \mu, 2c + \mu, 3c + \mu$ &c., imo & alii

$\mu, -c + \mu, -2c + \mu, -3c + \mu$ &c., qui, ut vides, sunt numero infiniti. Hos omnes si divides in partes p , invenies novos arcus $A_2 E, A_3 E$ &c., quorum cofinus $C_2 B, C_3 B$ &c. exhibent novos valores radiis $\frac{x}{2}$. Ne tamen putes, valores reales $\frac{x}{2}$ esse numero infinitos; tot enim sunt,

quot unitates existunt in numero p . Nam per divisionem arcuum numero p , inveniuntur puncta numero p . Reliquae divisiones eadem puncta præbent; quare $\frac{x}{2}$ tot valores habet, quot insunt in p unitates.

39. In secunda hypothesisi, ubi a positiva est, b negativa, mutata signo speciei b , hanc formam æquatio induet

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} \right)^{\frac{1}{p}}}{2}, \text{ quæ comparanda}$$

est cum cofinu logarithmi submultipli, si $\frac{bb}{4} > a^p$; cum cofinu arcus submultipli, si $\frac{bb}{4} < a^p$. Comparatio præbet eosdem valores, ac hypothesis prima, cum

hoc tantum discrimine, quod cofinus μ provenit negativus, existente sinu positivo. Quare in casu $\frac{bb}{4} > a^p$ hujusmodi oritur constructio. Descripta hyperbola

æquilatera, cujus finus totus $CA = a^{\frac{1}{2}}$, abscinde $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, quæ, quan-

do negativa inventa est sumitur ad partes cofinuum negativorum. Huic excitetur normalis MN (Fig. 3.), quæ sumitur ad partes sinuum positivorum, quia finus inventus est positivus. Ex N in asymptotum CK demittatur normalis NP . Inter CK, CP inveniuntur tot mediae proportionales, quot sunt unitates in numero $p-1$, quarum prima sit CG . Normalis asymptoto sit GE , & normalis axi EB ; cofinus CB , qui negativus est, erit $= \frac{x}{2}$. Quoniam CG

prima est ex mediis proportionalibus inter CK positivam, & CP negativam, non semper realis est, sed aliquando imaginaria. Si p sit numerus impar, inter CK, CP inveniendæ erunt mediæ proportionales numero pares; atqui inter quantitatem positivam, & negativam numero pares mediæ proportionales possibiles sunt, & reales, quarum prima semper negativa est; ergo si p sit numerus impar, CG erit realis, & negativa; ergo etiam $CB = \frac{x}{a}$ est realis, & negativa. Veruntamen si p sit numerus par, numero impares mediæ proportionales erant inveniendæ; atqui inter quantitatem positivam, & negativam numero impares mediæ proportionales non omnes reales sunt, sed prima, tertia, quinta &c. sunt imaginariæ; ergo quum CG prima esse debeat, erit imaginaria, adeoque etiam $CB = \frac{x}{a}$. Itaque in primo casu secundæ hypothesi, si p sit impar, adest una solum radix realis negativa; si p sit par, radices omnes sunt imaginariæ.

40. In secundo casu ejusdem hypothesi, quum scilicet $\frac{bb}{4} < a^p$, hæc habetur constructio, quæ docet, omnes profus radices esse reales. Descripto circulo, cujus sinus totus, seu radius = $a^{\frac{1}{2}}$, abscindatur negativus cosinus $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{1}{2}}}$, (F. 4.) & excitetur positivus sinus MN. Vocato arcu $A N = \mu$, accipiantur arcus μ , $c + \mu$, $a c + \mu$ &c. tot, quot sunt unitates in p , & facta horum arcuum divisione in partes æquales numero p , determinentur puncta E, $a E$, $3 E$ &c. Ab his definiuntur radices æquationis CB, $C_2 B$, $C_3 B$ &c. Superfluum est, plures arcus accipere, quia eadem profus puncta in divisione redirent.

41. In tertia hypothesi, ubi b positiva est, a negativa, plures casus necesse est distinguere. Primus casus statuet numerum p imparem. In hoc, mutato signo speciei a , æquatio hæc induet formam

$$\frac{x}{a} = \frac{\frac{b + \sqrt{bb + a^p}}{4} + \frac{b - \sqrt{bb + a^p}}{4}}{2}, \text{ quæ, quum nihil imaginarii}$$

contineat, ad hyperbolam est referenda. Nonnemo primoribus oculis formulam intuens fortasse judicabit, eam comparandam esse cum expressione logarithmi submultiplicati. Sed si comparationem instituat, cognoscat statim, sinum totum imaginarium oriri. Quod non indicat, constructionem esse impossibilem, sed formulam non per cosinum, sed per sinum hyperbolicum esse construendam. Hoc ex eo poteris quoque colligere, quia, si secus fieret, sinus major esset cosino, quod in hyperbola omnino impossibile est. Itaque ut formulam referamus ad

$$\text{sinum, eam ita disponimus } \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} + \frac{b}{2} - \left(\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} - \frac{b}{2} \right)}{2}, \text{ quæ}$$

quæ comparanda est cum sequenti

$$sb \cdot \frac{p}{r} = \frac{Cb \cdot \mu + Sb \cdot \mu^{\frac{1}{p}} - (Cb \cdot \mu - Sb \cdot \mu^{\frac{1}{p}})}{2r^{\frac{1}{p}-1}}. \text{Collatio sufficit æqua-$$

tiones duas

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} + \frac{b}{2} &= \frac{Cb \cdot \mu + Sb \cdot \mu}{r^{1-p}} \\ \sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} - \frac{b}{2} &= \frac{Cb \cdot \mu - Sb \cdot \mu}{r^{1-p}} \end{aligned} \right\} \text{ex quibus propter ambiguitatem signorum provenit}$$

$$\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} = \frac{Cb \cdot \mu}{r^{1-p}}, \frac{b}{2} = \frac{Sb \cdot \mu}{r^{1-p}}; \text{ atque } \overline{Cb \cdot \mu}^2 - \overline{Sb \cdot \mu}^2 = rr; \text{ ergo}$$

$$\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = a^p = \frac{r^2}{r^{2-2p}} = r^{2p}; \text{ ergo } a^{\frac{2}{p}} = r. \text{ Describe hyperbolam, cujus}$$

finis totus CA = $a^{\frac{2}{p}}$. Duc AK normalem asymptoto. Accomoda finem MN = $\frac{b}{p-1}$, & demitte in asymptotum normalem NP (Fig. 1.). Inter

CK, CP inveni CG primam ex tot mediis proportionalibus, quæ sunt unitates in numero $p-1$. In casu autem p impari, hæc semper realis est, & unica. Ex G fit GE perpendicularis asymptoto, & ex E ducatur finis EB, qui erit = $\frac{x}{2}$, nempe radici quæsitæ.

42. Quum p est numerus par, admonuimus, mutari formulam aliquantulum,

$$\text{lum, \& hanc valere, } \frac{x}{2} = \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^{\frac{1}{p}}}}{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^{\frac{1}{p}}}}, \text{ quam}$$

constat ad finem esse referendam. In hac vel $\frac{bb}{4} > a^{\frac{1}{p}}$, & formula nihil continebit imaginarij, atque hic erit tertiz hypothesis casus alter; vel $\frac{bb}{4} < a^{\frac{1}{p}}$, & imaginaria radix formulam afficiet. In secundo casu comparanda est cum formula

$$\text{finis logarithmi submultipli. Comparatio autem dabit } \frac{b}{2} = \frac{Cb \cdot \mu}{r^{1-p}},$$

$$\sqrt{\frac{bb}{4} - a^{\frac{1}{p}}} = \frac{Sb \cdot \mu}{r^{1-p}}, \text{ \& } a^{\frac{2}{p}} = r. \text{ Quare constructio parum differt a superiore,}$$

Nam in eadem hyperbola abscinde $CM = \frac{b}{\frac{p-1}{2}}$, & duc sinum MN, & ex

N perpendiculararem asymptoto NP. Inter CK, CP determina CG primam ex tot mediis proportionalibus, quot unitates continet $p-1$; tum ordina asymptoto rectam GE, & axi sinum EB, hic æquabit $\frac{x}{2}$ æquationis radicem.

Quoniam $p-1$ ponitur numerus impar, duæ erunt primæ mediz proportionales inter CK, CP æquales quidem, sed altera positiva, altera negativa, nempe GG, Cg, quare duæ etiam radices = $\frac{x}{2}$, nempe EB positiva, & eb negativa.

43. Quam $\frac{bb}{4} < a^p$, & imaginariæ radices apparent, formula elegantiz causa ita disponatur

$$\frac{x}{2} = \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^p - bb}{4}}}{2} - \left(\frac{\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^p - bb}{4}}}{2} \right)^{\frac{1}{p}}. \text{ Ut hæc possit}$$

comparari cum expressione sinus arcus submultipli, multiplicetur per $\sqrt{-1}$

$$\frac{x}{2} \sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1} \cdot \frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^p - bb}{4}}}{2} - \sqrt{-1} \cdot \left(\frac{\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^p - bb}{4}}}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $\sqrt{-1}$ elevetur ad potestatem p parem, potest exhibere & $+1$, & -1 . Dabit $+$, si p sit ex hac serie 4, 8, 12, 16, 20 &c., hoc est pariter par. Præbebit -1 , si p sit ex serie 2, 6, 10, 14, 18 &c. Id est impariter par. Ponatur p pariter par, atque hic sit tertiæ hypothese casus tertius. In hoc casu $\sqrt{-1}$ elevata ad potestatem p , opportune multiplicata nihil mutat tetminos. Fiat collatio cum exoressione sinus arcus submultipli, & inveniatur

$$\frac{b}{2} = \frac{Cc \cdot \mu}{r^{1-p}}, \sqrt[2]{\frac{bb}{4} + a^p} = \frac{Sc \cdot \mu}{r^{1-p}}, \text{ \& } a^{\frac{1}{2}} = r. \text{ Constructio similis est superiori.}$$

Nam in circulo, cujus sinus totus = $a^{\frac{1}{2}}$, sume cosinum $CM = \frac{b}{\frac{p-1}{2}}$, & duc

sinum MN (Fig. 2.). Arcum AN divide in partes æquales numero p , quarum una sit AE, sinus BE = $\frac{x}{2}$. Radix hæc non est unica, sed tot habentur, quot unitates sunt in numero p . Inveniuntur autem per divisionem arcuum $\mu, c+\mu, 2c+\mu, 3c+\mu$ &c., ut ex superioribus manifestum est, positio arcu AN = μ .

44. Tertiæ hypothese casus quartus, & ultimus ponit, numerum p esse impariter parem, quo in casu quam $\sqrt{-1}$ elata ad potestatem p præbeat -1 , for-

formula in hæc mutatur

$$\frac{x}{2} \sqrt{-1} = \frac{\left(-\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{a^p - bb}{4}} \right)^{\frac{1}{p}} - \left(-\frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{a^p - bb}{4}} \right)^{\frac{1}{p}}}{2}$$

Si hæc conferatur cum expressione finis arcus submultipli, eadem determinationes provenient, quæ in casu superiori, cum hoc solum discrimine, quod tam $Cc.\mu$, quam $Ss.\mu$ negativus exurget. Quare hæc oritur constructio. In circulo, cujus radius $= a^{\frac{1}{2}}$ ad partes cofinum negativorum abscinde $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{1}{2}}}$,

& duc $M \perp N$ (Fig. 4.) ad partem negativorum finium. Arcum $Aa \perp N$ divide in partes æquales p , quarum prima sit AE , cujus finis $EB = \frac{x}{2}$. Reliquæ $\frac{x}{2}$ valores invenies per divisionem arcuum $c + \mu$, $2c + \mu$, $3c + \mu$ &c., postu arcu $Aa \perp N = \mu$.

45. Quartam, & ultimam hypothesim, in qua non minus a , quam b negativa est, quia similis priori, breviter expedio. In primo casu supponenda p numerum imparem, hæc habetur formula

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{bb + a^p - b}{4}} - \frac{b}{2} \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sqrt{\frac{bb + a^p + b}{4}} + \frac{b}{2} \right)^{\frac{1}{p}}}{2}$$

, quæ collata cum expressione finis logarithmi submultipli easdem determinationes præbet, ac in hypothesi superiore, cum hoc tantum discrimine, quod $Sb.\mu$ evadit negativus. Quare in eadem hyperbola ad partes finium negativorum applicetur $MN = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{1}{2}}}$,

& ducta in asymptotum normali NP (Fig. 5.), inveniatur CG prima ex mediis proportionalibus numero $p-1$, quæ, existente p impari, unica est. Agatur asymptoto normalis GE , & finis EB , qui æquabit quæsitam $\frac{x}{2}$.

46. In secundo casu, quum p est par, & $\frac{bb}{4} > a^p$, hæc formula valet

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb - a^p}{4}} \right)^{\frac{1}{p}} - \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb - a^p}{4}} \right)^{\frac{1}{p}}}{2}$$

, quæ præbet easdem determinationes, sed tam $Cb.\mu$, quam $Sb.\mu$ evadit negativus. Quare ad plagam cofinum negativorum accipienda est $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{1}{2}}}$, agendus sinus $M \perp N$

(Fig.

(Fig. 3.) ad partes negativorum, & ducenda normalis asymptoto 2 N 2 P. Inter C K positivam, & C 2 P negativam, invenienda est prima ex medijs proportionalibus $p-1$. Verum quum p est numerus par, hæc est imaginaria. Quare in hoc casu radices omnes $\frac{x}{2}$ imaginariæ sunt.

47. In tertio casu, ubi $\frac{bb}{4} < a^p$, & p est numerus pariter par, formula est hujusmodi

$$\frac{x}{2} \sqrt{-1} = \frac{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^p}{4} - \frac{bb}{4}} \right)^{\frac{1}{p}} - \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^p}{4} - \frac{bb}{4}} \right)^{\frac{1}{p}}}{2}, \text{ ex}$$

qua facta comparatione prodit $Cc. \mu$ negativus, & $Sc. \mu$ positivus. Quare in eodem circulo radii $= a^{\frac{1}{2}}$ sume negativum cosinum $CM = \frac{b}{p-1}$, & posi-

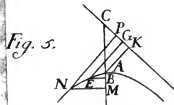
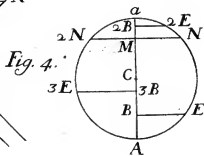
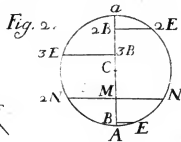
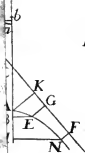
tivum sinum MN (Fig. 4.). Divide arcum AN $= \mu$ in partes numero p , quarum una sit AE. Hujus sinus EB æquabit radicem $\frac{x}{2}$, & similis divisio arcuum $c + \mu, 2c + \mu, 3c + \mu, \&c.$ reliquis radices præbebit.

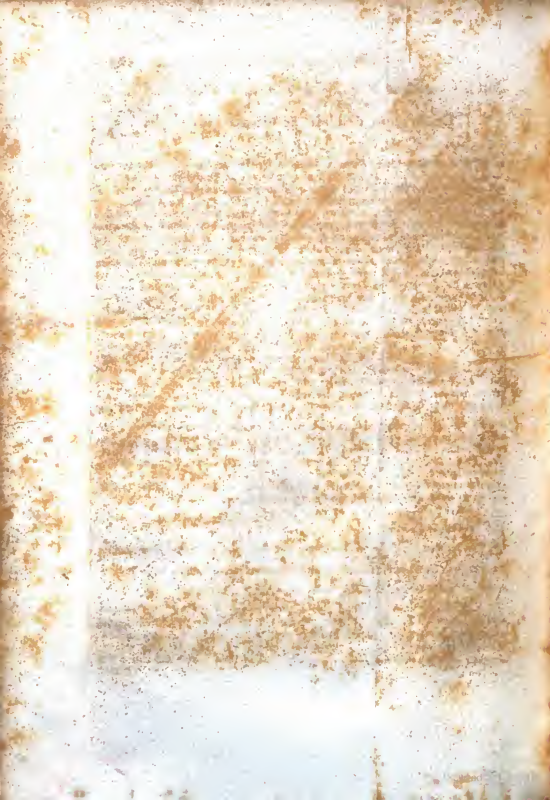
48. In quarto casu, in quo ipsæm suppositis p est numerus impariter par, formula hæc obtinetur

$$\frac{x}{2} \sqrt{-1} = \frac{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{-1} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^p}{4} - \frac{bb}{4}} \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{b}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^p}{4} - \frac{bb}{4}} \right)^{\frac{1}{p}}}{2}. \text{ Si fiet}$$

collatio cum expressione sinus arcus submultipli, inveniatur $Cc. \mu$ positivus, at $Sc. \mu$ negativus. Quare ad partes positivorum cosinum sumptus $CM = \frac{b}{p-1}$,

agatur sinus negativus M 2 N (Fig. 2.). Arcus A 2 N $= \mu$ dividatur in partes æquales p , quarum prima sit AE. Ejus sinus EB exhibet radicem $\frac{x}{2}$. Reliquas radices (omnes enim sunt reales) invenies per divisionem arcuum $c + \mu, 2c + \mu, 3c + \mu, \&c.$ Quamquam hæc methodus resolutionis paucas æquationes completitur, tamen nulla alia hæcenus latius patet.





standam ingentem utilitatem habet, quod consequitur Theorema. In qualibet serie terminus generalis est æqualis summæ omnium terminorum usque ad n inclusive, dempta summa omnium terminorum usque ad $n-1$ inclusive. Res est per se evidens. Nam si summæ terminorum $n-1$ addas terminum n obtines summam terminorum n .

4. Ex hoc simplicissimo theoremate, in quo continetur principium idoneum inveniendæ summæ generali plurimum serierum, data alicujus seriei summa generali facili negotio invenies ejusdem terminum generalem. Namque si in formula summæ generalis pro n scribas $n-1$, obtines summam terminorum usque ad terminum $n-1$, quam si demas ex summa omnium terminorum usque ad terminum n , nancisceris terminum generalem. Si alicujus seriei summa generalis sit $= 3n^2 - 2n$, pro n scribe $n-1$, ut habeas $3(n-1)^2 - 2(n-1) = 3n^2 - 8n + 5$. Hanc deme ex superiore, ut fiat $6n - 5$; hic erit seriei generalis. Voca summam omnium terminorum usque ad terminum n $= S$, eandem summam usque ad terminum $n-1$ $= s$, quæ duæ quantitates S , s sunt eadem functio prima n , altera $n-1$. Voca terminum generalem t , erit $S - s = t$.

5. Hoc quidem adnotandum est sedulo, terminum generalem t esse $= S - s$, si S sit seriei vera summa. Verum si $t = S - s$, quæ duæ S , s ita sunt affectæ, ut si in prima pro n ponatur $n-1$, oriatur secunda, non proinde sequitur S esse exactam seriei summam. Fieri enim potest, ut S differat a vera summa per datam aliquam, & constantem quantitatem independentem ab n .

Ita tamen $\frac{6n-3}{2} = \frac{3n^2-1}{2} - \left(\frac{3 \cdot n-1-1}{2} \right)$, tamen series, cujus terminus generalis $= \frac{6n-3}{2}$, non habet pro summa $\frac{3n^2-1}{2}$, quæ minor est vera summa quantitate $\frac{1}{2}$. Ut autem cognoscas, utrum S sit vera summa nec ne, habes

critérium patens, ac facile. Pone $n=1$. In hac suppositione si terminus generalis $t=S$, hæc exhibet veram summam; si terminus generalis major sit S , harum differentia addenda est S , ut vera summa habeatur; contra si terminus generalis minor sit S , ad exactam summam obrinendam ex S differentia demenda est. Ita in exemplo adducto terminus generalis $\frac{6n-3}{2}$, factio $n=1$, evadit $= \frac{3}{2}$; at $S = \frac{3n^2-1}{2}$ evadit $= 1$; ergo terminus generalis excedit S per $\frac{1}{2}$. Hæc itaque differentia addenda est S , ut exacta summa habeatur, quæ proinde erit $\frac{3n^2-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3n^2}{2}$.

6. Quæ dicta sunt hæcenus clarissime patefaciunt, tum ex dato termino generali inveniri posse summam generalem seriei, quum ejusmodi functio n inveniri potest, ex qua si detrahatur eadem functio $n-1$, terminus generalis refl-

restituatur. Verum solutio hujus problematis ita ardua est, atque difficilis, ut nulla spes sit eam inveniendi, tamen termini generalis formulæ maxime simplices proponantur. Quapropter in hac rerum difficultate illud consilium capiamus, necesse est, quod in aliis casibus permultis capi solet, ut relicto inverso problemate ad directum nos convertamus, illoque soluto plurimos, eosque late patentem canones statuamus, in quibus summam serierum ex dato termino generali cognoscamus. Nimirum nobis proponamus, oportet, series formulas exhibentes summas generales serierum, & ex illis determinemus, quibus conditionibus affecti esse debeant termini generales. Ita cognoscemus, quam summam habeat series, cujus terminus generalis inventa conditione præditus est.

7. In hac methodo adhibenda, ea cautio negligenda non est, ut eas formulas seligamus, quæ esse possunt exactæ summæ serierum. Sed criterium paullo ante traditum est exactæ summæ discernendi ab illis, quæ exactæ esse non possunt. Præterea omittenda non est alia animadvertio, quæ ostendit limites, quibus utilitas hujus methodi continetur. Sumpta qualibet S , si in ea scribatur $n-1$ pro n , ut fiat s , erit terminus generalis $S-s$. Donec terminus generalis hanc formam tenet, inutilis est methodus. Namque series, cujus terminus generalis est $S-s$, constat duabus seriebus, quarum prima habet pro termino generali S , altera, quæ a prima deducenda est, habet pro termino generali s . Si istæ duæ series formentur, statim apparebit, primum terminum primæ elidere secundum secundæ, secundum primæ elidere tertium secundæ, atque ita deinceps. Quare nihil remanebit, nisi ultimus primæ, a quo deducendus est primus secundæ.

8. Exemplo res videtur declaranda. Si accipiamus summam $S = \frac{n}{2+n}$, posita in hac $n-1$ pro n fiet $s = \frac{n-1}{1+n}$; ergo terminus generalis $S-s = \frac{n}{2+n} - \left(\frac{n-1}{1+n} \right)$. Non mutata forma hujus termini generalis, formetur series, nempe A orta ex termino generali $\frac{n}{2+n}$, & B orta ex termino generali $\frac{n-1}{1+n}$, nimirum.

$$(A) \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{5}{7} \dots \frac{n-1}{1+n}, \quad \frac{n}{2+n}$$

$$(B) \quad -\frac{0}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{4}, \quad -\frac{3}{5}, \quad -\frac{4}{6} \dots \dots \dots -\left(\frac{n-1}{1+n} \right)$$

Quis non videt, harum serierum terminos omnes sese elidere ex contrarietate signorum, præter ultimum A, & primum B. Summa itaque erit $\frac{n}{2+n} - \frac{0}{2}$, sive simplicius $\frac{n}{2+n}$. Quare donec terminus generalis superiorem formam retineat, nihil methodus habet utilitatis.

9. Quamobrem ad utilitatem methodi necesse est, ut terminus generalis $S-s$ per artificia analyticos in aliam omnino formam transmutetur, qua posita series ex termino generali orta non habeat terminos, ut antea, seclidentes. Quam hoc præstare licet, licet autem sepiissime, utilis erit methodus; sed autem erit negligenda. Si duæ fractiones exempli superioris ad eandem denominationem reducantur, invenies $S-s = \frac{2}{1+n \cdot 2+n}$. Forma hæc nullo

O O labo-

laborat incommodo. Ex hoc autem termino generali series exoritur

$\frac{2}{2 \cdot 3}, \frac{2}{3 \cdot 4}, \frac{2}{4 \cdot 5}, \frac{2}{5 \cdot 6}, \frac{2}{6 \cdot 7}$ &c., cujus summa erit $= \frac{n}{2+n}$. Quare summa seriei in infinitum productæ $= \frac{n}{n} = 1$. Tametsi cautiones adhibendæ

utilitatem principii, ac methodi coarctare videantur; tamen infinitum esse serieum numerum, quarum summa generalis hac ratione determinatur, quæ tradituri sumus, clarissime patefacient.

10. Exordiamur a seriebus, quarum summa generalis exprimitur per functionem numeri terminorum $= n$, in cujus divifore eadem n locum non habet. Quoniam criterium illud, quod *N. 5* exposui, aperte me docuit, formulas, quæ continent terminum constantem, & independentem ab n , non posse exhibere veras summas serieum, iccirco has omitrens illas dumtaxat considerabo, quarum termini omnes continent n , hoc est numerum terminorum. In hac autem investigatione gradatim procedens, inquiram primum, quænam sit series, cujus summam generalem exhibet formula An , existens A qualibet quantitate. Quando $S = An$, scripta $n-1$ pro n , erit $s = A(n-1)$; igitur $S - s = s = A$. Ex invento termino generali A , in quem non ingreditur n , quisque videt, oriri seriem terminorum æqualium A, A, A, A &c., quorum summam $= An$, nemo unus per sese non cognoscit.

11. Contemplor deinde series, quarum summa generalis sit $S = An + Bn^2$. Pro n colloco $n-1$, & fit

$s = \frac{A(n-1)^2 + B(n-1)^2}{A(n-1) + B(n-1)^2}$; ergo $S - s = \frac{A}{-B + 2Bn}$. Ex hoc termino generali efformetur series

A, A, A, A, A &c.

$B, 3B, 5B, 7B, 9B, 11B$ &c., quam divisi in duas, quarum prima est series terminorum æqualium, altera est series terminorum crescentium secundum progressionem numerorum imparium. Tota autem series est terminorum crescentium in progressionem arithmetica, in qua singuli termini a subsequentiibus deducti exhibent eandem differentiam $= 2B$. Terminus autem generalis seriei $=$

$\frac{A}{-B + 2Bn}$; summa autem $= An + Bn^2$. Quod hæc vera sit summa, constat, quia, posita $n=1$, in utraque formula termini generalis, & summæ eadem oritur quantitas. Quapropter si terminus generalis seriei contineat solam n ad linearem potestatem elevatam, nihil est facilius, quam ejusdem summam exhibere. Nam terminum, quem non multiplicat species n , fac $= A - B$; coefficientes autem n pone $= 2B$, & per duas æquationes determinabis valores A, B , quos si introducas in formulam summæ, summam obtinebis. Sit causa exempli terminus generalis $15 + 3n$. Fac $A - B = 15, 2B = 3$; ergo

$A - \frac{3}{2} = 15$, five $A = \frac{33}{2}$, & $B = \frac{3}{2}$; ergo seriei summa erit $= \frac{33n + 3n^2}{2}$.

12. Verum si series dentur, cujus differentiarum primæ constantes sint, ex nostra methodo determinari poterit cum ejus terminus generalis, tum ejus summa. Namque duo primi termini seriei datæ æquantur cum duobus primis terminis seriei canonicæ, vel termino generali

$\frac{A}{-B + 2Bn}$ æqualis fiat primus datæ seriei

tici

rii terminus, facta $n=1$; deinde terminus alter, facta $n=2$. Per duas æquationes determinentur valores A, B , quibus habitis non minus summa, quam terminus generalis datæ seriei obtinetur. Ad exemplum propono seriem 3, 7, 11, 15, 19 &c., cujus differentiæ primæ = 4.

$$\begin{array}{l} \text{Pono } 3 = -\frac{A}{B} + 2B \\ 7 = -\frac{A}{B} + 4B \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Prima æquatio dematur ex secunda, \& fit} \\ \end{array} \right.$$

$4 = 2B$, & $B=2$; ergo $A=1$. Si valores istos collocemus in formulis canonicis inveniemus seriei terminum generalem $= -1 + 4n$, summam vero $= n + 2n^2$.

13. Transeo ad series, quarum indefinita, & generalis summa sit $S = An + Bn^2 + Cn^3$ in qua formula posito $n-1$ pro n inuenio

$$s = +B - 2Bn + Bn^2 - C + 3Cn - 3Cn^2 + Cn^3. \text{ Si } s \text{ auferatur ab } S, \text{ exurget terminus generalis.}$$

$$S - s = s = -\frac{A}{B} + 2Bn + C - 3Cn + 3Cn^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ex hoc termino generali formetur se-} \\ \text{ries, nempe} \end{array} \right.$$

A, A, A, A, A &c. | quan divisi vult in tres. Prima est ter-
 $B, 3B, 5B, 7B, 9B$ &c. | minorum æqualium; secunda terminorum-
 $C, 7C, 19C, 37C, 61C$ &c. | progredientium in ratione arithmetica se-

condum numeros impares; demum tertia est ejuismodi, cujus secundæ differentiæ constantes sunt = $6C$, quæ proprias & seriei univertæ conveniat necesse est. Ex præmissa analysi apertum est, quæ ratione dato seriei termino generali summa inveniat. Comparantur enim singuli termini formulæ datæ cum singulis formulæ canonicæ, & tres æquationes formantur, ex quarum ultima definitur

C , ex secunda B , ex prima A . Seriei terminus generalis datus sit $= 1 - n + n^2$, qui collatus cum canonicæ suppediat tres æquationes $1 = A - B + C$,

$-1 = 2B - 3C$, $1 = 3C$; ex ultima habes $C = \frac{1}{3}$, qui substitutus in reliquis dat duas $1 = A - B + \frac{1}{3}$, $-1 = 2B - 1$. Ex harum secunda $B = 0$;

quare prima fiet $1 = A + \frac{1}{3}$, hinc $A = \frac{2}{3}$. Valores isti substituantur in foe-

mula summæ, quæ fiet $= \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n^3$.

14. Præterea ex eadem analysi discimus rationem determinandi tum terminum generalem, tum summam seriei, cujus secundæ differentiæ constantes sunt. Nam per collationem trium terminorum determinabuntur A, B, C , quibus cognitis terminus generalis, & summa item cognoscitur. Exemplo unico aperiam methodum. Sit series 9, 13, 21, 31, 49, 67 &c., cujus differentiæ secundæ = 4. Si conferantur hujus seriei tres primi termini cum tribus terminis seriei nostræ canonicæ, vel cum termino generali positis in ipso pro n successively 1, 2, 3, orientur tres æquationes, quas primi ordinis dicam. Dematur pri-

ma ex secunda, secunda ex tertia, & orientur duæ, quas, dicam secundi ordinis. Ex his prima auferatur a secunda, & unica provenit æquatio tertii ordinis, per quam determinatur C, cujus valor fit introducatur in aliquam secundi ordinis, inveniatur B. Ex una autem primi ordinis, introductis valoribus C, B, determinatur A, quibus habitis habetur seriei terminus generalis, & summa. En tibi calculum. Comparatio præbet hujusmodi æquationes

Primi ordinis	Ordinis secundi	Ordinis tertii	Quære
$9 = A + B + C$	$4 = 2B + 6C$	$4 = 6C$	$C = \frac{2}{3}$
$13 = A + 3B + 7C$	$8 = 2B + 12C$		
$21 = A + 5B + 19C$			

qui valor positus in prima ordinis secundi dat $B = 0$. Uterque valor introductus in primam ordinis primi præbet $A = 8 + \frac{1}{3}$. Itaque seriei terminus generalis

$$= 9 - 2n + 2n^2; \text{ summa vero} = 8 + \frac{1}{3} \cdot n + \frac{2}{3} n^2.$$

15. Simili modo si inquiratur series, cujus sit summa $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$, inveniatur terminus generalis

A	ex quo gignitur series habens tertias differentias constantes. Eandem methodum sequens inveniatur series, cujus summa sit
$-B + 2Bn$	$An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5$, habere terminum generalem.
$+C - 3Cn + 3Cn^2$	
$-D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3$	

A	Series autem, quæ ex hoc nascitur, habebit quartas differentias constantes.
$-B + 2Bn$	
$+C - 3Cn + 3Cn^2$	
$-D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3$	
$+E - 5En + 10En^2 - 10En^3 + 5En^4$	

16. Ex hoc progressu illud colligas velim, quod ad facilitatem praxim maxime conducit, nimirum seriem, cujus differentie ^{esima} constantes sunt, habere pro termino generali formulam, in qua n ascendit ad potestatem m ; & seriem habentem terminum generalem, in quo n prædita est exponente m , habere pro summa formulam, quæ continet terminum n^{m+1} , & caret termino, a quo n absit. Hæc animadversio facillimam praxim tibi suppeditat. Data sit series, cujus differentie aliquæ constantes sint. Ad inveniendum terminum generalem assume formulam $A + Bn + Cn^2$ &c., cujus ultimus terminus habeat exponens æquale gradui constantium differentiarum. Tum facta successive $n = 1, 2, 3$ &c. æqua terminum generalem cum primis seriei terminis, ut efformentur tot æquationes, quot sunt assumptæ indeterminatæ A, B, C &c. Has determina, & quaesitum terminum generalem invenies. Si vero datus sit terminus generalis, ad inveniendam summam assume $An + Bn^2 + Cn^3$ &c., in qua exponens maximum n unitate superet exponens maximum termini generalis. In formula assumpta scribe $n - 1$ pro n , & formulam quæ nascitur ex assumpta detrahe. Formulæ residuæ termini singuli æquantur datæ singulis terminis, & tot æquationes orientur, quot sunt indeterminatæ A, B, C &c. Has determina, & quaesitæ summæ poteris.

17. Exem-

17. Exemplo proxim declarabo. Data sit series 1, 9, 24, 50, 90, 147, 224, 324 &c., cujus differentie tertie constantes sunt. Assumo formulam tertie

gradus $A + Bn + Cn^2 + Dn^3$. Facta n successive = 1, 2, 3, 4, infitue æquationem cum primis quatuor seriei terminis, & habebis æquationes, quas primi ordinis voco; tum facta deductione superiorum ab inferioribus nascuntur æquationes secundi, tertii ordinis &c. En calculum.

Primi ordinis	Secundi ordinis
$A + B + C + D = 1$	$B + 3C + 7D = 9$
$A + 2B + 4C + 8D = 9$	$B + 5C + 19D = 24$
$A + 3B + 9C + 27D = 24$	$B + 7C + 37D = 50$
$A + 4B + 16C + 64D = 50$	
Ordinis tertii	Ordinis quarti
$2C + 12D = 8$	$6D = 3$. Ex quibus facile colliges
$2C + 18D = 11$	

$A = 0, B = \frac{1}{2}, C = 1, D = \frac{1}{4}$; ergo terminus generalis seriei est

$$\frac{1}{2}n + n^2 + \frac{1}{4}n^3.$$

18. Nunc datus sit seriei terminus generalis $\frac{1}{2}n + n^2 + \frac{1}{2}n^3$. Assume tamquam summam $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$. In hac pro n scribe $n-1$, ut habes

$-A + An$	Hanc deme ex assumpta, ut ha-
$+B - 2Bn + Bn^2$	beas terminum generalem
$-C + 3Cn - 3Cn^2 + Cn^3$	
$+D - 4Dn + 6Dn^2 - 4Dn^3 + Dn^4$	

A	conferendum cum dato. Collatio autem
$-B + 2Bn$	exhibebit æquationes quatuor
$+C - 3Cn + 3Cn^2$	
$-D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3$	

$$A - B + C - D = 0, 2B - 3C + 4D = \frac{1}{2}, 3C - 6D = 1, 4D = \frac{1}{2}, \text{ ex}$$

quibus invenies $D = \frac{1}{8}, C = \frac{7}{12}, B = \frac{7}{8}, A = \frac{5}{12}$. Quare seriei summa

$$= \frac{5n}{12} + \frac{7n^2}{8} + \frac{7n^3}{12} + \frac{n^4}{8}. \text{ Omnium itaque serierum habentium differentias a-}$$

liquas constantes, quæ algebraicæ vocari solent, tum terminus generalis, tum ex termino generali summa determinatur.

19. Progredior ad series, quarum generalis summa exprimitur per fractionem formatam ex specie n functionibus rationalibus. Ordior ab illis seriebus, quæ in infinitum productæ summam obtinent finitam. Quomobrem necesse est, ut in formula generalis summæ maximum exponens speciei n idem sit tum in numeratore, tum in denominatore fractionis. Hac conditione servata gradatim procedam, ac primum inquiram, quænam sit series, cujus generalis summa

$$= \frac{Ln}{A+Bn}. \text{ In hac pro } n \text{ scribe } n-1, \text{ ut habeatur terminus generalis}$$

Ln

$\frac{Ln}{A+Bn} - \frac{L \cdot n-1}{A+B \cdot n-1}$, sive reductis terminis ad eandem denominationem

$\frac{AL}{A+B \cdot n-1 \cdot A+Bn}$. Si ex hoc termino generali formetur series, ejus

summa = $\frac{Ln}{A+Bn}$; quare summa seriei in infinitum productæ fiet = $\frac{Ln}{Bn} = \frac{L}{B}$.

20. In numeratore termini generalis habetur quantitas constans independens ab n . In denominatore habentur factores duo primi gradus, qui non differunt nisi per hoc, quod in uno B multiplicatur per $n-1$, in altero per n . Itaque si uterque factor consideretur tamquam terminus generalis, uterque exhibebit seriem eandem, cujus differentia = B , sed secunda incipit a secundo termino primæ; Nam series, cujus terminus generalis = $A+B \cdot n-1$, est $A, A+B, A+2B, A+3B$ &c.; series autem termini generalis $A+Bn$ est $A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ &c., quæ incipit a prioris termino altero. Quapropter ex termino generali invento hæc oritur series

$\frac{AL}{A \cdot A+B}, \frac{AL}{A+B \cdot A+2B}, \frac{AL}{A+2B \cdot A+3B}$ &c., ejus summa = $\frac{Ln}{A+Bn}$, & posito n infinito = $\frac{L}{B}$.

21. Ad exemplum proponatur series

$\frac{6}{2 \cdot 7}, \frac{6}{7 \cdot 12}, \frac{6}{12 \cdot 17}, \frac{6}{17 \cdot 22}, \frac{6}{22 \cdot 27}$ &c. Si consideres duas series, quæ consistunt divitores, nempe $2, 7, 12, 17, 22$ &c. & $7, 12, 17, 22, 27$ &c. videbis utramque esse seriem primi ordinis, quia utriusque differentia = 5 , & alteram incipere a secundo termino primæ. Igitur series proposita pertinet ad nostrum canonem, & habet summam generalem algebraicam. Ejus terminus generalis invenitur esse

$\frac{6}{-3+5n \cdot 2+5n} = \frac{6}{2+5 \cdot n-1 \cdot 2+5n}$. Ex comparatione autem constat $B=5, A=2$. Ut definiatur L , advertet $AL=6$, ergo $L=3$. Quare seriei summa generalis = $\frac{3n}{2+5n}$, & posito n infinito = $\frac{3}{5}$.

22. Transeo ad series, quarum summa fit $\frac{Ln+Mn^2}{A+B \cdot n-1 \cdot A+Bn}$. In hac si pro n scribatur $n-1$, prodit $\frac{L \cdot n-1+M \cdot n-1^2}{A+B \cdot n-2 \cdot A+B \cdot n-1}$. Dux fractiones continent ambæ divisorem $A+B \cdot n-1$. Quare ut redigantur ad eandem denominationem, satis est, multiplicare numeratorem primæ per $A+B \cdot n-2$, & numeratorem secundæ per $A+Bn$. His operationibus effectis, detractaque secunda fractione a prima, resultabit terminus generalis.

AL.

$$\begin{array}{r} AL - BLn \\ - AM - BMn \\ + 2AMn \end{array}$$

$\frac{AL - BLn - AM - BMn + 2AMn}{A + B \cdot n - 2 \cdot A + B \cdot n - 1 \cdot A + Bn}$. In hac formula numerator est

terminus generalis seriei primi ordinis, dummodo coefficienti speciei n non evanescat; hoc enim evanescente series est quantitas æqualium. Singuli divisoris factores præbent seriem primi ordinis, imo eandem sed ita, ut secunda incipiat a secundo termino primæ, tertia a tertio. Itaque perspicuum est, quænam conditiones requiruntur, ut series fractionum recipiant summam præsentis formæ.

23. Accipe exemplum in serie

$$\frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{7}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \frac{10}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \frac{13}{5 \cdot 6 \cdot 7}, \frac{16}{6 \cdot 7 \cdot 8} \text{ \&c. Series numeratorum}$$

habet terminum generalem $1 + 3n$. Primi factores in divisore constituunt seriem eandem, quam reliqui; sed secundus, & tertius terminus primæ est primus secundæ, & tertius. Tertius autem terminus generalis $= 3 + n$. Facta collatione cum formula canonica invenies $A=3, B=1$. Præterea $3L - 3M = 1, -L - M + 6M = 3$,

ex quibus nascitur $M = \frac{5}{2 \cdot 3}, L = \frac{7}{2 \cdot 3}$. Propositæ igitur seriei summa eva-

dit $= \frac{7n + 5n^2}{2 \cdot 3 \cdot 2 + n \cdot 3 + n}$, & acceptis terminis numero infinitis $= \frac{5}{6}$

24. Si in termino generali numerator esset divisibilis per unum ex factoribus extremis, peracta divisione pertineret ad canonem superiorem. Si in denominatore deficiat factor medius, oportet multiplicare tam numeratorem, quam denominatorem termini generalis per factorem, qui deest, ut formula pertineat ad canonem præsentem.

25. Progredior ad series, quarum summa fit

$$\frac{Ln + Mn^2 + Nn^3}{A + B \cdot n - 2 \cdot A + B \cdot n - 1 \cdot A + Bn}$$

. Ut inveniat terminus generalis

$$A + B \cdot n - 2 \cdot A + B \cdot n - 1 \cdot A + Bn$$

pro n scribe in hac $n-1$, ut fiat

$$-L + Ln$$

$$+ M - 2Mn + Mn^2$$

$$- N + 3Nn - 3Nn^2 + Nn^3$$

. Ut hæc duæ formulæ redigan-

$$A + B \cdot n - 3 \cdot A + B \cdot n - 2 \cdot A + B \cdot n - 1$$

tur ad eandem denominationem, satis est multiplicare primam per

$$A$$

$A + B \cdot n - 3 = -3B + Bn$, & secundum per $A + Bn$. Facta hujusmodi multiplicatione, & deductione alterius a prima, oritur terminus generalis:

$$\begin{aligned}
 &AL - 2.BLn + 3.ANn^2 \\
 &- AM + 2.AMn - 3.BNn^2 \\
 &+ AN - BMn - BMn^2 \\
 &\quad - 3.ANn \\
 &\quad + .BNn
 \end{aligned}$$

Series, quæ nasci-

$$A+B.n-3, A+B.n-2, A+B.n-1, A+B.n$$

tur ex numeratore hujus termini generalis eff series secundi ordinis, vel primi, si n^2 habeat coefficientis = 0, vel quantitatum æqualium, si etiam n multiplicetur per coefficientis = 0. Quatuor factores componunt divisorem, quorum singuli sunt termini generales ejusdem seriei primi ordinis; sed secunda ex his seriebus incipit a secundo termino primæ, tertia a tertio, quarta a quarto.

26. Exemplum præbeat series

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13}, \frac{7}{7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16}, \frac{17}{10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19}, \frac{31}{13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22}, \text{ \&c. Facile inve-} \\
 &\text{niens } A=10, B=3. \text{ Terminus generalis numeratoris } = -1 + 2n^2. \text{ Quare ut} \\
 &\text{determines } L, M, N, \text{ institue æquationes } 10L - 10M + 10N = -1, \\
 &-6L + 17M - 27N = 0, -3M + 21N = 2, \text{ ex quibus elicies } L = \frac{-19}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7}, \\
 &M = \frac{7}{5 \cdot 8}, N = \frac{101}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}. \text{ Quare seriei summa generalis erit} \\
 &\frac{-19}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} n + \frac{7}{5 \cdot 8} n^2 + \frac{101}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} n^3, \text{ positaque } n \text{ infinita } = \frac{101}{3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{101}{22680}.
 \end{aligned}$$

27. Si in termino generali numerator esset divisibilis per unum ex factoribus extremis, casus pertineret ad canonem superiorem; summæ enim divisor a duobus tantum factoribus componeretur. Si uterque factor medius desit, divisor præbetur duas series, quarum altera incipit a quarto termino alterius. Si primus tantum ex factoribus mediis desideretur, tres prodibunt series, quarum secunda incipit a tertio, tertia a quarto termino primæ. Demum si desit secundus ex factoribus mediis, secunda series incipit a secundo, tertia a quarto termino primæ. Quæ hæc contingunt, sufficiet, multiplicare numeratorem, & denominatorem termini generalis per illos factores, qui desiderantur, efficiendo ut in divisore quatuor sint factores, qui constituent quatuor series ita, ut secunda a secundo, tertia a tertio, quarta a quarto termino primæ sumat initium. Ad canonem præsentem hoc modo formula reduceretur.

28. Progressus, quem adhuc sequuti sumus, aperte docet, quænam conditiones sint, oportet, in termino generali, ut series summam recipiat algebraicam, & in infinitum producta summam habeat finitam. Nimirum denominator debet constare pluribus factoribus, quorum singuli præbeant series arithmeticas, quarum secunda incipiat a secundo termino primæ, tertia a secundo termino secundæ, atque ita deinceps; deinde in numeratore potestas maxima speciei n non debet excedere numerum factorum dempto 2. Si in denominatore aliqui ex factoribus mediis desint, per hos multiplicetur & numerator, & denominator, ut requisitæ conditiones impleantur. Quoties habes terminum generalem hujus formæ

ad 2

ad inveniendum summam hanc sequere proxim. Confinge formulam, cujus numerator careat termino, qui non contineat n , & exponents maximum n sit æqualis numero factorum termini generalis dempto 1; omnium autem terminorum coefficients L, M, N , &c. fiat indeterminati; hujus autem formulæ denominator sit idem ac in termino generali dempto primo factore. Summa enim hanc formulam habeat, necesse est. In hac formula pro n scribe $n-1$, tum redactis duabus formulis ad eandem denominationem secundam a prima detrahe. Quæ resultat erit comparanda tum dato termino generali, & per comparisonem determinandi coefficients L, M, N &c., quorum valores si in supposita formula ponas, habes summam quæsitam. Quæ dicta sunt, satis superque proxim ostendunt.

29. Supposuimus in formula summæ exponentem maximum speciei n in numeratore æqualem esse numero factorum denominatoris, sive exponenti maximo ejusdem n . Quod si accidat, ut maximus exponents n minor sit in numeratore, quam in denominatore, sufficiet ponere coefficients maximarum dimensionum $= 0$, tum eosdem delere in formula termini generalis, ut hic habeatur. In hujus autem numeratore etiam pro hoc casu exponents maximum speciei n ad minimum duabus unitatibus minor est numero factorum, seu exponents denominatoris. Quare praxis numeri superioris hanc quoque casum felicissime absolvit.

30. Si exponents n in numeratore summæ superet numerum factorum denominatoris, tum multiplicatis inter se factoribus, manifestum est, fieri posse divisionem. Hæc peragatur, donec deveniamus ad ejusmodi exponents n , qui sit æqualis numero factorum. Quod ubi obtinnerimus, ab ulteriori divisione abstinemus. Hac operatione instituta, formula dividetur in duas; alteram integram, alteram fractam. Primum inveniatur terminus generalis seriei, cujus integra sit summa, in quo termino generali exponents n erit minor unitate, quam in formula summæ, ut constet ex hoc eodem capite. Deinde inveniatur terminus generalis seriei, cujus fracta formula sit summa. In denominatore augebitur unitate numerus factorum, & in numeratore exponents n fiet hoc numero ita aucto saltem binario minor.

31. Quapropter si datus sit terminus generalis seriei, in cujus numeratore exponents speciei n vel sit æqualis, vel major numero factorum, multiplicatis inter se factoribus fiat divisio, donec exponents numeratoris minor sit exponents denominatoris. In duas formulas, primam integram, alteram fractam distribuitur terminus generalis. Series effecta ex parte integra, semper erit summabilis algebraice. Quæ formatur ex fractione summam algebraicam accipiet, si index speciei n in numeratore sit ad minimum binario minor numero factorum, non item si sit unitate minor.

32. Proponamus exemplum. Sit terminus generalis

$$\frac{a + c - 5n^2 + 5n^3 + 5n^4 + n^5}{1+n \cdot 2+n \cdot 3+n}$$

in quo tres solum sunt factores series, & maximus exponents n in numeratore $= 5$. Factores multiplicentur, ut habeatur $6 + 11n + 6n^2 + n^3$. Fiat divisio, donec exponents numeratoris sit minor exponents denominatoris, & inveniatur $-n + n^2 + \frac{2 + 6n + cn^2}{1+n \cdot 2+n \cdot 3+n}$. Quantum

pertinet ad seriem, cujus terminus generalis $= -n + n^2$, ea algebraicam habet

summam. Quantum ad alteram, cujus terminus generalis $= \frac{1 + 6n + cn^2}{1 + n \cdot 2 + n \cdot 3 + n}$,

ea summam algebraicam accipiet, si $c=0$. Si autem non sit $c=0$, quo pacto in summam colligatur, non constat. Eandem methodum applicare possumus seriebus, quarum summa generalis in denominatore habet factores secundi, tertii, & altioris gradus. Sed quæ tradita sunt, ad rem nostram videntur sufficere. Qui plura cupit cognoscere, ad Riccati commentarium se conferat. Nunc ad series accedo, quarum summa est formula exponentialis multiplicata per integram algebraicam.

33. Formulam exponentialem illam dicimus, in qua n locum tenet exponentis. Prima, quæ sese offert, est quantitas constans elevata ad potestatem n . Propono itaque inquirendum terminum generalem seriei, cujus summa sit $= AK^n - A$. Detraho quantitatem A , quia secus summa vera esse non posset. Posito $n-1$ pro n , efformetur similis formula, quæ est summa terminorum numero $n-1$, quæ si a superiore detrahatur oritur terminus generalis, nempe $A \cdot K^n - A \cdot K^{n-1} = \frac{A \cdot K - 1}{K} \cdot K^n$. Si fiat $n=1$, tam terminus generalis, quam summa evadit $= AK - A$; quod patet, necessarium fuisse ad obtinendam veram summam demere a termino exponentiali $A \cdot K^n$ quantitatem A . Quisque videt, terminum generalem inventum suppeditare quamlibet seriem geometricam, cujus propterea summa semper inveniri poterit. Si K sit major unitate series semper crescit, & termini continuo augentur ita, ut facta n infinita, K^n pariter infinita evadat. Si $K=1$, omnes termini seriei, ejusque summa sit $=0$. Denique si K unitatæ sit minor, series continuo decrevit ita, ut facta n infinita K^n evadat infinitesima. Verum in hoc casu formulæ tam termini generalis, quam summæ fierent negativæ. Ut positivæ fiant ita disponantur, summa $= A - A \cdot K^n$ terminus generalis $= \frac{A \cdot 1 - K}{K} \cdot K^n$. Quum autem posita $K < 1$, in hypothesei n infinitæ K^n evadat infinitesima; summa seriei in infinitum productæ erit $= A$.

34. Quum proponitur terminus generalis, distinguenda est species, quæ afficitur ab exponente n , ab illa, quæ hujusmodi exponentem non habet. Prima fiat $= K^n$, altera $= \frac{A \cdot K - 1}{K}$, vel $= \frac{A \cdot -K}{K}$, prout K est major vel minor unitatæ; tum determinentur K, A , quibus cognitis habetur summa. Sit exempli causa terminus generalis $\frac{1}{3} \cdot 2^n$. Fiat $K^n = 2^n$, sive $K=2$, qui valor

quum unitatem superet, assumpta prima formula ponatur $\frac{A \cdot K - 1}{K} = \frac{1}{2} A = \frac{1}{3}$;

ergo $A = \frac{2}{3}$. Itaque summa erit $= \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3}$.

35. Quod si in termino generali proposito fuerint duæ, pluresve quantitates simul multiplicatæ, aut divisæ diversis exponentibus affectæ, in quos tamen sola

potestas linearis n ingreditur, opportunis analytico prefidiis ad eundem exponentem n erunt reducendæ; quo effecto omnes, tamquam quantitas una elevata ad potestatem n , erunt considerandæ. Ut exemplo rem declarem, sit terminus generalis

generalis $\frac{2^{n+1}}{n-1}$. Hic ita disponendus $2 \cdot 3 \cdot \frac{2^n}{n} = 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Provenit $K = \frac{2}{3}$,

qui quum sit minor unitate, docet secundam formulam esse accipiendam; ergo

$$\frac{A \cdot \overline{K-1}}{K} = \frac{1}{2} A = 2 \cdot 3; \text{ Ergo } A = 2^2 \cdot 3; \text{ ergo summa} = 2^2 \cdot 3 - \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 2^n}{3}$$

$$= 2^2 \cdot 3 - \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}}. \text{ Facta } n \text{ infinita quantitas } \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}}, \text{ evadit infinitesima, \& seriei summa} = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

36. Neque diversa est methodus, ubi exponentis n multiplicetur per quantitatem constantem. Sit in exemplum terminus generalis $\frac{3^{3n+1}}{2^{2n-2}}$. Hic erit disponendus in hunc modum $3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3^{3n}}{2^{2n}} = 3 \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Quare $K = \frac{3}{2}$, &

$$\frac{A \cdot \overline{K-1}}{K} = A \cdot \frac{3^{3-2^2}}{3} = 3 \cdot 2^2, \text{ sive } A = \frac{3^4 \cdot 2^2}{3^{3-2^2}}. \text{ Igitur seriei summa erit}$$

$$= \frac{3^4 \cdot 2^2 \cdot 3^{3n}}{3^{3-2^2} \cdot 2^{2n}} - \frac{3^4 \cdot 2^2}{3^{3-2^2}} = \frac{3^{3n+4}}{3^{3-2} \cdot 2^{2n-2}} - \frac{3^4 \cdot 2^2}{3^{3-2}}. \text{ Hæc, quæ admodum facillia sunt, majoris explicationis non egent.}$$

37. Quod si data sit series geometrica, inspice primum, utrum sit crescens, vel decrescens; si crescens sit, adhibenda est prima formula, si decrescens altera. Terminum generalem, facta $n=1$, æqua primo seriei termino, tum facta $n=2$, æqua secundo; alteram æquationem per primam divide, & invenies valorem K , qui positus in æquatione prima præbebit valorem A . Per duos hosce valores prodit non minus summa, quam terminus generalis. Ad exemplum sit series $3, 5, 8 \frac{1}{3}, 13 \frac{8}{9}$ &c. Quoniam hæc est series crescens, adhibeatur formula prima termini generalis $\frac{A \cdot \overline{K-1}}{K} \cdot K^n$. Posito successive $n=1, 2$ insitue cum primis duobus terminis æquationem

$$A \cdot \frac{K-1}{K} = 3 \quad A \cdot \frac{K-1}{K} \cdot K = 5$$

Divide secundam per primam, & provenit $K = \frac{5}{3}$; qui positus in prima dat $A \cdot \frac{2}{3} = 3$, seu $A = \frac{3^2}{2}$. Itaque terminus generalis in-

$$\frac{3^2}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$A=6$; ergo summa erit $= 6 - 2n + 2n^2 \cdot 2 - 6$. Aliud exemplum præbeat terminus generalis $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n + n^2 \cdot \frac{1}{2}$. Quoniam exponentialis minor est uni-

tate, ita formo summam $A - (A + Bn + Cn^2 \cdot \frac{1}{2})$. Ab hac si detrahatur formula, quæ nascitur posita $n-1$ pro n , inveniatur terminus generalis

$$\begin{array}{r} - A - Bn - Cn^2 \\ + 2A + 2Bn + 2Cn^2 \cdot \frac{1}{2} \\ - 2B - 4Cn \\ + 2C \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Conferatur hic cum dato, ut habeas æquationes} \\ \text{ } \end{array} \right.$$

$$A - 2B + 2C = \frac{1}{3}, \quad B - 4C = \frac{1}{2}, \quad C = 1, \text{ quæ dabunt } B = \frac{9}{2}, \quad A = \frac{22}{3};$$

Ergo seriei quæ sita summa erit $= \frac{22}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{3} + \frac{9n}{2} + n^2$, & serie in infinitum producta $= \frac{22}{3}$. Series hujusmodi solent vocari algebraico-geometricæ, quia si seriei algebraicæ termini omnes multiplicentur per singulos terminos seriei geometricæ, series hujusmodi exoriuntur.

41. Si efformetur series addendo, vel detrahendo series vel geometricas, vel algebraico-geometricas, manifestum est, ejus summam esse in potestate. Nam singularum serierum, quæ addendæ, vel subtrahendæ sunt, ex termino generali summa per methodum traditam inveniatur. Quare sicuti generis seriei terminus generalis coalescit ex serierum generantium terminis generalibus simul additis, vel detractis, ita etiam summa, quæ proinde innotescet. Verum difficile æmodum est cognoscere, utram series aliqua, quæ proponitur formari possit per additionem, aut subtractionem serierum geometricarum, aut algebraico-geometricarum. Quamobrem operæ erit præ-facere, quænam sint series, quæ hac ratione formari possint. Ajo itaque series omnes, quæ recurrentes dicuntur, esse hujus generis. Series recurrentes vocantur illæ, in quibus terminus quilibet determinatur per aliquot ex antecedentibus multiplicatis per datas constantes. Si dato termino uno antecedente definitur subsequens, dicitur series recurrens primi ordinis; si requiruntur duo, tres, aut quatuor termini antecedentes ad inveniendum sequentem dicitur secundi, tertii, aut quarti ordinis, atque ita deinceps. Ita series 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239 &c. est recurrens secundi ordinis, quia sumptis duobus primis terminis ad arbitrium, quilibet æqualis est duobus antecedentibus ductis ordinatim in 1, 2. Series vero

0, 0, 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{5}{32}$, &c. est recurrens tertii ordinis, quia quilibet terminus efformatur a tribus antecedentibus multiplicatis ordinatim per datas $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1. Primi autem tres termini sumuntur ad libitum.

42. Ad demonstrandum, series has omnes componi posse per additionem, & sub-

subtractionem serierum geometricarum, aut algebraico-geometricarum, gradatim procedo, & considero primum terminum generalem maxime simplicem nempe AK^n , ex quo nascitur series AK, AK^2, AK^3, AK^4 &c., quæ nihil aliud est, quam series geometrica. Nemo unus non videt seriem hanc esse recurrentem primi ordinis; nam quilibet terminus multiplicatus per K sequentem supponitur. Quapropter si quantitas hæc, quæ in singulos terminos ducta dat terminos sequentes, vocetur $=r$, erit $K=r$, atque adeo K nihil erit aliud, quam radix hujus æquationis $x-r=0$. Itaque data r propositæ seriei invenietur terminus generalis, si Ar , sive AK æqueur primo seriei termino, & per hanc æquationem determinetur A . Exemplum præbeat series recurrens primi ordini $6, 4, 2\frac{2}{3}, 1\frac{7}{9}, \frac{5}{27}, \frac{64}{81}$ &c., quæ, posito primo termino 6 efformatur, si singuli termini multiplicentur per $\frac{2}{3}$. Igitur terminus generalis seriei habet hanc formam $A \cdot (\frac{2}{3})^n$, & enim $r = \frac{2}{3} = K$. Ad inveniendam A , ponit $n=1$ instituit æquationem cum primo termino seriei, & habebis $\frac{2A}{3} = 6$, seu $A=9$ ergo seriei terminus generalis $= 9 \cdot (\frac{2}{3})^n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$.

43. Transeo ad terminum generalem $AK^n + BH^n$, ex quo oritur series AK, AK^2, AK^3 &c. quæ constat ex duabus seriebus geometricis simul sumptis BH, BH^2, BH^3 &c. quæ constat ex duabus seriebus geometricis simul sumptis. Ajo, hæc esse seriem recurrentem secundi ordinis, cujus terminus quilibet ex duobus antecedentibus determinatur. Multiplicandi autem sunt secundus, idest qui prior est termino quæsito, per $K+H$, primus per $-KH$. Ut de hac veritate certus fias, satis erit multiplicare $AK^{n-1} + BH^{n-1}$ per $K+H$, & $AK^{n-2} + BH^{n-2}$ per $-KH$; accepta enim summa oritur $AK^n + BH^n$, qui est terminus subsequens. Quæ quantitas in formatione seriei multiplicat secundum ex duobus terminis requisitis vocetur $=r$, quæ multiplicat primum $=s$; erit $r = K+H$, $s = -KH$; ergo $rs = K^2 + 2KH + H^2$, additoque primæ parti æquationis $4s$, secundæ $-4KH$, fiet $rs + 4s = K^2 - 2KH + H^2$, extractaque radice $\sqrt{rs+4s} = K - H$. Hinc ex ambiguitate signorum oritur $\frac{s + \sqrt{rs+4s}}{2} = K$, $\frac{s - \sqrt{rs+4s}}{2} = H$. Valores K, H nihil aliud sunt, quam radices hujus æquationis $xx - sx - s = 0$, ut resolutio patefaciet. Sed ne opus est quidem resolutione, Nam ex natura æquationis secundi gradus constat, illas esse radices, quæ simul sumptæ æquant coefficientem secundi termini signo mutato; & simul multiplicatæ præbent tertium terminum; hæc proprietates vero inveniunt in quantitatibus K, H ; nam debet esse $K+H=s$, $KH=-s$; ergo K, H sunt radices æquationis $xx - sx - s = 0$. Determinatis K, H , ad determinandas A, B , satis est ponere $AK + BH$ æqualem primo seriei termino, & $AK^2 + BH^2$ æqualem

lem secundo; atque æquationes duæ valores duarum A, B suppeditabunt.

44. Ad exemplum sit $s = -1$, $t = 3$, & primi seriei termini sint 3, 2, ut nascatur series recurrentis secundi ordinis 3, 2, 3, 7, 18, 47, 123 &c. Ex me-

toto tradita invenies $K = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $H = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, quæ sunt radices æquationis $xx - 3x + 1 = 0$. Ad inveniendas A, B fiat

$$A \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 3, A \cdot \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5}{4} + B \cdot \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{4} = 2, \text{ si-}$$

ve $A \cdot \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} = 2$. Hanc deme ex prima multiplicata per 3, ut habeas $A + B = 7$, qui positus in prima exhibet $\frac{3}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot A - B = 3$;

ergo $A - B = \frac{-15}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5}$. Igitur ex ambiguitate signorum $A = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$,

$B = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$. Quare terminus generalis seriei erit

$$\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2}^n + \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2}^n.$$

45. Methodus hæc semper valet unico casu excepto, quum $4s = -st$, quomodo in casu æquales sunt K, H , & æquatio $xx - sx - s = 0$ prædita est duobus radicibus æqualibus. Nam numquam poteris determinare valores A, B , sed methodum sequens incidis in æquationem aut identicam, aut absurdam. Causa

exempli sit $t = 3$, $s = \frac{-9}{4}$, & primi termini seriei 1, 1, ut nascatur series

1, 1, $\frac{3}{4}$, 0, $\frac{-27}{16}$, $\frac{-81}{16}$ &c. In hac invenies $K = H = \frac{3}{2}$. Quare si series reciperet terminum generalem hujus formæ, hic esset

$A \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = A + B \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$, quem facta $n = 1$, æqualem pone primo termino seriei, & facta $n = 2$, æqualem pone secundo, ut sit

$$\frac{3}{2} \cdot A + B = 1, \frac{9}{4} \cdot A + B = 1, \text{ ex quibus provenit } \frac{3}{3} = \frac{4}{9}, \text{ seu } 1 = \frac{3}{4},$$

quod est absurdum. Itaque quum invenitur $K = H$, vel quum æquatio $xx - sx - s = 0$ habet duas radices æquales, seriei terminus generalis nondum inventus est. Sed casum hunc paullo infra evolvam diligenter.

46. Si terminus generalis efferet $AK^n + BH^n + CI^n$, ajo ensæci seriem, quæ formabitur, si tres termini antecedentes multiplicentur per $K + H + I$, $-KH - KI - HI$, facto initio ab ultimo, qui proprius est termino requisito. Hoc clare apparebit, si multiplices

$$AK^{n-1} + BH^{n-1} + CI^{n-1} \text{ per } K + H + I$$

$$AK^{n-2} + BH^{n-2} + CI^{n-2} \text{ per } -KH - KI - HI$$

AK

$AK^{n-3} + BH^{n-3} + CI^{n-3}$ per KHI , proveniet enim $AK^n + BH^n + CI^n$.

Similiter si termino generali addatur quartus terminus DL^n , series produceretur multiplicando ordinatim quatuor terminos antecedentes, factio initio ab ultimo, per $K + H + I + L$

$$-KH - KI - KL - HI - HL - IL$$

$$KHI + KHL + HIL$$

$-KHIL$. Hoc eodem modo demonstratur ac in casu superiori. Idem invenies, ac demonstrabis, si terminus generalis constet quinque, sex, aut pluribus terminis ejusdem formæ simul additis. Hinc canon œcumenicus efformatur. Quælibet series, cujus terminus generalis constat pluribus terminis simul sum-

ptis hujus formæ AK^n , producitur, quum tot seriei termini antecedentes, quotus est numerus terminorum in termino generali, multiplicantur ordinatim factio initio ab ultimo per

summam omnium K

producta earumdem ex binis negative sumpta

producta ex ternis

producta ex quaternis accepta negative, atque ita deinceps in reliquis. Qui canon aperte docet, omnes series, quibus est terminus generalis præsentis formæ, ad recurrentes pertinere.

47. Reliquum est, ut videamus, quomodo data lege seriei recurrentis, quæ oritur multiplicando aliquot terminos antecedentes, factio initio ab ultimo, per s, s, r, q, p &c. inveniendus sit ejus terminus generalis. Manifestum est fore $K + \&c. = s, -KH - \&c. = s, KHI + \&c. = r, -KHL - \&c. = q, KHILM + \&c. = p$, atque ita deinceps. His positis adverto æquationem

$$x^m - Kx^{m-1} + KHx^{m-2} - KHIx^{m-3} + KHILx^{m-4} \&c. = 0$$

$$- \&c. \quad + \&c. \quad - \&c. \quad + \&c.$$

habere pro radicibus K &c. Itaque substitutis valoribus fiet æquatio

$$x^m - sx^{m-1} - sx^{m-2} - rx^{m-3} - qx^{m-4} - px^{m-5} \&c. = 0$$

ejus radices præbent quantitates K, H &c., quas requiro. In supra posita æquatione exponents m æqualis sit oportet numero terminorum antecedentium, qui ad formandam seriem necessarii sunt, sive numero quantitatum s, s, r &c. Inventis æquationis radicibus terminus generalis hanc formam habebit $AK^n + BH^n$ &c. Ad determinandos valores A, B &c., primis seriei terminis numero m fac æqualem terminum generalem, posita in ipso successive $n = 1, n = 2$ &c.: atque ex formatis æquationibus quæsitos valores defines.

48. Methodus hæc, tametsi maxime generalis, nos deserit, quotiescumque in æquatione $x^m - sx^{m-1} \&c. = 0$, inveniatur duæ, aut plures radices æquales, quia valores A, B &c. determinari non possunt. Verum quo pacto in hoc casu inveniendus sit terminus generalis, paulo infra declarabo.

49. Ut omnis theoria exemplo fiat clarius, quærat terminus generalis seriei $0, 0, 1, 1, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{21}{16}, \frac{21}{16}, \frac{85}{64}, \frac{85}{64}, \frac{341}{256}$ &c., quæ sumptis tribus terminis primis $0, 0, 1$ formatur, si tres termini antecedentes, factio initio ab ultimo, multiplicentur per $1, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}$. Quare æquatio præbens radices K, H, I erit

erit $x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$. Hujus radices sunt $1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$; ergo seriei terminus

generalis hanc formam habebit $A \cdot 1^n + B \cdot \frac{1}{2}^n + C \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$. Ut determinentur

A, B, C , posito successive $n=1, 2, 3$, instituantur æquationes cum primis tribus seriei terminis, $A + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = 0, A + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} = 0, A + \frac{B}{8} - \frac{C}{8} = 1$.

Dematur prima ex secunda, & tertia; & orientur duæ $-\frac{B}{4} + \frac{3C}{4} = 0,$
 $-\frac{3B}{8} + \frac{3C}{8} = 1$, sive $-B + 3C = 8, -3B + 3C = 8$. Dematur prima
multiplicata per 3 a secunda, & fiet $-6C = 8$, sive $C = -\frac{4}{3}$, ex quo pro-
venit $B = -4$, & $A = \frac{4}{3}$; igitur terminus generalis quæsitus invenietur

$$\frac{4}{3} - \frac{4}{2^n} - \frac{4}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

50. Consideravi hæcenus series geometricas, & defini vi, quænam series re-
currentes formantur ex earum collectione. Transeo modo ad series algebraico-
geometricas, & primum contemplo terminum generalem $A + Bn \cdot K^n$, ex quo
hujusmodi formatur series $A + B \cdot K, A + 2B \cdot K^2, A + 3B \cdot K^3, A + 4B \cdot K^4$
&c. Ajo seriem hanc produci, si multiplicentur duo termini antecedentes, ult-
imus per $2K$, præcedens per $-K^2$. Hoc demonstrabis multiplicando $A + B(n-1) \cdot K^{n-1}$
per $2K$, tum $A + B(n-2) \cdot K^{n-2}$ per $-K^2$; productum enim fiet $A + Bn \cdot K^n$.
Si vocemus $2K = r, -KK = s$, manifestum est, fore $rs = -rr$, & æqua-
tionem $rx - sx - s = 0$ habere duas radices æquales. Hoc est casus illic, qui,
ut paullo ante diximus, non recipit terminum generalem hujus formæ $AK^n + BH^n$.
Verum in præsentia constat, quam formam habere debeat. Erit autem $K = \frac{r}{2}$,
sive radix æquationis $rx - sx - s = 0$ præditæ duabus radicibus æqualibus.
Cætera peragantur ut supra.

51. Ad exemplum profero in medium seriem $0, 1, 4, 12, 32, 120, 432$
&c., quæ sumptis primis terminis $0, 1$, formatur, si duo termini antecedentes
multiplicentur, ultimus per 4 , primus per -4 . Quoniam $r = 4, s = -4$,
invenietur $rs = -rr$, seu æquatio $rx - sx - s = 0$ præditæ erit duabus radi-
cibus æqualibus. Invenietur autem $K = 2$. Quare terminus generalis hanc for-
mam habet $A + Bn \cdot 2^n$. Facta successive $n=1, 2$, instituantur æquatio-
nes cum primis seriei terminis, & fiet $2A + 2B = 0, 4A + 8B = 1$. Ex
his prima multiplicata primum per 2 , deinde per 4 , dematur ex secunda, &
fiunt $4B = 1, -4A = 1$, ergo $B = \frac{1}{4}, A = -\frac{1}{4}$; igitur terminus gene-
ralis fit $-\frac{1}{4} + \frac{n}{4} \cdot 2^n = \frac{n-1}{4} \cdot 2^{n-2}$.

52. Si terminus generalis fuerit $A + Bn + Cn^2 \cdot K^n$, series, quæ ex ipso nascitur, erit recurrens ordinis tertij, quæ producitur, si tres termini antecedentes multiplicentur, incipiendo ab ultimo, per $3K, -2K^2, K^3$. Similiter series, cui convenit terminus generalis $A + Bn + Cn^2 + Dn^3 \cdot K^n$, est recurrens quarti ordinis, & formatur, si quatuor termini antecedentes, factò initio ab ultimo, multiplicentur per $4K, -6K^2, 4K^3, -K^4$. Hinc canon. œcumenicus sancitur. Si terminus generalis exprimat a formula

$A + Bn + Cn^2 + En^3$ &c. K^n , in qua termini, ex quibus. coalescit quantitas algebraica multiplicans K^n , sint numero m , & maximum exponents $n = m - 1$, ajo, seriem recurrentem, quæ ex eo nascitur, obtineri, si multiplicentur termini antecedentes, ultimus per mK , qui hunc præcedit per $-\frac{m \cdot m - 1}{2} K^2$, qui præit per $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2 \cdot 3} K^3$, alius per $-\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} K^4$, atque ita deinceps.

53. Si æquationem constituam

$$x^m - mKx^{m-1} - \frac{m \cdot m - 1}{2} K^2 x^{m-2} - \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2 \cdot 3} K^3 x^{m-3} \&c. = 0,$$

perspicuum est, in ea tot esse radices æquales K , quot. unitates insunt in exponente m . Jam vero quantitates, quæ debent multiplicare terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, sint s, s, r, p &c. Fiet $nK = s$,

$$-\frac{m \cdot m - 1}{2} K^2 = s, \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{2 \cdot 3} K^3 = r, -\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} K^4 = q$$

&c. Qui valores in statuta æquatione præbent

$$x^m - s x^{m-1} - r x^{m-2} - q x^{m-3} \&c. = 0,$$

quæ eadem est cum illa, quam supra etiam invenimus. Itaque quotiescumque æquatio hæc prædicta erit radicibus æqualibus, terminus generalis præsentem formam habebit, & quantitates A, B &c. eadem methodo detegentur.

54. Exemplum desumamus a serie $0, 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{3}{4}$ &c., quæ sumptis ad arbitrium quatuor primis terminis, nascitur, si quatuor termini antecedentes multiplicentur, incipiendo ab ultimo, per $2, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{16}$. Efformetur æquatio $x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$. Hæc habet quatuor radices omnes $= \frac{1}{2}$: ergo seriei terminus generalis hanc formam accipit

$A + Bn + Cn^2 + Dn^3 \cdot \frac{1}{2^n}$. Ut determinantur valores A, B &c., ponatur in termino generali successive $n = 1, 2, 3, 4$, & constituantur æquationes cum quatuor primis seriei terminis, quæ erunt hujusmodi

$$A + B$$

$$\overline{A+B+C+D} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$A+B+C+D=0$$

$$\overline{A+2B+4C+8D} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

five

$$A+2B+4C+8D=0$$

$$\overline{A+3B+9C+27D} \cdot \frac{1}{8} = 0$$

$$A+3B+9C+27D=0$$

$$\overline{A+4B+16C+64D} \cdot \frac{1}{16} = 1$$

$$A+4B+16C+64D=16$$

Dematur prima ex secunda, secunda ex tertia, tertia ex quarta, & tres æquationes hæc orientur

$$B+3C+7D=0 \text{ factaque simili } 2C+12D=0$$

$$B+5C+14D=0 \text{ subtractione } 2C+18D=16$$

$$B+7C+37D=16$$

& deducta prima ex altera $6D=16$. Quare hujusmodi inveniuntur valores

$$D = \frac{8}{3}, C = -16, B = \frac{88}{3}, A = -16; \text{ igitur terminus generalis est hujusmodi}$$

$$\left(-16 + \frac{88}{3}n - 16n^2 + \frac{8}{3}n^3 \cdot \frac{1}{2^n} \right)$$

55. Quod si spectetur terminus generalis tamquam coalescens ex pluribus terminis, quorum alij spectent ad præsentem formam, alij ad superiorem, inveniuntur eadem prolixæ æquationes, quæ prædicta erit radicibus partim æqualibus, partim inæqualibus. Quare terminus generalis coalescet ex aggregato formularum, quarum aliz exhibent series geometricas, aliz algebraico-geometricas. Methodus ex superioribus satis aperta est. Attamen exemplum ad eam illustrandam proponamus. Sit series 0, 3, -2, 23, -14, 87, -90, 303 &c., quæ componitur multiplicando quinque terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, per 0, 4, -2, -3, 2. Ut inveniatur terminus generalis, necesse est radices habeantur hujus æquationis $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 3x - 2 = 0$. Radices autem sunt hæc $x=1, x=1, x=1, x=-1, x=-2$, quarum tres æquales sunt, inæquales duæ. Itaque terminus generalis hanc habebit formam

$$A+Bn+Cn^2 \cdot 1^n + D \cdot (-1)^n + E \cdot (-2)^n. \text{ Ad coefficientium } A, B, C, D, E \text{ valores definiendos, posito successive } n=1, 2, 3, 4, 5 \text{ instituantur quinque æquationes cum primis quinque seriei terminis, per quas nanciscemur } A=1, B=-2, C=1, D=-2, E=1; \text{ igitur terminus generalis erit}$$

$1 - 2n + n^2 - 2(-1)^n + 1 \cdot (-2)^n$. Quæ dicta sunt, satis ostendunt, omnes, quotquot sunt, series recurrentes habere terminum generalem, qui componitur a formulis exponentialibus multiplicatis aut per solas constantes, aut per functiones n integras, & racionales; igitur, quum omnium serierum, quæ hujusmodi habent terminos generales, ex supra tradita methodo summa inveniatur, consequitur series omnes recurrentes summam exponentialem recipere. Multo plura de seriebus recipientibus summam algebraicam, aut exponentialem tradit Vincentius Riccatus in suo commentario, ex quo pauca hæc decerpere visum est. Quocirca ad plenam serierum theoriam consequendam auctor tibi sum, ut commentarium illum attente perlegas.

CAPUT QUINTUM.

In quo exhibetur formula generalis earum æquationum, quæ radicem habent cardanicæ similem, ejusque ope formulæ aliquot in trinomia realia resolvuntur, & cartesianum theorema demonstratur.

1. **P**ostquam egimus de seriebus, earumque terminis, ac summis generalibus, nihil facilius est, quam oculis subjicere formulam generalem earum æquationum, quæ præditæ sunt radice simili cardanicæ, de quibus cap. tertio loquuti sumus, & earum auxilio aliquot binomia, ac trinomia in factores reales secundi gradus resolvere, & theorema Ruggerii Cotteii viri doctissimi demonstrare. Theoriam hanc universam mutuabimur ex Vincentii Riccati opusculo quarto tomi secundi. Capite tertio tabulam invenies, cujus ope æquationes habentes radicem similem cardanicæ usque ad gradum decimum quartum. efformantur, & methodus patefacta est, qua tabula ad quoscumque gradus extenditur. Hujus tabulæ series prima verticalis, quæ subest termino mn , est series arithmetica, cujus scilicet differentiæ primæ constantes sunt. Ejus terminus generalis statim cognoscitur $=p$, denotante p gradum æquationis.

2. Altera series, quæ subest termino m^2n^2 , est algebraica secundi ordinis, quæ habet constantes differentias secundas. Ejus terminus generalis, ut constat ex capite superiore, hac formula continetur $A + Bp + Cp^2$, quæ debet $=2$, posita $p=4$, debet $=5$, posita $p=5$, debet $=9$, posita $p=6$; igitur habebimus æquationes tres

$$\begin{array}{l} A + 4B + 16C = 2 \\ A + 5B + 25C = 5 \\ A + 6B + 36C = 9 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Deme primam ex secunda, secundam ex tertia,} \\ \text{duas æquationes invenies} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} B + 9C = 3 \\ B + 11C = 4 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Dematur item ex altera prima, \& fiet} \end{array} \right.$$

$2C = 1$, sive $C = \frac{1}{2}$. Quo valore in aliis æquationibus opportune substituto,

nascitur $B = \frac{-3}{2}$, $A = 0$. Igitur terminus generalis secundæ series substituitis

$$\text{termino } m^2n^2 \text{ fiet } \frac{-3p + pp}{2} = \frac{p \cdot p - 3}{2}.$$

3. Similiter series tertia, cui superstat terminus m^3n^3 , est algebraica tertii ordinis, & habet tertiis differentias constantes. Ejus terminus generalis hac formula includitur $A + Bp + Cp^2 + Dp^3$, quæ debet æquare 2, 7, 16, 30, factis successively $p=6, 7, 8, 9$. Quatuor ergo nascuntur æquationes

$$\begin{array}{l} A + 6B + 36C + 216D = 2 \\ A + 7B + 49C + 343D = 7 \\ A + 8B + 64C + 512D = 16 \\ A + 9B + 81C + 729D = 30 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Singulæ æquationes istæ a sequentibus detra-} \\ \text{hantur, \& tres orientur æquationes} \end{array} \right.$$

B +

$$\begin{array}{l} B + 13C + 127D = 5 \\ B + 15C + 169D = 9 \\ B + 17C + 217D = 14 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Facta, ut antea, singularum deductione, dum sequen-} \\ \text{tes orientur} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 2C + 42D = 4 \\ 2C + 48D = 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \& \text{ prima ab altera deducta fiet } 6D = 1, \text{ sive } D = \frac{1}{6}. \text{ De-} \\ \text{ mum opportune peractis substitutionibus } C = \frac{-9}{6}, B = \frac{20}{6}, A = 0. \text{ Quapro-} \\ \text{ pter seriei terminus generalis erit } \frac{20p - 9pp + p^3}{6} = \frac{p \cdot p - 4 \cdot p - 5}{p \cdot p - 4 \cdot p - 5} \end{array} \right.$$

4. Simili utens methodo in reliquis seriebus, quæ sunt omnes algebraicæ, quarum gradus unitate crescit, invenies, terminos generales ordinatim esse

$$\frac{p \cdot p - 5 \cdot p - 6 \cdot p - 7}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\frac{p \cdot p - 6 \cdot p - 7 \cdot p - 8 \cdot p - 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\frac{p \cdot p - 7 \cdot p - 8 \cdot p - 9 \cdot p - 10 \cdot p - 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$\frac{p \cdot p - 8 \cdot p - 9 \cdot p - 10 \cdot p - 11 \cdot p - 12 \cdot p - 13}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}; \text{ atque ita deinceps. Quæ quæ}$$

ita sint, æquatio generalis, cui est radix similis cardanicæ, invenitur esse

$$x^p - pax^{p-2} + \frac{p \cdot p - 3}{2} a^2 x^{p-4} - \frac{p \cdot p - 4 \cdot p - 5}{2 \cdot 3} a^3 x^{p-6}$$

$$+ \frac{p \cdot p - 5 \cdot p - 6 \cdot p - 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^{p-8} - \frac{p \cdot p - 6 \cdot p - 7 \cdot p - 8 \cdot p - 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 x^{p-10}$$

$$+ \frac{p \cdot p - 7 \cdot p - 8 \cdot p - 9 \cdot p - 10 \cdot p - 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^6 x^{p-12} \dots \dots \dots - b = 0. \text{ In hac}$$

omittendus est terminus ille, in quo p incipit esse minor eo numero, qui deducendus est, & termini omnes consequentes.

5. Ut per hanc æquationem binomia, ac trinomia aliquot resolvam in factores reales secundi gradus, memento, demonstratum esse cap. tertio, radicem æquationis, posita a positiva, semper ita exprimi $x = a \cdot C \cdot \frac{a}{h}$, existente a ar.

cu, vel logarithmo, cujus sinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, & cosinus $= \frac{a}{h}$, & sinus po-

sitivus est. Si $\frac{bb}{4} > a^p$, accipiendi sunt cosinus hyperbolici; quo in casu, existente p

impairi, $Cb \cdot \frac{a}{h}$ habet unicum valorem realem, existente p pari habet duos positivum

unum, alium negativum. Contra si $\frac{bb}{4} < a^p$, capiendi erunt cosinus circulares;

in quo casu $Cc \cdot \frac{a}{h}$ tot habet valores, quot p continet unitates. Qui valores,

posito

posito μ arcu circumferentia minore, & circumferentia = c erunt $Cc. \frac{\mu}{p}$;
 $Cc. \frac{c+\mu}{p}$, $Cc. \frac{2.c+\mu}{p}$ $Cc. \frac{p-1.c+\mu}{p}$. Relicto casu primo, qui
 nos deducit ad cosinus hyperbolicos, specto dumtaxat alterum, in quo quum ad
 cosinus circulares ducamur, æquatio radices omnes reales continet. Assumo tri-
 nomium $z^2 - xz + a = 0$. Si in inventa generali æquatione substituam pro x
 ejus valorem a trinomio exhibitum nempe $z + \frac{a}{z}$, manifestum est, novam o-
 riri formulam, quæ liberata a divisoribus erit resolvable in tot trinomia simi-
 lis formæ, quot sunt valores x . Facta substitutione nascitur formula

$$z^p + \frac{a^p}{z^p} - b = 0, \text{ sive trinomium } z^{2p} - bz^p + a^p = 0. \text{ Quoniam existente } \frac{bb}{4} < a^p,$$

x habet omnes valores reales, quos antea invenimus, constat, trinomium, cu-
 jus gradus est $2p$, resolvi in factores secundi gradus reales numero p hoc modo

$$z^{2p} - bz^p + a^p = 0 = z^2 - 2Cc. \frac{\mu}{p} . z + a . z^2 - 2Cc. \frac{c+\mu}{p} z + a .$$

$$z^2 - 2Cc. \frac{2c+\mu}{p} . z + a \dots z^2 - 2Cc. \frac{p-1.c+\mu}{p} . z + a$$

6. Sed hypotheses aliquot accuratius evolvamur. Fiat primo $b = 0$, ut ha-
 beat binomium $z^{2p} + a^p = 0$. In hac hypothesi, quando cosinus arcus $\mu = 0$,
 & sinus sit oportet positivus, arcus μ erit quadrans circuli. Quare vocata ut
 antea circumferentia = c , adeoque ejus quadrante = $\frac{c}{4}$, trinomia realia, in

$$quæ binomium resolvitur, erunt hujusmodi $z^2 - 2Cc. \frac{c}{4p} . z + a$,$$

$$z^2 - 2Cc. \frac{3c}{4p} . z + a, z^2 - 2Cc. \frac{5c}{4p} . z + a, z^2 - 2Cc. \frac{7c}{4p} . z + a \dots \dots \dots$$

$$z^2 - 2Cc. \frac{4p-3}{4p} . c . z + a. \text{ Sed de hoc casu infra redibit sermo.}$$

7. Ponamus modo $Cc. \mu$, hoc est $\frac{b}{p-1} = a^{\frac{1}{2}}$, scilicet sinui toti. Pro-

venit $b = 2a^{\frac{1}{2}}$, & trinomium hanc formam induit $z^{2p} - 2a^{\frac{1}{2}}z^p + a^p = 0$.
 Manifestum est $\mu = 0$; ergo ultimum trinomium resolvitur in sequentia trinomia
 secundi gradus $z^2 - Cc. \frac{0}{p} z + a$, $z^2 - 2Cc. \frac{c}{p} . z + a$, $z^2 - 2Cc. \frac{2c}{p} . z + a$,
 $z^2 - 2Cc. \frac{p-1.c}{p} . z + a$, Describe circulum, cujus radius = $a^{\frac{1}{2}}$, &

facto initio a puncto ϵ , (Fig. 1, 2) divide totam circumferentiam in partes
 $2p$, ut semicircumferentia in partes p divisa reperiat. In singulis divisionis
 punctis ordinatim appone numeros, ut figura manifestat. Liqueat punctis, quæ signa-

ta sunt numeris imparibus, respondere: cosinus. quæsitos; arcus enim $13 = \frac{c}{p}$, $15 = \frac{2c}{p}$; atque ita. deinceps.

8. Si recte animam advertas, cognosces, his semper eundem cosinum reperiri; nam cuilibet arcui minori, quam semicircumferentia, respondet arcus eadem major, qui præditus est eodem cosinu. Excipiendus est tamen arcus $= 0$, cujus cosinus $= a^{\frac{1}{2}}$; & ubi p fit numerus par, excipiendus est arcus $= \frac{c}{2}$, hoc est semicircumferentia, cujus cosinus $= -a^{\frac{1}{2}}$; horum enim arcuum: cosinus reperiuntur semel. Verum arcus hujusmodi præbent trinomia. $22 - 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, $22 + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, quæ quadrata sunt, & quorum radices extrahi possunt. Quæ propter fatis erit. dividere semicircumferentiam in partes p , factæ initio a puncto 1, & accipere cosinus omnium arcuum desinentium in puncta signata numeris imparibus, & ex his efformari trinomia, quæ erunt hujusmodi.

$22 - 2Cc \cdot \frac{c}{p} \cdot z + a$, $22 - 2Cc \cdot \frac{2c}{p} \cdot z + a$ &c. Nostri itaque trinominum: resolvable est. in hæc trinomia elata ad potestatem quadraticam, addito semper trinomio $22 - 2a^{\frac{1}{2}}z + a$; & si p fit par, etiam trinomio $22 + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$. Habemus ergo æquationem.

$$z^{2p} - 2a^{\frac{1}{2}}z^p + a^{\frac{1}{2}} = 22 - 2Cc \cdot \frac{c}{p} \cdot z + a \cdot 22 - 2Cc \cdot \frac{2c}{p} \cdot z + a \dots$$

$22 - 2Cc \cdot \frac{3c}{p} \cdot z + a$ &c. $22 - 2a^{\frac{1}{2}}z + a \dots * 22 + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$. Trinomium ultimum, cui signavi *, apponendum non est; nisi p inerit par. Igitur extracta radice habebimus:

$$z^p - a^{\frac{1}{2}} = 22 - 2Cc \cdot \frac{c}{p} \cdot z + a \cdot 22 - 2Cc \cdot \frac{2c}{p} \cdot z + a \cdot 22 - 2Cc \cdot \frac{3c}{p} \cdot z + a$$

&c. $z - a^{\frac{1}{2}} \cdot * z + a^{\frac{1}{2}}$.

9. Demum ponamus $Cc \cdot \mu$, hoc est $\frac{b^{\mu}}{p-1} = -a^{\frac{1}{2}}$, scilicet sinui toti ne-

gative sumpto, & trinomium hoc nascetur $z^{2p} + 2a^{\frac{1}{2}}z^p + a^{\frac{1}{2}} = 0$. Evidens est, arcum μ æquare circumferentiæ dimidium, hoc est $\frac{c}{2}$. Quare habes trinomia,

in quæ fit resolutio, nempe $22 - 2Cc \cdot \frac{c}{2p} \cdot z + a$, $22 - 2Cc \cdot \frac{3c}{2p} \cdot z + a$,

$$22 - 2Cc \cdot \frac{5c}{2p} \cdot z + a \dots \dots \dots 22 - 2Cc \cdot \frac{2p-1}{2p} \cdot z + a$$

Initio factæ a puncto 1 integram circumferentiam divide in partes $2p$, & numeris naturalibus ordinatim signa puncta divisionis, ut factum est antea. Cosinus accipiendi sunt eorum

eorum arcuum; quorum termini a numeris paribus definiuntur. Nam arcus

$$12 = \frac{c}{2p}, 14 = \frac{3c}{2p}, \text{ atque ita de reliquis.}$$

10. Hic quoque evenit, ut bis cosinus singuli sint capiendi, existunt enim semper duo arcus, alter minor, alter major semicircumferentia, qui eundem cosinum habent. Excipe tamen dimidium circumferentiae, cujus cosinus non im-

greditur in trinomia, nisi p fuerit impar; quo in casu quum cosinus $= -a^{\frac{1}{2}}$ resultabit trinomium $2x + 2a^{\frac{1}{2}}x + a$, quod quadratum est præsumitur radice

$x + a^{\frac{1}{2}}$. Quare satis est dividere semicircumferentiam in partes p , facto initio ab 1, accipere cosinus arcuum desinentium in numeros pares, & ex his formata trinomia elevare ad quadratum, quibus addendum est trinomium.

$2x + 2a^{\frac{1}{2}}x + a$, si p sit impar. Hoc modo obtinemus æquationem

$$x^{2p} + 2a^{\frac{p}{2}}x^p + a^p = 2x - 2Cc \cdot \frac{c}{2p} \cdot x + a \cdot 2x - 2Cc \cdot \frac{3c}{2p} \cdot x + a$$

$2x - 2Cc \cdot \frac{5c}{2p} \cdot x + a$ &c. * $2x + 2a^{\frac{1}{2}} \cdot x + a$. Signum * denotat trinomium non esse scribendum, nisi existente p impari. Extrahatur radix quadrata

$$x^p + a^{\frac{p}{2}} = 2x - 2Cc \cdot \frac{c}{2p} \cdot x + a \cdot 2x - 2Cc \cdot \frac{3c}{2p} \cdot x + a \cdot 2x - 2Cc \cdot \frac{5c}{2p} \cdot x + a$$

&c. * $x + a^{\frac{1}{2}}$.

11. Ex his facilima, atque expeditissima fuit demonstratio celeberrimi theorematis cotangentium, quod statim cognosces, ubi probatum fuerit sequens lemma. In circulo, cujus centrum C , (Fig. 3, 4) radius $CA = a^{\frac{1}{2}}$, assumpto quolibet puncto B , vocetur $CB = x$. Ducta diametro transeunte per punctum D , agatur quælibet BD , & demittatur DE , quæ sit sinus arcus AD ; fiat autem cosinus $CE = x$; ajo $BD = \sqrt{2x^2 - 2ax + a}$. Liqueat $ED^2 = a - xx$, $BE = \pm \sqrt{2 \mp xx}$. Signa superiora valent in tertia, inferiora in quarta figura; ergo $BE^2 = 2x - 2ax \mp xx$; ergo $BD^2 = 2x - 2ax \mp xx + a = 2x - 2ax \mp a$,

& $BD = \sqrt{2x^2 - 2ax + a}$. Q. E. D.

12. Deinceps arcus indicabo per numeros, a quibus in figuris terminantur. Paulo ante probatum est $x^{2p} - 2x^{\frac{p}{2}}x^p + a^p = 2x - 2Cc \cdot \frac{c}{2p} \cdot x + a$.

$2x - 2Cc \cdot \frac{3c}{2p} \cdot x + a \cdot 2x - 2Cc \cdot \frac{5c}{2p} \cdot x + a$ &c. donec exhausta fuerit omnis circumferentia. Seca $CB = x$, & fiet $x^{2p} - 2a^{\frac{p}{2}}x^p + a^p = B_1^2 \cdot B_3^2 \cdot B_5^2$ &c.

& extracta radice $\pm x^{\frac{p}{2}} + a^{\frac{p}{2}} = B_1 \cdot B_3 \cdot B_5$ &c.

13. Pro:

13. Probatum item est antea

$\frac{z^{2p} + 2a^2 z^p + a^p}{z^2 - 2Cc. 12. z + a. z^2 - 2Cc. 14. z + a.}$
 $\frac{z^{2p} + 2a^2 z^p + a^p}{z^2 - 2Cc. 16. z + a.}$ &c., donec exhausta fuerit integra circumferentia; igitur

$\frac{z^{2p} + 2a^2 z^p + a^p}{z^2 - 2Cc. 16. z + a.} = B_2^2. B_4^2. B_6^2$ &c., extractaque radice $z + a^{\frac{p}{2}} = B. 2. B_4. B_6$ &c. Formula hæc simul cum formula numeri superioris exhibet theorema Ruggerii Cottessii.

14. Similis constructio accomodari potest etiam trinomio $z^{2p} - bz^p + a^p$, quoties $\frac{bb}{4} < a^p$. Etenim fecit arcum A D(F.5) cujus cosinus $= \frac{b}{2}$, qui arcus

erit minor quadrante, si b sit positiva, major, si b sit negativa. Hunc arcum divide in partes p , quarum prima sit A_1 . Ex puncto 1 incipe dividere circumferentiam in punctis 2, 3 &c. Cosinus arcuum A_1, A_2, A_3 &c. positi in trinomio $z^2 - 2az + a$ exhibent trinomia realia, in quæ fit resolutio. Igitur facta $CB = z$, adisique B_1, B_2, B_3 &c., nasciscemur $z^{2p} - bz^p + a^p = B_1^2. B_2^2. B_3^2$ &c. Q. E. Inv.

15. Si in eodem trinomio $\frac{bb}{4} > a^p$, qui casus complectitur etiam trinomium, in quo ultimus terminus a^p affectus est signo $-$, resolvitur in duo binomia realia $z^p - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}, z^p - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}$, quæ per ea, quæ paulo ante dicta sunt, facile resolvuntur in trinomia realia secundi gradus.

15. Suspiciantur jure bono Analytiz, quamlibet formulam rationalem resolvibilem in trinomia realia secundi gradus. Tametsi hæc de re ingeniose scripserint P. le Seur, & Leonardus Eulerus Viri doctissimi; tamen plenam completamque hujusce veritatis demonstrationem desideramus. Si formula omnis rationalis in trinomia realia resolvibile potest, perspicuum est, omnia imaginaria, quæ ab operationibus algebraicis procedunt, ad hanc solam formam reduci posse $A + B\sqrt{-1}$, in qua A, B sunt quantitates reales. Etenim quodlibet imaginarium fiat $= x$, tum opportune eliminatis radicalibus ad æquationem devenies, in qua x altiorem obtinet potestatem. Hæc resolvatur in trinomia hujus

formæ $xx + mx + n = 0$, quæ dant $x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{mm}{4} - n}$. Si autem ra-

dix sit imaginaria, ita disponatur $\sqrt{n - \frac{mm}{4}}. \sqrt{-1}$; atqui x æqualis est imaginario proposito; ergo imaginarium ad prædictam formam semper reducit. Sed hæc paucis attingisse sufficiat.

De Parabolarum, & Hyperbolarum familia, & de illis, quæ Paraboloides vocantur.

1. DE curvis altioribus aſurus illud præmonco, me, ſi quando aut antea nomi-
navi, aut in poſterum nominabo quantitates infinitas, vel minimas, &
infinitesimas, nihil intelligere aliud quam quantitates majores, vel minores qua-
cumque data. Omnis familia parabolæ hæc æquatione continetur $a^m x^n = y^{m+n}$.
Similitudo autem, quam hæc æquatio habet cum æquatione parabolæ appollo-
nianæ, quæ tanta eſt, ut ſi $m = n = 1$, curva ſit parabola appolloniana,
efficit, ut curvæ omnes parabolæ appellarentur, quarum gradus determinatur
ab exponente $m+n$. Hoc omnibus commune eſt, ut ſi ſumatur $x = 0$, ſit
quoque $y = 0$. Contra ſi x vel poſitiva, vel negativa ſit infinita, y certe vel
poſitiva, vel negativa ſit quoque infinita, dummodo imaginaria non ſit. Cur-
va vero ab $y = 0$ ad $y = \pm \infty$, ita continuata eſt, ut cuilibet abſciſſæ x ſua
ordinatæ y reſpondeat. His generatim prænotatis, quæ obvia ſunt, ad ramos
curvæ reales determinandos, oportet inſpicere, quandoam ordinatæ y præve-
niant imaginariæ, quando reales, & ſi reales quando poſitivæ ſint, quando ne-
gativæ.

2. Diverſitas exponentium m, n facit, ut parabolæ rami reales modo in-
has, modo in illas plagas excurrant. Quod ut facilius cognoſcamus, extraha-
mus radicem $m+n$, ut formula oriatur $\sqrt[m+n]{a^m x^n} = y$. Si ambo exponentes
 m, n ſint numeri impares, fiet $m+n$ par. Jam vero ſi accipiat x poſitiva,
erit x^n poſitiva; ergo y æquabit radicem parem quantitatis poſitivæ; ſed radix
par quantitatis poſitivæ eſt & poſitiva, & negativa; ergo duplex eſt valor y
negativus, & poſitivus, & ad plagam abſciſſarum CB (Fig. 1) poſitivarum du-
plex ramus parabolæ CP, CQ excurrit, primus in regione ordinarum poſi-
tivarum, ſecundus negativarum. Si vero x negativa ſumatur, x^n erit negati-
va; ergo y æquat radicem parem quantitatis negativæ, quæ ſemper eſt imagi-
naria; ergo ad plagam abſciſſæ negativæ, nullus eſt ramus parabolæ. Si æqua-
tio fuiſſet $-a^m x^n = y^{m+n}$, eodem ratiocinio probabis, utrumque ramum pro-
tendi ad partem abſciſſæ negativæ.

3. Sit deinde n impar, & m par, ut impar ſit $m+n$. Si x accipiat x po-
ſitiva, erit x^n poſitiva; ergo y æquabit radicem imparem poſitivæ quantitatis,
quæ unum dumtaxat valorem habet realem, atque hunc poſitivum; ergo unus
exurgit ramus curvæ CP , (Fig. 2) cujus ordinatæ, & abſciſſæ ſunt poſitivæ. Si
vero x negativa ſit, negativa item erit x^n ; igitur y æqualis eſt radici impari negati-
væ quantitatis, quæ uno ſolum prædita eſt valore reali, atque hoc negativo. Ha-
bet itaque curva alium ramum CQ , cujus tam abſciſſæ, quam ordinatæ ſunt
negativæ. In æquatione $-a^m x^n = y^{m+n}$, abſciſſis poſitivis reſpondent ordina-
tæ negativæ, & poſitivæ abſciſſis negativis.

Fig. 2.

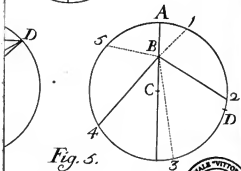
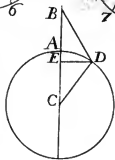
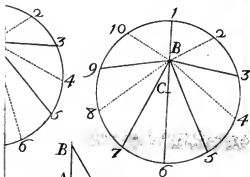


Fig. 5.





4. Postea pone n parem, m impar, ut sit impar $m+n$. Existente x positiva, erit quoque positiva x^n , & y erit radix impar quantitatis positivæ, quæ positiva est. Nascitur itaque, ut antea, ramus CP (Fig. 3). Existente x negativa, x^n positiva est, quia potestas par quantitatis negativæ est positiva; igitur valor realis y æquantis radicem impari quantitatis positivæ est positivus. Quare exoritur in curva ramus CQ, qui situs est in plaga abscissæ negativæ, & ordinatæ positivæ. In æquatione $-a^m x^n = y^{m+n}$ uterque ramus prægreditur ad plagas ordinarum negativarum.

5. Demum omnes $m, n, m+n$ sint numeri pares. Accepta x vel positiva, vel negativa, x^n semper positiva est; ergo ubique y est radix par positivæ quantitatis, atque adeo duos valores reales habet unum affirmativum, alterum negativum (Fig. 4). Parabola igitur quatuor ramis prædita erit, qui ad quatuor plagas procedunt. Æquationis vero $-a^m x^n = y^{m+n}$ curva omnis imaginaria est. Verum advertendum est casum hunc ultimum non præbere curvas novas, sed solum duas parabolas simul junctas ad casus superiores pertinentes. Nam extrahatur radix quadrata æquationis

$a^m x^n = y^{m+n}$, ut fiat $\pm a^{\frac{m}{2}} x^{\frac{n}{2}} = y^{\frac{m+n}{2}}$, quæ extractio, si opus est, iteretur, donec exponentes desinant esse omnes pares. Extractione peracta ob ambiguum signum se offerunt duæ parabolæ, quæ spectant ad aliquem ex superioribus casibus.

6. Præterquam parabolæ familiam desero, oportet advertere, licet, posita x infinita, infinita sit & y , tamen x, y non in eodem esse ordine infinitorum. Ut ordines distinguam gradatim procedo, & specto primum parabolam conicam, cujus æquatio $ax = yy$. Quoniam est $a:y::y:x$, quemadmodum y est infinita respectu datæ a ; ita x est infinita respectu y ; ergo si considero y esse sitam in primo ordine infinitorum, x posita erit in secundo. Similiter æ-

quationem parabolæ cubicæ $a^{\frac{2}{3}} x = y^{\frac{2}{3}}$, præbet analogiam $a:y::y:\frac{y^2}{a}::\frac{y^2}{a}:x$;

ergo sicuti y est infinita respectu a , $\frac{y^2}{a}$ erit infinita respectu y , & x infinita respectu $\frac{y^2}{a}$; igitur si statuatur y in primo ordine infinitorum, x erit in tertio.

Generatim ostendam hoc progressu in parabola, cujus æquatio sit $a^m x^n = y^{m+n}$, si y sit in primo ordine infinitorum, x erit in ordine $\frac{m+n}{m}$ -esimo.

Quod si habeam $a^m x^n = y^{m+n}$, extracta radice n fiet $a^{\frac{m}{n}} x = y^{\frac{m+n}{n}}$. Itaque si y pertinetur spectetur ad primum ordinem infinitorum, x spectabit ad ordinem $\frac{m+n}{n}$ -esimo,

qui ordo, si $\frac{m+n}{n}$ sit numerus fractus, medius est inter superiores ordines. Contra si spectetur esse in primo infinitorum ordine, y erit in ordine $\frac{n}{m+n}$ -esimo,

qui medius est inter finitum, & primum ordinem infinitorum.

7. Quod dictum est de quantitibus infinite magnis, idem dicas velim de infinite exiguis. Nam si y minima accipitur, & constituitur in primo ordine infinitesimorum, valente æquatione $a^x = yy$, x erit in secundo, quum sit tercia proportionalis post a , y , & debeat esse minima respectu y , sicuti y est minima respectu a . In æquatione vero $a^x = y^3$, erit x in tertio infinitesimorum ordine, & generatim in æquatione $a^x = y^{m+1}$ posita y in primo infinitesimorum ordine, erit x in ordine $\frac{m+1}{m}$; immo in æquatione $a^x = y^{m+n}$ erit x in infinitesimorum ordine $\frac{m+n}{n}$. Contra si contempnatur x in primo ordine,

y erit in ordine $\frac{n}{m+n}$. Adverte breviter, parabolam æquationis $a^m y^n = x^{m+n}$, eandem esse, ac superiorem cum hoc tantum discrimine, quod hujus ordinatæ abscissæ illius sunt parallelæ, & vice versa.

8. Ad familiam hyperbolarum gradum facio, quæ continentur hac æquatione $x^m y^n = a^{m+n}$, seu $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$. Generatim, existente y reali, si accipitur x minima, y est infinita; & si sumatur x infinita, y evadit minima. Quare hyperbolæ rami omnes reales prædicti sunt duobus asymptotis, quorum unum est ipsa abscissarum linea, alterum parallelum est ordinatis, & dicitur ab ipso abscissarum initio. Conditiõ autem numerorum m, n , qui & pares, & impares esse possunt, determinat, utrum rami reales sint, an imaginarii, & ad quam

plagam progrediantur; quam ob rem ita dispone æquationem $y = \sqrt[n]{\frac{a^{m+n}}{x^m}}$.

9. Si ambo exponentes m, n sint impares, ut contingit in hyperbola apolloniana, posita x positiva erit x^m positiva; ergo y est radix impar positivæ quantitatis, quæ unicum tantum habet valorem realem positivum. Itaque nascitur ramus BPN (Fig. 5), cujus ordinatæ, & abscissæ positivæ sunt. Si x sit negativa, x^m erit negativa, & y radix impar quantitatis negativæ, quæ unum valorem realem negativum habet; ergo alter ramus prodit MQA, cujus ordinatæ, & abscissæ sunt negativæ.

10. Si n sit impar, & m par, sumpta x vel positiva, vel negativa, erit x^m semper positiva; ergo y radix impar quantitatis positivæ, quæ unicum habet valorem realem positivum. Duobus itaque ramis constat curva BPN, AQN, (Fig. 6) quorum primus habet ordinatas & abscissas positivas, alter abscissas negativas, & ordinatas positivas.

11. Sit n par, m impar. Existente x positiva, x^m erit positiva; igitur y radix par quantitatis positivæ, quæ duobus valoribus gaudet positivo, & negativo. Itaque duo rami progrediantur ad partem abscissæ positivæ nempe BPN, BQN (Fig. 7.) quorum uni conveniunt ordinatæ positivæ, alteri negativæ. Si x accipitur negativa, x^m erit negativa; ergo y radix par quantitatis negativæ, quæ semper est imaginaria; nullus igitur ramus realis ad partem

tem abscissarum negativarum. In omnibus hisce casibus, si æquatio fuisset $x^m y = -a^{m+n}$, eodem prodirent hyperbolæ, dummodo coordinatæ positivæ converterantur in negativas, & vice versa.

12. Postremo par sit uterque numerus m, n ; ergo vel x positiva sit, vel negativa, x semper est positiva, & y radix par quantitatis positivæ, quæ præbet duplicem valorem realem positivum, & negativum. Quatuor itaque ramis constat curva, qui in quatuor plagis sunt constituti (Fig. 8.) Rami autem omnes æquationis $x^m y = -a^{m+n}$ sunt imaginarii. Hic quoque adverte, hyperbolam hujus casus, nihil aliud esse, quam duas aliorum casuum hyperbolas simul junctas. Nam extrahe radicem quadratam, donec aliquis numerus impar prodeat, & ob signum $-$, duæ hyperbolæ sese offerent.

13. Tametsi posita x infinita, minima ubique evadat y ; tamen non semper est in eodem infinitesimorum ordine. In hyperbola appolloniana, cujus æquatio $xy = aa$, y erit in illo ordine infinitesimorum, in quo ordine infinitorum est x , quem vocabimus primum; nam $x : a :: a : y$. In hyperbola æquationis $x^2 y = a^3$, y erit in secundo ordine infinitesimorum; nam $x^2 : a^2 :: a : y$; atqui x^2 est in secundo ordine infinitorum; ergo y in secundo infinitesimorum. Generatim vero in æquatione $x^m y = a^{m+1}$, facta x infinita primi ordinis, y erit in infinitesimorum ordine m^{esimo} . Imo in generaliore æquatione $x^m y = a^{m+n}$, seu $x^{\frac{m}{n}} y = a^m$, y erit in ordine $\frac{m}{n}^{esimo}$. Si $\frac{m}{n}$ sit numerus fractus, ordo iste mediat inter ordines duos, qui a numeris integris exprimuntur. Quod dictum est de ordine infinitesimorum ordinatæ y , transferas velim ad ordinem infinitorum, quum x accipitur infinita exigua. Hæc autem diversitas ordinum in quantitatibus infinite tum magnis, tum parvis, paulo post maximam afferre utilitatem cognosces.

14. Addamus nonnulla de curvis, quæ paraboloides vocari solent. In his ordinata y æquat functionem rationalem, & integram abscissæ x . Hujusmodi est curva æquationis $a^2 y = x^3 + bx^2 - c^3$. Paraboloidum æquationis generalis ita se habet $a^{m-1} y = x^m + bx^{m-1} + acx^{m-2} + \dots + a^{m-1} k$. Quoniam y semper habet valorem realem unicum, quicumque sit valor abscissæ x five positivæ, five negativæ, constat, curvam nusquam interruptam esse, sed continuo progressu ad utramque partem in infinitum protendi. Si ponas x infinitam, vel positive accipias, vel negative, neglectis reliquis terminis, qui respectu x^m minimi sunt, æquatio consistit in terminis $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$.

15. Jam vero in eadem suppositione x infinitæ, si m sit numerus impar, y erit positiva, si x sit positiva; y erit negativa, si x sit negativa. Curva autem continua, in qua ordinata y debet a positiva in negativam transire, necessario lineam abscissarum secabit. Secabit vero aut in uno, aut in tribus, aut

in quinque punctis ita, ut impar sit numerus interfectionum. Etenim curva continua non potest incipere ad plagam y positivæ, & desinere in plaga y negativæ, nisi lineam abscissarum secet tot vicibus, quarum numerus sit impar.

16. Si m par sit, x infinita vel positiva, vel negativa quum præbeat x^m semper positivam, præbebit item positivam y . Quare curva continua, in qua y respondens x vel positivæ vel negativæ infinitæ est positiva, aut nusquam secabit lineam abscissarum, aut secabit in duobus, aut in quatuor, aut in sex punctis ita, ut par sit numerus interfectionum. Veruntamen si in ultimo termino k negativa foret, ut mutato signo ultimus terminus sit $-a^{m-1}k$, facile probatur, bis saltem a curva lineam abscissarum secari. Etenim posita in æquatione $x=0$, fit $y=-k$, scilicet negativa; ergo y primum est positiva, tum negativa, deum iterum positiva; quod in curva continua accidere non potest, nisi saltem bis in lineam abscissarum incurrat.

17. Ex his maximi momenti consuetaria deducuntur. Omnis æquatio gradus imparis prædita est, saltem una radice reali, & si plures habet, earum numerus est impar. Namque ponatur æquatio $=y$, tum intelligatur descripta curva huic æquationi respondens, ejus abscissæ sint AB (Fig. 9). Perspicuum est radices reales æquationis determinatæ esse abscissas respondentes ordinatis $y=0$; atqui ibi $y=0$, ubi curva intersecat lineam abscissarum; ergo abscissæ definentes in puncta interfectionum sunt æquationis radices; atqui, ut probatum est, unum semper existit punctum interfectionis, & si plura existant, sunt numero imparia; igitur æquatio determinata gradus imparis non semper ornata est radice reali, & si pluribus ornata sit, earum numerus impar sit necesse est. Si interfectio caderet in abscissarum initio, una radix realis $=0$. Hinc colligas velim, radices imaginarias esse numero pares. Nam si ex numero impari omnium radicum deducas numerum imparem radicum realium, reliquus est radicum imaginariarum numerus par.

18. Æquationes gradus paris aut nullam habent radicem realem, aut habent plures numero pares; quia posita æquatione $=y$, (Fig. 10) curva aut nusquam secat lineam abscissarum, aut secat in punctis numero paribus. Verum si ultimus æquationis terminus sit negativus, quum curva secet abscissarum lineam saltem in duobus punctis, æquatio determinata prædita erit saltem duabus radicibus realibus. Numerus radicum imaginariarum etiam in his debet esse par. In nulla æquatione itaque imaginariis carente contingere potest, ut imaginariæ radices sint numero impares.

CAPUT SEPTIMUM.

De curvis excedentibus gradum secundum, quæ per instrumenta delineantur.

SI de instrumentis, curvisque per ea descriptis pro dignitate agere vellem, non breve caput, sed longissimum volumen ut scriberem, oporteret. Quapropter specimen aliquod dumtaxat præbebo solutis nonnullis problematibus, quæ majori utilitate, atque elegantia prædita esse mihi videntur.

I. Pro.

Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 5.

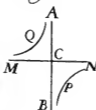
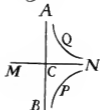


Fig. 6.



8.

Fig. 9.

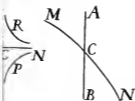
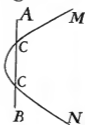


Fig. 10.



1. Problema primum. Anguli ABC (Fig. 1.) crura inequalia libere moveri possint circa verticem B . Punctum A extremum cruris AB ita firmatur in A , ut circa ipsum libere converti possit: punctum C extremum cruris alterius moveri possit in data linea AO transeunte per punctum A . Producatur BC in M , donec $CM = BC$; quaeritur curva, quam descripturum est punctum M incedente C per rectam AO . Ex punctis B, M demittantur in AO normales BF, NO . Quoniam triangula BCF, MCO similia sunt, & $BC = CM$, erit $CF = CO, FB = OM$. Quare vocatis $AB = a, BC = CM = b, AO = x, MO = BF = y$, erit $CO = CF = \sqrt{bb - yy}$, & $FO = 2\sqrt{bb - yy}$; demum $AF = \sqrt{aa - yy}$; ergo resultat æquatio $x = \sqrt{aa - yy} + 2\sqrt{bb - yy}$. Quæ ablatis, ut par est, radicibus, & opportune ordinata in æquationem hanc quarti gradus convertitur.

$$\begin{aligned}
 yy^4 + 10xy^2 + x^4 & \\
 + 6a^2y^3 - 2ax^2 & \\
 - 24b^2y^2 - 8b^2x^2 & = 0 \\
 + a^4 & \\
 - 8a^2b^2 & \\
 + 16b^4 &
 \end{aligned}$$

2. Curva hujus æquationis quem habeat progressum, & figuram ex instrumento, per quod delineatur, determinemus. Tres casus distinguendi sunt, vel enim $BC = b$ est major $AB = a$, vel æqualis, vel minor. In primo casu, in quo BC est major AB (Fig. 2), distendatur $ABCM$ in lineam rectam, ut punctum M cadat in S, C in H, B in D . Elevetur angulus B remanente G in recta ES . In hoc motu punctum B per arcum circulearem semper elevatur, donec AB fiat perpendicularis AS , & veniat in locum AG ; deinde punctum B deprimitur, donec AB cadat super AE , & punctum M veniat in T existente $ET = BM = 2b$; ergo $TS = 2a, AT = 2b - a$. Ramus similis ramo SMT habetur ad alteram partem lineæ TS . Demum converso instrumento curva similis ad aliam partem puncti A delineatur. Hic generatim distingue tres casus $b > a, b = a, b < a$. In primo casu curva TMS (Fig. 3.) ubique concava provenit axi TS (Fig. 4). Hoc idem accidit in casu secundo, nisi quo tamen ob nescio quam moram, quæ observatur in instrumento, ubi punctum describens accedit ad T , jure bono suspicari aliquid singulare in eo puncto inesse. In ultimo casu curva procedit a T versus A (Fig. 2), & concavitatem obvertit A , convexitatem S ; tum post flexum contrarium ordinatim procedit, ut in casibus aliis.

3. Si fuerit $b = a$, demonstratum est in libro superiore a puncto M (F. 5) describi ellipsim conicam, cujus centrum A , semiaxis primus $AS = 3a$, secundus $AI = a$. Sed dum punctum D ascendens per arcum circulearem DG pervenit ad S , punctum C remanens in linea AS invenitur in A , & S in I : ergo ubi hanc positionem natum fuerit instrumentum, ita moveri potest, ut punctum C non discedat ab A , quo in motu punctum I describet circulum radii A , quare curva descripta quarti gradus coalescet ex duabus secundi nimirum circulo, & ellipsi. Reapse si æquationem

$$yy^4 + 10x^2y^2 + x^4 - 18a^2y^2 - 10a^2x^2 = 0, \text{ in quam mutatur æquatio superior, si fiat } b = a, \\ + 9a^4$$

dividas per $yy + x - a = 0$, quæ est æquatio circuli, provenit $yy^2 + x^2 - 9aa = 0$, quæ est ad ellipsim.

4. Reliquum est, ut inspiciamus, quam figuram habeat curva, si sit $b < a$. (Fig. 6) Si lineæ omnes distendantur in rectam, ut sit $AD = a$, $DH = HS = b$. elevetur punctum D per arcum circulearem DG, remanente puncto H in linea A, punctum S describet arcum SL, donec DH fiat perpendicularis AS, & veniat in locum GK, puncto S translato in L. Tum si K feratur versus A radius AG descender, & punctum G per eundem arcum GD percurrer, donec G veniat in D, & L in T, existente TD = $2b$ & TA = $2b - a$. Hoc modo describetur curva SLT, quæ conjuncta cum simili TGS exhibet ovalem. Converso instrumento secunda ovalis similis producitur. Si $2b > a$, duæ ovales se intersectant, ut in figura. Si $2b = a$, ovales duæ sese contingunt in A; si $2b < a$, ovales separatæ sunt, & inter sese distant per lineam = $2a - 4b$.

5. Urum instrumenti per solutionem superioris problematis delibavi potius, quam exsolui. Nam accipi potest CM (Fig. 1.) cujuscumque magnitudinis, vel positiva, vel negativa, quo in casu describitur curva quarti gradus, excepto casu, in quo M coincidit cum B, & in quo describitur circulus. Potest punctum describens constitui extra lineam BC. Præterea linea FO, in qua itineratur punctum C, potest non transire per punctum A, circa quod convertitur in girum AB. Demum hæc eadem linea FO potest esse quæcumque curva. Quapropter infinitæ curvæ hoc instrumento delineabuntur, quæ tamen intra finitum spatium claudentur, neque ullum habebunt ramum infinitum. Harum naturam ex principiis traditis, & tradendis poterit investigare industrius geometra.

6. Problema secundum. Dato extra datam VT (Fig. 7) puncto A, ex quo ducatur AB datæ normalis, & producat in D. Moveatur ita linea ABD ita ut transeat semper per punctum A, & punctum B remaneat in VT, quæritur, quam curvam descripturum sit punctum D. Ponamus AD pervenisse in locum ARN existente RN = BD, ex puncto N, quod est in curva, demittatur MN normalis in BD. Vocetur AB = a , BD = b = RN, AM = x , MN = y , erit AN = $\sqrt{xx + yy}$, & MB = $x - a$; atqui AN : AM :: RN : MB; ergo $\sqrt{xx + yy} : x :: b : x - a$, & quadrando $xx + yy : xx :: bb : xx - 2ax + aa$, & dividendo $yy : xx :: bb - xx + 2ax - aa : xx - 2ax + aa$; ergo

$$xy^2 + x^3 - 2axy^2 - 2ax^3 = 0. \text{ Hæc autem æquatio non solum includit curvam DN} \\ + ayy + aaxx - bbxx$$

descriptam a puncto D, sed etiam secta BE = BD curvam descriptam a puncto E. Curva hæc a Nicomede instrumenti inventore nomen accepit, & conchoidis nicomedea appellatur. Partem DN descriptam a puncto D, conchoidem ulterioiorem vocabo, quæ autem describitur a puncto E posito ad partes puncti A, ceteriorem vocabo.

7. Ulterior in omni hypothesi eandem figuram habet; nempe ad utramque partem lineæ AD, discedens a puncto D accedit ad VT, cui primum obvolvitur concavum, tum facto contrario flexu eidem obvertit convexum, & eique ultra quemcumque limitem appropinquat, quin ad contactum veniat. Quare VT ad utramque partem est asymptotum curvæ. Citerior habet pro asymptoto eandem VT. Sed si $b < a$, & E jaceat inter A, B, eodem ferme pacto, quo ulterior obvertit concavum in convexum. Si vero $b = a$, & puncta A, E (Fig. 8) coincidunt, rami tangunt AB in A, & semper obvertentes convexum accedunt ad asymptotum. Demum si $b > a$, & punctum E cadat post puncta B, A, (Fig. 9) ramus unus est EQAT, alter EQAV; ita efformatur folium AQE & Q, quo in hac hypothesi prædita est conchois citerior.

8. Si in usum traducamus figuras rectilineas ordinatas, folium hoc conchoidis citerioris efformat flores non inegantes pluribus foliis instructos. Sit primo triangulum æquilaterum ABC (Fig. 10), cujus punctum medium sit I. Jungatur IA, quæ ita moveatur, ut A semper sit in AB, & transeat per punctum I. Dum fit motus ab A in B, unum folium describetur; describetur alterum æquale, si punctum A moveatur in BC; tertium, si in CA. Orietur itaque flos trium foliorum æqualium. Sit ABCD (Fig. 11) quadratum; si linea IB eodem modo moveatur per quatuor latera, exurget flos quatuor foliorum; in pentagono inveniemus florem quinque, in exagono sex foliorum, & ita deinceps. Sed hæc breviter attingite sufficiat.

9. Quisque videt, instrumentum ad usum traduci posse, tametsi linea VT, (Fig. 7) in qua itinerat punctum B non fuerit recta, sed curva. Casum maxime simplicem evolvamus, quum VT est circumferentia circuli, in qua situm est punctum A, quod poleum vocabimus. Linea ABD (Fig. 12) ita moveatur, ut semper transeat per punctum A, & punctum B non recedat a circuli periferia BRA. Quæritur descripta a puncto D. Linea describens, quæ in prima positione transeat per centrum circuli, veniat in situm ARN. Normales AD sint NM, BL, prima ducta a puncto N, altera a puncto B. Vocetur $AM = x$,

$MN = y$, $AB = 2a$, $BD = RN = b$. Erit $x : y :: 2a : BL = \frac{2ay}{x}$. Item

$$x : \sqrt{xx + yy} :: 2a : AL = \frac{2a \cdot \sqrt{xx + yy}}{x}; \text{ ergo } LN = \sqrt{xx + yy} - \frac{2a}{x}.$$

$$\sqrt{xx + yy} = \frac{x - 2a \cdot \sqrt{xx + yy}}{x}, \text{ \& } LR = b + \frac{2a - x}{x} \sqrt{xx + yy}; \text{ atqui}$$

ex natura circuli $AL \cdot LR = BL^2$; ergo

$$\frac{2a \sqrt{xx + yy}}{x} \cdot \frac{bx + 2a - x \cdot \sqrt{xx + yy}}{x} = \frac{4a^2 y^2}{x^2}, \text{ \&}$$

$$2abx \cdot \sqrt{xx + yy} + \frac{2a - x}{x} \cdot 2a \cdot \sqrt{xx + yy} = 4a^2 y^2, \text{ demum}$$

$bx + yy - 2ax = b\sqrt{xx + yy}$, quæ æquatio elevata ad quadratum, & opportune ordinata fiet

$$y^4 + 2xy^2 + x^4 - 4axy^2 - 4ax^3 - b^2y^2 - b^2x^2 + 4ax^2 = 0.$$

20. Curva hujus æquationis, quæ per instrumentum describitur, variam sortitur figuram pro diversa datarum $2a, b$ proportione. Si sit $b < 2a$, curvam exprimit figura 12. Nimirum curva DN secat circulum in A, in quem ingreditur, & facto folio egreditur a circulo, & redit per aliam partem in D. Si $b = 2a$, folium evanescit, & incipit cuspis, quæ semper existit, donec sit $b < 4a$, ut apparet in fig. 13. Si $b = 4a$, cuspis definit, neque habetur amplius posito $b > 4a$, & nascitur curva continuata, quæ habetur in fig. 14.

21. Problema tertium. Si circa datam AG (Fig. 15) volvatur norma ABC, ita ut latera normæ transeant per data puncta A, C, quæritur curva, quam descripturum est punctum M acceptum in normæ latere AB vel producto, vel focus. Ex puncto M in AC ducatur normalis MN, divisæque bitariam AC in S, vocetur SN = x, MN = y, BM = c, AS = SC = a, erit AN = a + x,

AM = $\sqrt{a+x+y^2}$. Triangula similia ANM, CAB præbeant
 MA : AN :: CA : AB, scilicet

$$\sqrt{a+x+y^2} : a+x :: 2a : AB = \frac{2a^2 + 2ax}{\sqrt{a+x+y^2}}. \text{ Quare æquatio fiet.}$$

$$\sqrt{a+x+y^2} - c = \frac{2a^2 + 2ax}{\sqrt{a+x+y^2}} \text{ five}$$

$$\frac{a+x+y^2}{a+x+y^2} - c \sqrt{a+x+y^2} = 2a^2 + 2ax, \text{ five elevando ad quadratum post}$$

factam terminorum translationem $c^2 \cdot a^2 + 2ax + xx + yy = a^2 - x^2 - y^2$, five

$$y^4 + 2xy^2 + x^4 - 2a^2y^2 - 2a^2x^2 - cy^2 - cx^2 = 0. \text{ Si fieret } c=0, \text{ formula effect quadratum comple-}$$

$$- 2acx + a^4 - a^2c^2$$

tum, cujus radix proveniret $yy + xx - aa = 0$, quæ est æquatio ad circulum. Si M situm esset inter puncta A, B, c accipienda esset negativa, quæ hypothesis nihil æquationem mutat.

22. Ut curva omnis delineetur, debent successive rotari quatuor anguli ABC, ABF, FBT, TBC. Curvæ figura diversa est pro varietate proportio-

tionis datarum $AG=2a$, $BM=c$. Si $c < 2a$, curva instruitur folio, ut exprimit figura 16; Si $c=2a$, folium evanescit, & incipit cuspis, quæ conservatur donec $c=4a$ ut in fig. 17. Si $c=4a$, cuspis evanescit, neque amplius apparet, ut in fig. 18, quum $c > 4a$. Hoc omittendum non iudico, quod si in æquatione ponatur $x=-a$, invenitur $y=0$. Quare videtur punctum A ad curvam pertinere, tamen in duabus ultimis figuris per illud curvam transire non apparet. Quare in his casibus punctum A est punctum solitarium, & conjugatum, quod licet ab instrumento non exhibeatur, tamen æquationi satisfacit.

13. Hæc omnia locum habent, si angulus ABC rectus fuerit. Curva, quæ describitur angulo non recto, æquationem aliquanto habet complicatiorem. Hanc invenimus. Ex puncto C (Fig. 19) demittatur CF normalis in AB; ratio BF:FC, quæ constans est, vocetur $g:2a$, reliquæ denominationes serventur ut antea. Habebimus

$$AF = \frac{2aa + 2ax}{\sqrt{a+x+yy}}, \quad BF = \sqrt{\frac{a+x+yy}{a+x+yy}} - \frac{2aa - 2ax}{\sqrt{a+x+yy}} - c, \quad \&$$

$$CF = \sqrt{\frac{4aa - (2aa + 2ax)^2}{a+x+yy}}; \quad \text{Igitur erit}$$

$$\sqrt{a+x+y^2} - c - \frac{2aa - 2ax}{\sqrt{a+x+y^2}} : \sqrt{\frac{4aa - (2aa + 2ax)^2}{a+x+y^2}} :: g:2a \text{ fa-}$$

ctaque multiplicatione per $\sqrt{a+x+y^2}$ fiet

$$x^2 + y^2 - a^2 - c\sqrt{a+x+y^2} : 2ay :: g:2a, \text{ five}$$

$x^2 + y^2 - a^2 - gy = c\sqrt{a+x+y^2}$, quæ elevata ad quadratum, & ordinata præbet

$$\begin{aligned} y^4 - 2gy^3 + 2x^2y^2 - 2g^2xy + x^4 \\ - 2a^2y^2 + 2a^2gy - 2a^2x^2 \\ + g^2y^2 - c^2x^2 \\ - c^2y^2 - 2acx^2 \\ + a^4 \\ - c^2a^2 \end{aligned} = 0, \text{ quæ pariter est æquatio quar-} \\ \text{ti gradus.}$$

14. Problema quartum. Invenire æquationem curvæ descriptæ a puncto M (Fig. 20) posito in circumferentia circuli BM rotantis supra æqualem circumulum BA immobilem. Punctum describens M initio motus sit in A, ducatur radius CA, qui producatur prout opus fuerit. Rotetur circulus, & veniat in positio- nem BM. Patet arcum BA = BM. Junge centra circulorum recta CK, quæ tran-

transibit per contactum B. Duc radium KM, qui productus concurrat cum CA in D. Quoniam BA, BM sunt arcus æquales circulorum æqualium, æquales erant anguli BCA, BKM; ergo triangulum CDK isosceles, & CD=DK, & proinde AD=MD; ergo linea AM parallela CK. Præterea juncta DB dividet bifariam omnes parallelas CK, adeoque etiam AM in E, eisdemque erit perpendicularis. Duc MN perpendicularem in CD. Voca radios circulo-

$$\text{rum} = r, CN = x, AN = x - r, MN = y, AM = \sqrt{x - r + yy}, \&$$

$$AE = \frac{1}{2} \sqrt{x - r + yy}. \text{ Propter triangula similia erit } CB : AE :: CD : AD,$$

$$\text{sive } CB : CB - AE :: CD : CA \text{ sive } r : r - \frac{1}{2} \sqrt{x - r + yy} :: CD : r; \text{ ergo}$$

$$CD = \frac{rr}{r - \frac{1}{2} \sqrt{x - r + yy}}.$$

$$\text{Denique quæ similia sint triangula AMN,}$$

$$ADE, \text{ vel } CDB \text{ fiet } CD : CB :: AM : AN; \text{ vel analyticè}$$

$$\frac{rr}{r - \frac{1}{2} \sqrt{x - r + yy}} : r :: \sqrt{x - r + yy}^2 : x - r, \text{ seu}$$

$$r - \frac{1}{2} \sqrt{x - r + yy}$$

$$r : r - \frac{1}{2} \sqrt{x - r + yy} :: \sqrt{x - r + yy} : x - r; \text{ ergo}$$

$$rx - rr = r \sqrt{x - r + yy} - \frac{xx + 2rx - rr - yy}{2}, \text{ vel}$$

$$\frac{xx + yy - rr}{2} = r \sqrt{x - r + yy}, \& \text{ quadrando}$$

$$\frac{xx + yy - rr}{2}^2 = rr \cdot x - r^2 + rry^2, \text{ quæ opportune ordinata in hanc mutatur}$$

$$\begin{aligned} y^4 + 2xy^2 + x^4 \\ - 6r^2y^2 - 6r^2x^2 = 0. \\ + 8r^3x \\ - 3r^4 \end{aligned}$$

Curvæ, quæ oriuntur ex rotatione circuli supra circumulum dicuntur epicycloides. Ea autem, cujus æquationem invenimus, est epicycloidum simplicissima quæ coincidit cum curva num. 9, dummodo $b = 2a = 2r$, quod cognoscet, si in hac pro x scribas $a - x$.

15. Methodus hæc elegans aptari nequit, si circuli duo diversa diametro præditi sint. Etenim fundatur in eo, quod arcus BA, BM sint æquales & similes. At si circulus rotans habeat diversam diametrum, arcus BA, BM (Fig. 21) sunt quidem æquales sed non similes. Ostendendum est, quæ methodo aliarum quoque epicycloidum inveniri possit æquatio. Junctis centris C, K, agatur KM. Quoniam æquales sunt arcus BA, BM, anguli ACB, BKM erunt in ratione inversa radiorum. Itaque si radius CB = R, KB = r, angulus ACB : BKM :: r : R: si hæc proportio radiorum sit effabilis, curva erit sem.

femper algebraica; fed si fit irrationalis, erit transcendens. Fiat $R:r::m:n$ exi-
stentibus numeris m, n integris. Sit angulus $ACB = n\mu$, $BKM = m\mu$.
Agantur in CK normales AD, ME , sumptoque pro sinu toto $AC = R$, erit

$$AD = Sc.n\mu, CD = Cc.n\mu; \text{ item } ME = \frac{r}{R}.Sc.m\mu, KE = \frac{r}{R}.Cc.m\mu$$

In quadrilatero $CNME$ anguli in E, N recti sunt; ergo reliqui duo NCE, NME complent duos rectos; ergo producta NM , donec concurrat cum CK in F , angulus ACD erit æqualis EMF , & triangulum ACD erit simile FME ; ergo $CD:AC::ME:MF$; five analyticè

$$Cc.n\mu : R :: \frac{r}{R}.Sc.m\mu; MF = \frac{r.Sc.m\mu}{Cc.n\mu}. \text{ Præterea } CD:DA::ME:EF;$$

sive in speciebus $Cc.n\mu:Sc.n\mu::\frac{r}{R}.Sc.m\mu:EF = \frac{r.Sc.n\mu.Sc.m\mu}{R.Cc.n\mu}$; igitur

$$KF = \frac{r.Sc.n\mu.Sc.m\mu}{R.Cc.n\mu} - \frac{r}{R}.Cc.m\mu = \frac{r}{R} \cdot \frac{Sc.n\mu.Sc.m\mu - Cc.n\mu.Cc.m\mu}{Cc.n\mu};$$

igitur $CF = R + r + \frac{r}{R} \cdot \frac{Sc.n\mu.Sc.m\mu - Cc.n\mu.Cc.m\mu}{Cc.n\mu}$. His determi-

natis est $CN:Nf::CD:DA$, seu $x:y + \frac{r.Sc.m\mu}{Cc.n\mu}::Cc.n\mu:Sc.n\mu$, ex

qua provenit prima æquatio $I \times Sc.n\mu - y.Cc.n\mu = r.Sc.m\mu$. Præter-

ea $CD:CA::CN:CF$, vel $Cc.n\mu.R::x:R+r +$

$$\frac{r}{R} \cdot \frac{Sc.n\mu.Sc.m\mu - Cc.n\mu.Cc.m\mu}{Cc.n\mu}, \text{ ex qua secunda æquatio}$$

II $Rx = R+r.Cc.n\mu + \frac{r}{R}.Sc.n\mu.Sc.m\mu - Cc.n\mu.Cc.m\mu$. Si opu-

nus ejicias functiones angulorum $n\mu, m\mu$ ab altera, invenies epicycloidis æqua-

tionem datam per coordinatas x, y .

16. Supponamus primum $R=r$ & $m=n=1$, ut inveniamus æquationem

simplicissimæ epicycloidis, de qua antea mentionem facimus. Ex prima æqua-

tionem fiet $x-r.Sc.n = y.Cc.n$, ex qua descendit $Cc.n = \frac{r.x-r}{\sqrt{x-r+y}}$;

$Sc.n = \frac{r.y}{\sqrt{x-r+y}}$. Hi valores substituantur in secunda æquatione, ut na-

$$\text{scatur } rx = \frac{2rr.x-r}{\sqrt{x-r+y}} + \frac{r^2y^2 - r^2.x-r}{x-r+y}, \text{ five}$$

$$rx + rr.x - r + rx - rr.y^2 = 2rr.x - r \cdot \sqrt{x-r+y}, \text{ factaque divi-}$$

sione per $r.x-r$, proveniet $xx - rr + yy = 2r\sqrt{x-r+y}$, ad quam æqua-

17. Si pro cosinu, & sinu $m\mu$ valores substitutas datos per μ , nimirum

$$\frac{Cc.\mu + \sqrt{-1.Sc.\mu} + Cc.\mu - \sqrt{-1.Sc.\mu}}{2R^{m-1}} \text{ pro } Cc.m\mu, \&$$

$$\frac{Cc.\mu + \sqrt{-1.Sc.\mu} - (Cc.\mu - \sqrt{-1.Sc.\mu})}{2R^{m-1}\sqrt{-1}} \text{ pro } Sc.m\mu, \& \text{ bino-}$$

mia actu elevas ad potestatem integram m , ut abeant imaginaria, idemque facias quoad arcum $m\mu$, duas æquationes invenies, per quas poterit æquatio localis determinari. Sed hæc non vacat fusius persequi.

18. Problema quintum. Lineæ LAS (Fig. 22) insistenti super data BC ad angulos rectos, & transeunti per punctum A, alligatum sit filium SBF æquale datæ BC, quod plicatum in B distendatur juxta BC a filo F; tum servatis his conditionibus moveatur BC intra angulum rectum GAH, quaeritur curva a filo F descripta. Ex puncto F agantur FN, FM normales lateribus anguli recti. Vocetur AN = x , FN = y , BC = a . Ob æqualitatem SBF, & rectæ BC fiet BS = FC; ergo quum sit CB : BA :: BA : BS; erit CB : BA :: BA : FC; atque CB : BA :: FC : FN; ergo CB, BA, FC, FN sunt in continua proportione geometrica; ergo CB : FN :: CB³ : BA³; ergo $a : y :: a^3 :$

$BA^3 = a^2 y$; ergo $BA = a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$. Simili modo ostendam $CA = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$. Hinc

habetur æquatio $a^2 = a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}}$, sive $a^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$, & elevan-

do ad potestatem tertiam $a^2 = y^2 + 3y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}x^2 + x^2$, sive substituto

$a^{\frac{2}{3}}$ pro $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$, translatisque terminis $a^2 - x^2 - y^2 = 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. Quæ æ-

quatio, si elevetur ad potestatem cubicam, & opportune ordinetur, fiet

$$y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 - 3a^2y^4 + 21a^2x^2y^2 - 3a^2x^4 + 3a^4y^2 + 3a^4x^2 = 0, \text{ quæ est curva sexti gradus.}$$

Si fiat $x=0$ proveniunt $y^2 - a^2 = 0$; ergo $y = \pm a$. Itaque secta AG = a , curva transibit per G. Similiter ostendam facta AH = a , curvam transire per H. Suo loco ostendetur, curvam in puncto F tangi a linea BC, et in punctis G, H a linceis AG, AH. Ut curva integra generetur, motus faciendus est non solum in angulo GAH, sed etiam in tribus aliis angulis, KAH, KAI, IAG.

19. Problema sextum. Linea LAN transeiens per punctum A (Fig. 23) insilat ad angulos rectos supra BC, quæ moveatur intra angulum rectum BAC, quæ.

quæritur curva a puncto N descripta. Agatur NM normalis in AM, & vocetur AM = x, MN = y, AN = $\sqrt{x^2 + y^2}$, & BC = 2a. Similitudo triangulorum dat

$$AM : MN :: AN : NB$$

$$x : y :: \sqrt{x^2 + y^2} : NB = \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$NM : AM :: AN : NG$$

$$y : x :: \sqrt{x^2 + y^2} : NC = \frac{x}{y} \sqrt{x^2 + y^2};$$

ergo æquatio provenit $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$, five $y^2 + x^2 = 2ax$, quæ elevata ad secundam potestatem, & opportune ordinata fit

$$y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 - 4a^2x^2y^2 = 0, \text{ quæ est æquatio sexti gradus. Ut curva integra}$$

obtinetur, oportet, quemadmodum in superiore, motum fieri in quatuor angulis rectis. Constat autem quatuor foliis æqualibus, quæ quatuor anguli continent.

20. Problema septimum. In datæ lineæ rectæ AB (Fig. 24) puncto A applicetur norma NAM, quæ libere circa punctum A rotari possit, eidem rectæ AB normalis linea MN moveri possit motu parallelo. Describente concursu linearum AM, MN datam lineam LM, quæritur quamnam curvam descripturam sit punctum N, in quo concurrunt lineæ AN, NM. Vocetur AP = x, PM = z,

PN = y. Quoniam angulus est rectus; erit $z : x :: x : y$; ergo $z = \frac{x^2}{y}$, in qua

æquatione si ponas pro z ejus valorem datum per x ex natura datæ curvæ LM, invenies æquationem quæsitam. Si LM sit linea recta non transiens per punctum A, vidimus libro superiore sectionem conicam generari; immo si fuerit parallela AB, curva genita erit parabola, quam hac ratione delineavimus. Sit LM

curva hujus æquationis $a^{m-n} x^n = y^m$; ergo æquatio curvæ genitæ erit

$$a^{m-n} x^n = \frac{x^{2m}}{y^m}, \text{ seu } y^m = \frac{x^{2m-n}}{a^{m-n}}, \text{ ex qua æquatione, quæ curva gignatur, apparet. Verum diligentius inspicimus curvam AN, quæ oritur, si LM}$$

fit circumferentia circuli transiens per punctum A, cujus centrum C positum

fit in recta AB. Vocata circuli diametro = 2a, erit $z = \sqrt{2ax - x^2} = \frac{x^2}{y}$;

ergo $2axy^2 - x^2y^2 = x^3$. Hæc eadem æquatio provenit, si proponatur hoc problema. Descripto super AB semicirculo, excitataque BEO normali diametro, quæritur curva, in qua ducta qualibet AE, quæ curvam secet in N, circulum in D, sit semper NE = AD. Hæc autem curva Cissois Dioclis nuncupatur. Sed

ex nostra constructione proprietatem, per quam Diocles curvam determinavit, demonstremus. Perficiatur circulus ABM, qui secet AN in D. Ex B erigatur normalis diametro AB, cum qua concurrat AM producta in E. Ajo EN = AD.

Jun-

Jungo DM. Quum angulus DAM sit rectus, DAM erit semicircumferentia. Ergo DM tranabit per centrum, & erit diameter; igitur BM jungens puncta M, B erit æqualis, & parallela AD; ergo ENMB est parallelogrammum, & EN æqualis BM; igitur AD=EN. Q. E. D.

21. Problema octavum. Data chorda MN (Fig. 25) moveatur in circulo, ut ejus puncta extrema semper maneant in circumferentia, in eam ex puncto posito in circumferentia cadat normalis AS; quaeritur, quam curvam describitur sit concursus perpendicularis, & chordæ. Ex A ducatur diameter, cum qua concurret MN producta in L. Ex centro C duc normalem in MN, quam dividet bifariam, & ducatur SX normalis diametro. Vocetur radius CA = a, chorda data MN = 2b, AX = x, XS = y, erit CO = $\sqrt{a^2 - b^2}$, & AS = $\sqrt{xx + yy}$. Ob angulum re-

ctum ASL erit AX:XS::XS:XL, seu $x:y::y:XL = \frac{y^2}{x}$, & AL = $x + \frac{y^2}{x} = \frac{x^2 + y^2}{x}$,

& CL = $\frac{x^2 + y^2}{x} - a$; atqui est AL:CL::AS:CO; ergo

$$\frac{x^2 + y^2}{x} : \frac{x^2 + y^2}{x} - a :: \sqrt{x^2 + y^2} : \sqrt{a^2 - b^2} \text{ five}$$

$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{a^2 - b^2} = xx + yy - ax$, quæ elevata ad quadratum, atque ordinata est hujusmodi

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 2ax^2y^2 - 2ax^3 - a^2y^2 + b^2x^2 = 0. \text{ Hæc curva quarti gradus apparet instructa folio;}$$

$$+ b^2y^2.$$

quod intra reliquam curvam continetur, ut figura repræsentat. Si $b=0$, ut corda mutetur in tangentem, evanescit folium, & curva habet cuspidem in A. Si $b=a$, ut corda sit æqualis diametro, generatur circulus, cujus diameter est AC. Quod indicat æquatio, quæ fit quadratum completum, cujus radix $y^2 + x^2 - ax = 0$, quæ est æquatio circuli.

22. Problema nonum. Normæ AB E (Fig. 26) applicetur regula AE mobilis circa punctum A; tum alia regula MX ita constitatur, ut dum movetur, semper normalis remaneat rectæ AE. Fili, cujus longitudo æquat datam AB, ex terminis una alligetur normæ in A, alia regulæ MX in puncto extremo X. Fiat motus ita, ut filum distendatur juxta rectas AB, MX, quaeritur curva a puncto M descripta. Quoniam filum AXM = AB, MX, quaeritur curva a puncto M descripta. Quoniam filum AXM = AB, ablato communi AX fiet MX = XB; ergo ob angulos rectos XME, XBE erit ME = BE. Rectæ AB normalis ducatur MP. Sit AP = x, PM = y, AB = a, erit BP = a - x, & AM = $\sqrt{xx + yy}$. Jam vero est AP:PM::AB:BE, seu $x:y::a:BE = \frac{ay}{x} = EM$;

sed AP:PB::AM:ME; ergo $x:a-x::\sqrt{xx+yy}:\frac{ay}{x}$, igitur

$ay = a - x \cdot \sqrt{xx + yy}$, qua quadrata, & opportune reducta invenimus

$$\frac{x^3 - 2ax^2 + x^3}{2a - x} = y^3, \text{ quæ est æquatio tertii gradus.}$$

23 Ab instrumento non describitur nisi curvæ pars AMB simul cum æquali posita ad alteram partem lineæ AB. Sed secta $BD = AB$, æquatio fati demonstrat, ordinatam esse realem, donec abscissa x sit minor $AD = 2a$; ergo ad utramque partem curva prætenditur ultra punctum B, immo erit asymptotica lineæ DQ, quæ ducitur normalis AD. Ut descripta parte AMB partis B_2M constructionem suppleamus, sumatur filum, cujus longitudo $= AD = 2AB$, extremitas una alligetur in P regulæ PM, altera in 2P regulæ 2P 2M; filum autem transeat per punctum A. Distento filo moveatur regula 2P 2M versus D, & per filum trahat regulam PM versus A; hæc autem regulæ semper insistant normaliter rektæ AD. Dum hic motus peragitur convertatur regula AM 2M circa A, ut transeat per M, in quo ordinata MP fecat curvam AMB. Hoc motu punctum intersectionis rektarum AE 2M, 2P 2M describet partem curvæ B_2M . Nam quum filum sit duplum AB, & filum circumvolutum AP sit duplum AP, erit P_2P dupla PB, ergo $PB = B_2P$; Ergo $EM = E_2M$, sed $EM = BE$; ergo $E_2M = BE$, quæ est proprietas curvæ quæsitæ.

CAPUT OCTAVUM.

De curvarum ramis in infinitum excurrentibus
& de asymptotis.

1. IN superiore libro plura verba feci de proprietatibus linearum secundi ordinis, nunc methodos aperiam, quibus linearum superiorum ordinum proprietates deteguntur. Primum de ramis in infinitum excurrentibus, & de eorum asymptotis agam, quia ex eorum numero, & proprietate diversa genera curvarum potissimum distinguuntur. Si linea curva quæcumque ramum habeat in infinitum excurrentem, ducta ex puncto infinito distito ordinata normali, notissimum est, aut abscissam, aut ordinatam, aut ambas infinitas esse. Quapropter si curva habeat ramum infinitum, vel abscissæ finitæ respondebit ordinata infinita realis, vel abscissæ infinite magnæ ordinata realis vel finita, vel infinita. Ex hac animadversione ramorum in infinitum excurrentium plenissima descendit investigatio. Equationem propositam in plura membra distribuo nempe P, Q, R, S &c. Primum membrum P terminos omnes continet, in quibus summa exponentium coordinatarum x, y est omnium maxima, quam voco $= n$. Secundum Q continet terminos, in quibus eadem summa $= n - 1$. Qui vero habeat exponentium summam $= n - 1, n - 3$ &c. componunt membra R, S &c.

2. Spectandum est præcipue primum membrum P. Si hoc nullum habeat factorem simplicem realem, sed omnes imaginarios, quod solum evenire potest existente n numero pari, curva caret ramis infinitis, atque omnis intra spatium finitum continetur. Etenim advertendum est, in supremo membro P terminos x^n, y^n deesse non posse, quia secus P esset divisibile per y , aut per x , atque adeo factores omnes non essent imaginarii, quod est contra hypothèsim. Verum

rum si curva haberet ramum infinitum, aut utraque, aut alterutra ex coordinatis x, y infinita esset; ergo P æquaret infinitum elatum ad potestatem n , hoc est ∞^n ; atque sequentia membra Q, R &c. ad summum æquantur $\infty^{n-1}, \infty^{n-2}$ &c., atque adeo respectu primi evanescent; ergo æquatio fit $P=0$; atque quum in P nullus sit factor realis, nulla est hujus æquationis radix realis; igitur nulla est ordinata infinita realis, neque ulli abscissæ reali infinitæ responderet ordinata realis aut infinita, aut finita; ergo curva nequit excurrere in infinitum. Hinc vidimus in libro secundo curvam æquationis

$y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + e = 0$ nullo præditam esse ramo infinito, si $\frac{aa}{4} < b$, in quo casu supremum membrum $yy + axy + bx^2$ in factores reales non resolvitur.

3. Si in supremo membro P sit factor realis $ay - bx$, mutatis coordinatis æquatio ejusmodi comparari potest, in qua supremi membri factor realis sit ipsa ordinata. Curva æquationi satisfaciens sit HCK , (Fig. 1) existentibus abscissis $AB = x$, ordinatis $BC = y$. Ex initio abscissarum A agatur linea AD faciens cum AB angulum A , cujus tangens $= \frac{rb}{a}$; species r indicat sinum totum;

ergo $S.c. A = \frac{rb}{\sqrt{aa+bb}}$, & $C.c. A = \frac{ra}{\sqrt{aa+bb}}$. Ex curvæ puncto C in

AD demittatur normalis CD , & novæ abscissæ $AD = r$, novæ ordinatæ $CD = u$.

Ducantur BF, BE novis coordinatis parallelæ. Habebimus $BE = \frac{bx}{\sqrt{aa+bb}}$,

$AE = \frac{ax}{\sqrt{aa+bb}}$. Item $BF = \frac{by}{\sqrt{aa+bb}}$, & $CF = \frac{ay}{\sqrt{aa+bb}}$; atque

$s = AE + BF$, & $u = CF - BE$; Ergo

$s = \frac{ax+by}{\sqrt{aa+bb}}$, & $u = \frac{ay-bx}{\sqrt{aa+bb}}$. Quapropter quum loco $ay - bx$ substitui

debeat $u\sqrt{aa+bb}$, apparet institutæ æquatione inter novas coordinatas s, u , fore u supremi membri P factorem realem. Ex superioribus æquationibus determinantur valores x, y hoc modo $y = \frac{au+bs}{\sqrt{aa+bb}}$, $x = \frac{as-bu}{\sqrt{aa+bb}}$. Hi substituantur, & oriatur æquatio, cujus supremum membrum habebit factorem u . I-

dem dicas velim si supremi membri P factor esset $\frac{ay-bx^2}{ay-bx^3}$ &c. Namque eadem adhibita methode æquationem nanciscemur, in qua supremi membri factor erit ordinatæ quadratum, cubus &c. Quare satis erit spectare æquationes, in quibus ordinata, vel ejus quælibet potestas multiplicet supremum membrum; ad has enim aliz omnes reducuntur. Neque obstat casus, in quo non y , sed x esset factor primi membri; quia in hoc y spectandæ sunt tamquam abscissæ, x tamquam ordinatæ.

4. His præmissis pono primum y esse supremi membri P factorem, cui nullus alius æqualis sit. Itaque sit $P = yM$ existente M gradus $n-1$. Exurget itaque formula $yM + Q + R + S$ &c. $= 0$; ergo $y = -\frac{Q}{M} + \frac{R}{M}$ &c. sed quum

Fig. 2.

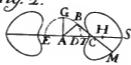


Fig. 3.

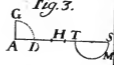


Fig. 5.

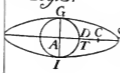


Fig. 6.



Fig. 8.

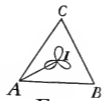
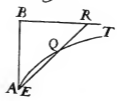


Fig. 10.

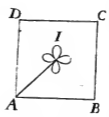


Fig. 11.





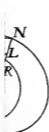


Fig. 13.

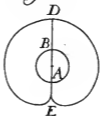


Fig. 14.

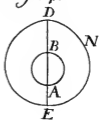


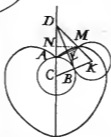
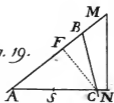
Fig. 16.



Fig. 17.



Fig. 19.



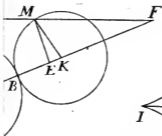


Fig. 22.

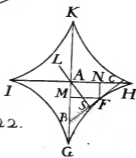


Fig. 24.

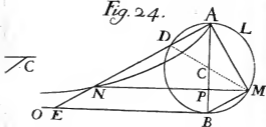
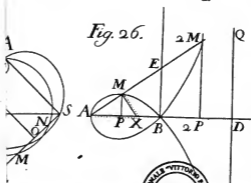


Fig. 26.



quum Q fit gradus ∞^{n-1} , R gradus ∞^{n-2} &c. R , S evanescunt respectu Q ; Ergo $y = \frac{-Q}{M}$; atqui tam Q , quam M est gradus ∞^{n-1} ; ergo y finita est. Deletis itaque in Q, M terminis, in quos ingreditur yy utpote evanescentibus, fiat $\frac{-Q}{M} = p$, erit $y = p$. Quamobrem hæc æquatio $y - p = 0$ continetur in æquatione $P + Q + R$ &c., si curva abeat in infinitum; atqui $y - p = 0$ est æquatio ad lineam rectam parallelam lineæ abscissarum x , existente parallelarum distantia $= p$; ergo curva in infinitum producta confunditur cum hac lineæ recta, quæ erit ejus asymptotum, atque hoc vel x infinita positiva sit, vel negativa. Apparet itaque curvam præditam esse ramis duobus infinitis ad oppositas plagas progredientibus, quorum linea recta parallela abscissis ad utramque partem producta asymptotum est.

5. Hoc quidem evenit, si secundum membrum Q neque ab æquatione absit, neque sit divisibile per y . Hæc duo simul conjungo, quia ad rem nostram perinde est, quod contineat factorem y , & quod in æquatione non sit. Nam si est Q divisibilis per y , fiat $Q = yN$, erit N gradus ∞^{n-2} ; ergo evanescet respectu yM ; ergo æquatio subsistet inter terminos $yM + R + S$ &c. $= 0$, quæ æquatio haberetur, si Q omnino abesset. In his casibus fiet $y = \frac{-R}{M} - \frac{S}{M}$ &c. existente M gradus ∞^{n-1} , R gradus ∞^{n-2} , S gradus ∞^{n-3} atque ita deinceps. Æquatio autem valere non potest, nisi y fiat minima, atque evanescentis.

6. Si R adsit in æquatione, neque dividi possit per y , deletis in fractione $\frac{-R}{M}$ omnibus terminis, in quos y ingreditur, fiet $y = \frac{p}{x}$, existente p quantitate finita. Si R non existat in æquatione, aut habeat factorem y , fiet $y = \frac{-S}{M} = \frac{p}{x^2}$.

Si præter R etiam S ab æquatione removeatur, aut fit divisibilis per y , invenitur $y = \frac{p}{x^3}$; atque ita deinceps; ita ut generatim fiat $y = \frac{p}{x^g}$. Si g sit impar,

& p sit positiva, existente x positiva erit y positiva, existente x negativa y erit negativa; vice versa si p sit negativa. Si g sit par; y semper erit aut positiva, aut negativa, prout p fuerit aut positiva, aut negativa. Ubique autem linea abscissarum est asymptotum curvæ.

7. Hæc progressio quantitatum æquantium y , hoc est interceptam inter curvam, & asymptotum genera diversæ asymptotorum clare discriminat. Quare ad distinguenda genera asymptotorum, dicemus asymptotum rectilineum esse ejus indolis, ut intercepta inter ipsum & curvam in puncto infinite remoto sit gradus $\frac{1}{\infty}$, aut $\frac{1}{\infty^2}$ aut generatim $\frac{1}{\infty^g}$. Quum autem hæc sit proprietas hyperbolarum

diversi gradus, constat, per hanc methodum determinari hyperbolam, cum quæ curva nostra in infinitum producta ætissime conveniat. Quare non solum cognoscis curvam habere pro asymptoto lineam rectam, sed etiam determinas inquam plaga respectu asymptoti posita sit. Quod si omnes omnino termini R, S &c. ab æquatione abessent, æquatio fieret $yM = 0$, quæ quum sit divisibilis

per y constat, curvam haberi compositam, quæ coalescit ex linea recta, ex linea scilicet abscissarum, & ex curva gradus $n-1$.

8. Quotiescumque Q aut sit divisibilis per y , aut in æquatione non adfit, nihil est facilius quam genus asymptoti determinare. Quum autem Q adfit, y invenitur æqualis quantitati finitæ $=p$; quod determinat lineam rectam asymptoticam curvæ, non autem genus asymptoti. Tradenda nunc est methodus determinandi genus asymptoti, quotiescumque y invenitur æqualis p quantitati scilicet constanti, quod sæpius evenire deinceps apparebit. In hoc casu asymptotum non est linea abscissarum, sed linea huic parallela. Quare mutare oportet coordinatas curvæ ita, ut abscissæ in asymptoto jaceant. Hoc obtinebimus si ponamus $y-p = u$, & arcus y ab æquatione. Hoc peracto facta x infinita u resultabit minima, & ex ejus valore genus asymptoti cognoscetur. Methodum docui, quæ casibus omnibus applicari potest. Ceterum sæpe adhibitis opportunis artificijs multo expeditius hæc determinatio perficietur.

9. Itaque proposita æquatione quocumque fac determines, quot in supremo membro P adsint factores simplices recales non habentis æquales. Quot sunt factores isti in æquatione, tot erunt in curva paria ramorum in infinitum excurrentium, quibus est asymptotum rectilineum. Cujus autem generis sit asymptotum rectilineum, & quænam sit hyperbola, cum qua curva in infinitum producta maxime congruat, ex præmissa methodo patefacies.

10. Transeo nunc ad æquationem, quæ in supremo membro P habeat duos factores æquales, hoc est y^2 , ut sit $P = y^2 M$, existente M functione gradus $n-2$. Æquatio igitur fiet $y^2 M + Q + R + S \&c. = 0$. Si Q neque absit ab æquatione, neque sit divisibilis per y , evanescentibus præ Q terminis $R, S \&c.$, æquatio subsistet in terminis $y^2 M = -Q$. Hæc æquatio vera esse potest, si y^2 sit gradus ∞ , quemadmodum est x , & y gradus $\infty^{\frac{1}{2}}$, hoc est infinita quidem respectu finiti, sed respectu x infinite exigua; ergo disposita æquatione hoc modo $y^2 = \frac{-Q}{M}$, evanescent in fractione $\frac{-Q}{M}$ termini omnes, qui continent y minimam. respectu x . Igitur quum Q sit gradus $n-1$, M gradus $n-2$ facta divisione fiet $\frac{-Q}{M} = p x$, existente p quantitate constante; Ergo $y^2 = p x$. Hæc æquatio, ut notum est, pertinet ad parabolam appollonianam. Nostra itaque curva in infinitum producta congruit non cum linea recta, sed cum parabola vulgari, quam habet tamquam asymptotum. Si p sit positiva, rami excurrunt ad plagam abscissarum positivarum, si p vero sit negativa, ad plagam abscissarum negativarum. Quare curva habet duos ramos in infinitum progredientes ad eandem plagam, inter quos media est linea abscissarum.

11. Quod si velis parabolam, cum qua curva nostra in infinitum producta congruat æctius, ne omitras terminum sequentem scilicet R , atque æquationem insitue $y^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} = 0$. Quoniam R, M sunt functiones ejusdem gradus $n-2$, eliminatis terminis nullecentibus, peractaque divisione fiet $-\frac{R}{M} = q$ quantitati scilicet constanti; ergo æquatio proveniet $y^2 = p x + q$, quæ pariter est parabola prædita eadem parametro, sed ejus vertex distat ab initio abscissarum x per quan-

quantitatem constantem $= \frac{p}{P}$.

12. Nunc supponamus secundum membrum Q esse divisibile per y^2 , ut sit $y^2 N = Q$, existente N functione gradus $n - 3$. Quum M functio sit gradus $n - 2$, manifestum est $y^2 N$ evanescere præ $y^2 M$. Idem itaque est, quod membrum Q absit ab æquatione, & quod sit per y^2 divisibile. Quod dicendum est pariter de membris R, S &c. In hac hypothese si R adsit, neque sit divisibile per y , æquatio subsistet in terminis $y^2 + \frac{R}{M} = 0$. Quoniam R, M sunt ejusdem gradus $n - 2$, fractio $-\frac{R}{M}$, deletis terminis nullestentibus, evadet æqualia quantitati constanti scilicet p ; Ergo $y^2 = p$. Si p sit negativa, y est imaginaria, adeoque nullum ramum habet curva in infinitum extensum. Si p sit positiva, fiet $y = \pm \sqrt{p}$; quæ æquatio indicat, curvam duo habere asymptota rectilinea, quæ æque distant a linea abscissarum, eamque mediam tenent. Ad genus asymptoti cognoscendum, ut antea docuimus, inveni æquationem, cujus abscissæ capiendæ sunt in asymptoto ponendo $y - \sqrt{p} = u$, atque hoc peractò ex regressu traditis, vel tradendis cognosces unius asymptoti genus. Similiter facta $y + \sqrt{p} = u$, alterius genus determinabis.

13. In æquatione $y^2 M + Q + R + S$ &c. $= 0$ si præter Q desit etiam R , aut sit per y^2 divisibilis, æquatio fiet $y^2 = -\frac{S}{M} = \frac{p}{x}$. Si S quoque desit, aut habeat factorem y^2 , æquatio erit $y^2 = -\frac{T}{M} = \frac{p}{x^2}$, atque ita deinceps, ut generatim fiat $y^2 = \frac{p}{x^g}$, per quas æquationes & numerus ramorum in infinitum percurrentium, & asymptotorum cognoscitur.

14. Verum hoc fusius explicandum videtur. In æquatione $y^2 = \frac{p}{x^g}$, g par esse potest, & impar. Sit g impar. Si p positiva est, ad partes x positivæ y duos valores habet positivum, & negativum. Quare asymptotum hyperbolicum, adeoque curva duos ramos habet, qui medium tenent asymptotum rectilineum ad partes x positivæ. Ad partes vero x negativæ, y imaginaria est, adeoque nullus ramus infinitus. Contra accidit, si p sit negativa: nam ad partes x positivæ y imaginaria est, ad partes x negativæ y reales valores habet duos positivum, & negativum. Sit g par. Si p sit positiva, y habet duos valores reales ad plagam x tam positivæ, quam negativæ; ergo hyperbolicum asymptotum, & curva prædita est quatuor ramis infinitis. Si p sit negativa, y semper est imaginaria; ergo curva expers est ramorum infinitorum.

15. Difficilior est casus, quum Q , aut membra subsequentiæ sunt divisibilia tantum per y . Existat Q in æquatione, & sit divisibilis per y . Si R & sit in æquatione, neque per y dividi possit, fiat $Q = y N$ existente N functione gradus $n - 2$, quemadmodum M, R ; Ergo æquatio subsistet in tribus terminis $y^2 M + y N + R = 0$, quæ facta x infinita locum habere potest, si y finita sit.

Erit

Erit itaque $y^2 - py - q = 0$, quoniam fractiones $\frac{-N}{M}$, $\frac{-R}{M}$ sunt quantitates constantes, quas de more voco p, q . Si æquatio $y^2 - py - q = 0$, nullam habeat radicem realem, & y sit imaginaria, nullus convenit curvæ ramus in infinitum excurrent. Si y duos valores reales habeat duplex est asymptotum rectilineum parallelum lineæ abscissarum; duo autem asymptota in unum conveniunt, si duo valores y sint æquales. Ad cognoscendum autem genus asymptoti utere methodo, quam antea exposui.

10. Si R absit, aut sit divisibilis per y , æquatio subsistit in terminis $y^2 M + y N + S = 0$, quæ reducitur ad formam

$$y^2 - py - \frac{q}{x} = 0. \text{ Si absit etiam } S, \text{ invenies}$$

$y^2 - py - \frac{q}{xx} = 0$; atque ita deinceps. Si Q in æquatione non sit, aut contineat yy , R autem per y dividi possit, ut sit $R = yN$, existente N gradus $n - 3$, si S adsit, neque dividi possit per y , æquatio fiet

$$yy - \frac{py}{x} - \frac{q}{x} = 0. \text{ Remoto } S \text{ non autem } T \text{ erit}$$

$yy - \frac{py}{x} - \frac{q}{xx} = 0$, atque ita deinceps. Si etiam R sit divisibilis per yy , aut non existat, S autem habeat factorem y , invenies successive æquationes

$$y^2 - \frac{py}{x} - \frac{q}{x^2} = 0$$

$y^2 - \frac{py}{x^2} - \frac{q}{x^3} = 0$, atque ita deinceps. Itaque in his casibus omnibus res redu-

citur ad æquationem trinomiali $yy - \frac{py}{x^f} - \frac{q}{x^g} = 0$, in qua g nunquam est minor f , sed vel æqualis, vel major.

17. Ut determines, quænam eliciantur, facta $x = \infty$, ex trinomio æquationes, hac utere methodo. Compara duos terminos, & determina gradum y , ut duo termini sint homogenei. Si tertius terminus infinite exiguus reperiat, æquatio inter duos terminos assumptos locum habet. Si tertius terminus in eodem sit gradu ac assumpti, omitti non potest, sed ipse quoque in æquationem ingredi debet. Si tertius terminus infinitus sit respectu assumptorum, æquatio inter assumptos intercedere nullo modo potest. Idem præsta in singulis terminorum paribus. Methodus etiam æquationibus multinomiis applicatur.

18. In trinomio invento, ut primi duo termini sint homogenei oportet, ut y sit gradus $\frac{1}{\infty^f}$; ergo isti primi duo termini sunt gradus $\frac{1}{\infty^{2f}}$, tertius vero terminus est gradus $\frac{1}{\infty^g}$. Si $g = 2f$, tertius terminus est ejusdem gradus, ac primi duo; æquatio igitur in paucioribus quam tribus terminis consistere non potest; erit itaque $y^2 - \frac{py}{x^f} - \frac{q}{x^{2f}} = 0$. Si hujus æquationis radices sunt imaginariæ, nullus in

cur-

curva ramus infinitus; si ambæ reales, existunt duo asymptota hyperbolica gradus $\frac{x}{\infty f}$

ad idem asymptotum rectilincum, quæ duo in unum coalescunt, si radices æquales sint. Si $g < 2f$, ultimus terminus infinitus est respectu primorum; ergo inter primos æquatio valere non potest. Videamus utrum valere possit inter primum, & ultimum. Ut isti termini sint homogenei, debet y esse gradus $\frac{x}{2}$, & uterque terminus est gradus $\frac{x}{\infty g}$; secundus autem invenitur $\frac{x}{\frac{x}{2} + f}$; atqui $\frac{g}{2} + f > g$,

si $2f > g$; ergo secundus terminus respectu reliquorum evanescit. Æquatio igitur valet $y^2 - \frac{g}{x^2}$, quæ genus asymptoti determinat. Comparatio secundi, & ter-

tii termini nihil dat in hac hypothefi, quia primus respectu reliquorum est infinitus. Si $g > 2f$, æquatio inter primos valet, quia ultimus nullefcit; ergo erit $y = \frac{p}{x^f}$, ex qua cognoscitur genus asymptoti. Sed præter hanc alix valere pos-

sunt æquationes. Si primus, & ultimus terminus fiant homogenei, secundus ipfis infinitus est major, nulla igitur inter hos æquatio. Secundus & ultimus erunt homogenei, si y sit gradus $\frac{x}{\infty g - f}$, quo in casu primus est gradus $\frac{x}{\infty 2g - 2f}$,

ac propterea respectu reliquorum evanescens, est enim $2g - 2f > g$; ergo æquatio valebit $y = \frac{-g}{p x^{g-f}}$, quæ genus asymptoti satis designat.

19. Contineat supremum membrum P factorem y^3 , ut sit $P = y^3 M$, existente M gradus $n-3$. Si Q neque absit ab æquatione, neque sit divisibilis per y , æquatio subsistet in primis terminis duobus, & fiet $y^3 = \frac{-Q}{M}$. Q est gradus $n-1$, M est $n-3$; ergo y^3 debet esse gradus ∞^2 , posita $x = \infty$; ergo y erit quidem respectu finiti major quæcumque data, at respectu x infinitæ est quæcumque data minor. Ejectis porro terminis evanescentibus, perfecta quæ divisione fiet $y^3 = p x^2$. Curva itaque in infinitum producta convenit cum parabola secunda cubica, cujus parameter $= p$, ac proinde habet duos ramos infinitos, unum ad plagam x positivæ, alterum ad plagam x negativæ. Si p sit positiva, rami jacent ad partes ordinarum positivarum; ad partes vero negativarum, si p sit negativa.

20. Si Q divisibilis sit per y^3 , manifestum est membrum hoc evanescere præ primo P, quod de subsequentibus membris dicendum est. Perinde est itaque, quod membra absint omnino ab æquatione, & quod sint divisibilia per y^3 . Si Q dividi possit per y^3 , aut in æquatione non sit, æquatio fiet $y^3 = \frac{-R}{M}$, quæ fractio in hypothefi $x = \infty$ fit $= p x$; Ergo $y^3 = p x$, quæ est æquatio ad parabolam primam cubicam. Asymptotum itaque non est linea recta, sed curva

va o dinis parabolici, quæ prædita est duabus ramis, quorum unus est in regione^r ordinarum positivarum, alter in regione negativarum. In hoc casu y est infinita, si comparatur cum finito, sed evanescens, si comparatur cum x . Si R quoque habeat factorem y^3 , aut non sit in æquatione, & sequentia membra dividi nequeant per y , æquatio proveniet $y^3 = \frac{-S}{M}$. Quam M, S sint ejusdem gradus, facta x infinita, fractio evadit quantitas finita; Ergo $y^3 = p$. Hæc æquatio habens unam radicem realem, & duas imaginarias docet, unum tantummodo haberi asymptotum rectilineum, cujus gradum per methodum traditam determinabis. Si pariter S divisibilis sit per y^2 , aut in æquatione locum non habeat, erit $y^3 = \frac{-T}{M} = \frac{p}{x}$; Deficiente etiam T exurget $y^3 = \frac{p}{xx}$, atque ita in reliquis; ut generatim valeat æquatio $y^3 = \frac{p}{x^k}$, quæ asymptoti hyperbolici genus clare determinat.

20. A terum membrum æquationis Q sit divisibile per y^2 , ut sit $Q = y^2 N$, existente N gradus $n-3$. Æquatio sistet in terminis $y^3 M + y^2 N + R = 0$, five $y^3 + y^2 \frac{N}{M} + \frac{R}{M} = 0$. Quam æquatio nullo modo subsistere possit, nisi y nullifcat præ x infinita, quia R est gradus $n-2$, sit $y^3 - py^2 - qx = 0$. Si y^3 ejusdem ordinis statuatur ac x , terminus medius py^2 evanescet præ reliquis; ergo erit $y^3 = qx$. Hæc æquatio dat asymptotum parabolicum gradus $\infty^{\frac{1}{2}}$, cum quo coeunt duo rami curvæ infiniti ad oppositas plagas progredientes, unum in regione ordinarum positivarum, alius in regione negativarum. Præter hanc nulla alia æquatio valere potest. Si R non sit in æquatione, aut dividi possit per y^2 , æquatio invenietur $y^3 - py^2 - q = 0$, quæ subsistit posita y finita. Ordinata y aut nnum valorem realem habet, aut tres; in primo casu unus erit asymptotum rectilineum parallelum abscissis, in secundo tria, nisi tamen propter duorum valorum æqualitatem duo coalescant in unum. Quomodo genus asymptoti cognoscatur, ex superioribus constat. Si præter R etiam S absit, aut sit divisibilis per yy , fiet $y^3 - py^2 - \frac{q}{x} = 0$; absente T oriatur

$$y^3 - py^2 - \frac{q}{x^2} = 0; \text{ atque ita deinceps. Quare nascitur}$$

æcumenicum trinomium $y^3 - py^2 - \frac{q}{x^k} = 0$; Ex hac duæ resultant æquationes

nempe $y = p$, quæ dat asymptotum rectilineum, cujus genus inquirendum; $y^3 = \frac{q}{x^k}$, quæ exhibet genus asymptoti rectilinei. Si absente Q sit R divisibilis per yy , fiet $y^3 - \frac{py^2}{x} - \frac{q}{x^k} = 0$. Si R absit, & S contineat yy , habebis

$$y^3 -$$

$y^3 - \frac{py^2}{x^2} - \frac{q}{x^g} = 0$; atque ita de reliquis. Quapropter nascitur trinomium

$y^3 - \frac{py^2}{x^f} - \frac{q}{x^g} = 0$, in quo f non potest esse major g , sed vel æqualis, vel minor.

22. Evolvamus hoc trinomium, in quo tres casus distinguere oportet; vel enim $g > 3f$, vel $g = 3f$, vel $g < 3f$. In primo casu duæ valent æquationes, nempe $y = \frac{p}{x^f}$, $y^2 = \frac{-q}{p \cdot x^{3f-2}}$, quæ genera asymptotum determinant. Ad idem itaque asymptotum rectilinum duo exurgunt asymptota hyperbolica, nisi unum imaginarium evadat. Si $g = 3f$, facta y ordinis $\frac{1}{\infty^f}$, tertius terminus est in eodem ordine, ac primi duo; nullus ergo terminus omitti potest. Æquatio aut unam, aut tres radices reales habet, omnes gradus $\frac{1}{\infty^g}$. Ad idem idem

gigitur asymptotum rectilinum aut unum, aut tria asymptota rectilinea exurgunt ejusdem generis. Duo autem coibunt in unum, si duo valores y sint æquales. Si $g < 3f$, unica æquatio valet, nempe $y^3 = \frac{q}{x^g}$, quæ genus asymptoti designat.

23. Si Q sit divisibilis tantum per y , non autem R , proveniet trinomium $y^3 - pyx - qx = 0$, quod præbet æquationes duas, nempe $y^2 = px$, $y = \frac{-q}{p}$. Ex prima nascitur asymptotum parabolicum; ex secunda, in qua y est constans, rectilinum, de cujus genere ex methodo tradita inquire. Si R desit, non autem S , erit trinomium $y^3 - pyx - q = 0$, ex qua pariter $y^2 = px$, & $y = \frac{-q}{p}$. Non existentibus in æquatione primum S , tum T &c., proveniet trinomium

$$y^3 - pyx - \frac{q}{x^2} = 0$$

$$y^3 - pyx - \frac{q}{x^3} = 0: \text{ quare generatim}$$

$$y^3 - pyx - \frac{q}{x^g} = 0. \text{ Ex hoc semper duæ æquationes, scilicet } y^2 = px,$$

$y = \frac{-q}{p \cdot x^{g+1}}$. Prima dat asymptotum parabolicum gradus $\infty^{\frac{2}{3}}$, altera hyperbolicum gradus $\frac{1}{g+1}$.

24. Non existente Q in æquatione, sit R divisibilis per y , non autem S ,
V v orie-

oriatur trinomium $y^3 - py - q = 0$, quæ valet y valorem habente finitum; Quum y vel unum habeat, vel tres valores reales, unum, aut tria exurgunt asymptota rectilinea; duo autem in unum coire possunt, si y duos valores habeat æquales. Si deficiat S non autem T , aut unum ex membris subsequenti-

bus, nascetur æquatio $y^3 - py - \frac{q}{x^g} = 0$, in qua duæ æquationes continentur $y^3 = p$, $y = \frac{-q}{p \cdot x^g}$. Hæc secunda dat asymptotum rectilineum, & ejus genus:

Prima si p sit negativa est imaginaria, nullumque dat ramum in infinitum excurrentem; si p positiva sit, dat quatuor; duo enim proveniunt asymptota rectilinea.

25. Si non Q , sed aliquod ex membris subsequentiibus contineat factorem y , æquatio proveniens erit hujusmodi $y^3 - \frac{p}{x^f}y - \frac{q}{x^g} = 0$, in qua nequit esse

$f < g$. Tres casus distinguere oportet; vel enim $3f < 2g$, vel $3f = 2g$, vel $3f > 2g$. In primo casu valent æquationes duæ $y^2 = \frac{p}{x^f}$, $y = \frac{-q}{p \cdot x^g - f}$, quæ

ad idem asymptotum rectum præbent duo asymptota hyperbolica, quorum nota sunt genera. In secundo casu $3f = 2g$, termini omnes sunt homogenei; quare y aut unum, aut tres valores habet, omnes ejusdem gradus $\frac{g}{3}$, cui tria asymptota

hyperbolica respondent; duo autem coire possunt in unum, si duo valores y æquales sint. Demum si $3f > 2g$, sola æquatio valebit $y^3 = \frac{q}{x^g}$, quæ præbet asymptotum rectilineum gradus $\frac{g}{3}$.

26. Ad ultimam hypothesim accedo, in qua adsunt cum termini continentes y^3 , tum continentes y . Si Q habeat factorem y^3 , R factorem y , & S sit in æquatione, occurrit quadrimomium $y^3 - py^2 - qy - r = 0$, in qua y , quæ finita esse potest, unum aut tres valores habet reales; ergo unum, vel tria asymptota rectilinea; duo, aut tria coibunt in unum, si duo, aut tres valores y æquales sint. Si æquatio membro S privata sit, assumatur primum ex membris sequentiibus, quod habetur, ut fiat

$y^3 - py^2 - qy - \frac{r}{x^t} = 0$. In hac duæ æquationes continentur, nempe

$yy - py - q = 0$, $y = \frac{-r}{q \cdot x^t}$. Prima præbet asymptotum rectilineum nullum,

si y sit imaginaria, aut duo, si y realis sit, nisi tamen duæ cocant in unum ob æquales valores y . Altera exhibet asymptotum hyperbolicum gradus $\frac{1}{\infty t}$.

27. Remoto R , S aut aliquis ex terminis sequentibus contineat factorem y , ut oriatur æquatio $y^3 - py^2 - \frac{qy}{x^f} - \frac{r}{x^g} = 0$, in qua f non potest esse major g . Hæc semper continet $y = p$, quæ sufficit asymptotum rectilineum. Præterea si y ponatur minima, manifestum est y^3 evanescere præ py^2 ; ergo æquatio sistet in terminis $y^2 + \frac{qy}{px^f} + \frac{r}{px^g} = 0$, quæ quid in singulis casibus exhibeat, paullo ante docuimus.

28. Reliquum est, ut videamus, quid accidat, si Q deficiat, & solum aliquod ex membris subsequenteribus ducatur in yy . Proveniet quadrinomialium

$$y^3 - \frac{py^2}{x^e} - \frac{qy}{x^f} - \frac{r}{x^g} = 0, \text{ in quo neque } e \text{ potest esse major } f, \text{ neque } f \text{ major}$$

g . Magna, ac prope incredibilis varietas oritur ex diversa exponentium proportionatione. Ponamus $f = 2e$, $g = 3e$, ex quibus descendit $2g = 3f$. Si y sit gradus $\frac{1}{e}$, omnes termini quadrinomialium sunt homogenei, neque ullus omitti potest. Quare y aut unum, aut tres valores reales habebit, omnes ejusdem gradus; ergo aut unum aut tria asymptota hyperbolica ad idem asymptotum rectilineum.

29. Si inter coefficientes æqualitates superiores locum non habeant, videndum est, inter quos terminos consistere æqualitas possit aliis evanescere. Methodum antea traditam usurpabo. Videamus, utrum inter duos primos terminos æqualitas intercedere possit. Ad hanc rem necesse est, ut y sit gradus $\frac{1}{e}$, & y^3 gradus $\frac{1}{3e}$. Si $f > 2e$, & $g > 3e$, æqualitas inter duos primos terminos

consistet nulliscentibus duobus ultimis. Si $g > 3e$, sed $f = 2e$, tres primi termini constituent æqualitatem, contra si $g = 3e$, $f > 2e$, duo primi, & ultimus terminus necessarii sunt in æqualitate. Si aut $f < 2e$, aut $g < 3e$, æqualitas non subsistit, quia alteruter ex ultimis terminis evadit infinitus præ duobus primis. Inspectamus utrum æqualitas haberi possit factis duobus ultimis terminis homogeneis. Ad hoc requiritur, ut y sit gradus $\frac{1}{g-f}$; Ergo y^3 gradus

$$\frac{1}{3g-3f}, \text{ \& } \frac{y^2}{x^e} \text{ gradus } \frac{1}{2g-2f+e}. \text{ Si } 3g-3f > g, \text{ seu } 2g > 3f, \text{ \&}$$

$2g-2f+e > g$, seu $g+e > 2f$, ultimi duo termini formabunt æqualitatem. Addendus est secundus, si $g+e = 2f$; omisso secundo addendus primus si $2g = 3f$. Verum si aut $2g < 3f$, aut $g+e < 2f$, quum alteruter ex primis terminis respectu ultimorum evadat infinitus, æqualitas inter duos ultimos locum habere nequit. Eandem operationem instituens in singulis terminorum paribus, quæ æquationes valeant non difficulter determinabis. Hæc autem quum aut binomialium sint, aut trinomialium, quæ asymptota præbeant, & quot ramos infinitos ex superioribus constat.

30. Methodus fati indicat, quo pacto progredi oporteat, quum supremum membrum P contineat factorem y^4, y^5 &c.. Verum quum numerus casuum multiplicetur, advertendum est, ne aliquis omittatur. Nullo autem omisso, proclive est, determinare asymptota tum parabolica, tum hyperbolica, quæ curvæ conveniunt. Quæ dicta sunt hæctenus, opportunitum judico, uno saltem exemplo illustrare.

31. Sit proposita æquatio $y^3 x \cdot y - x^2 - a^3 \cdot y + x^3 + a^6 = 0$, atque determinandum, quot ramos infinitos habeat curva æquationi respondens, & quæ sint ejus asymptota. Inspiciamus primum, quid exhibeat factor triplus y^3 . Facta

divisione erit $y^3 - \frac{a^3 \cdot y + x^3}{x \cdot y - x^2} + \frac{a^6}{x \cdot y - x^2} = 0$. Ultimus terminus evane-

scit præ secundo; æquatio igitur subsistit in primis duobus terminis, quæ valere non potest, nisi y finita sit, atque propterea nullocat præ x infinita. Fiet

itaque $y^3 = a^3$. Unus est tantum valor realis y , nempe $y = a$; quæ æquatio docet, curvam habere asymptotum rectilineum abscissis parallelum. Posito $A B D C$, (Fig. 2) quadrato, cujus latus $= a$, sumantur abscissæ in $A B$ productæ, ordinatæ parallelæ $A C$. Linea $C D$ producta erit asymptotum curvæ. Sed cujus generis sit asymptotum nondum constat. Ut hoc per methodum traditam inveniamus, ponamus $y - a = u$, seu $y = u + a$; ergo constat facta x infinita u fore minimam. Peracta itaque substitutione invenio

$u^3 + 3 a u^2 + 3 a^2 u + a^3 - \frac{a^3 \cdot u + a + x^3}{x \cdot u + a - x^2} + \frac{a^6}{x \cdot u + a - x^2} = 0$. Quoniam u

est minima, & a nullocat respectu x , fiet $u^3 + 3 a u^2 + 3 a^2 u + a^3 - a^3 + \frac{a^6}{x^3} = 0$;

ergo evanescentibus duobus primis terminis respectu tertii, proveniet $u = -\frac{a^4}{3x^3}$. A-

symptotum itaque est generis $\frac{x}{3}$, cui conveniunt rami duo E, F ; primus ja-

cet ad partes u negativarum, alter positivarum. Idem facilius hac methodo

cruere potuisses. Non neglecto ultimo termino, æquatio effert $y^3 - a^3 + \frac{a^6}{x^3} = 0$,

seu $\frac{y - a \cdot y y + a y + a a}{x^3} = -\frac{a^6}{y y + a y + a a \cdot x^3}$; atqui quum

$y = a$, est $y y + a y + a a = 3 a a$; Ergo $y - a = \frac{-a^4}{3x^3}$ prorsus ut supra.

32. Deinde statuamus, quid ex factore x colligatur. Spectanda est x tamquam ordinata, y tamquam abscissa. Facta divisione erit

$x - \frac{a^3 \cdot \overline{y+x}^3}{y^3 \cdot \overline{y-x}^2} + \frac{a^6}{y^3 \cdot \overline{y-x}^2} = 0$. Posita y infinita ultimus terminus nullecit prae secundo, & x minima fit necesse est; Ergo $x = \frac{a^3}{y^2}$, quae dat asymptotum generis $\frac{1}{\infty^2}$. Duo rami nascentur G, H uterque ad partes x positivae.

33. Ut postremo cognoscamus, quos ramos praebet factor duplex $y-x$, ducenda est linea AD, atque aequatio invenienda sumptis in hac abscissis. Abscissae sumptae in AD sint $=s$, ordinatae eidem normales $=u$. His positis applicatis formulis angulo semirecto BAD, erit $s = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$, $u = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$; Ergo $\frac{s+u}{\sqrt{2}} = y$, $\frac{s-u}{\sqrt{2}} = x$. Igitur factis substitutionibus erit

$$\frac{u+s}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{s-u}{\sqrt{2}} \cdot 2u^3 - a^3 s^3 \cdot 2\sqrt{2} + a^6 = 0, \text{ sive}$$

$$\frac{u+s}{u+s} \cdot \frac{s-u}{s-u} \cdot u^3 - 4\sqrt{2} \cdot a^3 s^3 + 2a^6 = 0: \text{ ergo}$$

$$u^3 - \frac{4\sqrt{2} \cdot a^3 s^3}{u+s \cdot s-u} = 0, \text{ relicto ultimo termino evanescente respectu secundi;}$$

ergo, quum u minima fit oporteat respectu s , fiet $u = \frac{4\sqrt{2} \cdot a^3}{s}$. Asymptotum itaque hyperbolicum est generis $\frac{1}{\infty^2}$. Quapropter rami duo infiniti habe-

buntur ad partes s positivae, qui medium tenebunt asymptotum rectilineum: Curva habet sex ramos in infinitum protensos & tria asymptota generis $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. Quomodo rami in spatio finito conjungantur, non spectat ad praesentem theoriam.

CAPUT NONUM.

De contactibus, atque osculis.

1. Quomodo in indolem, atque naturam ramorum in infinitum extensorum deteximus, lineam rectam, vel curvam simpliciore assignantes, quae cum curva in infinitum producta confundatur; ita in praesentia curvam in spatio finito spectantes ad illius naturam cognoscendam, rectam, vel curvam simpliciore inquiremus, quae cum illius portione per minimum saltem spatium coneruat. Ac primo quidem lineam rectam investigabimus, quae cum curvae tractu minimo congruat, sive quae habeat cum curva communia saltem puncta duo

duo infinite proxima; quæ linea appellari solet tangens. Deinde de lineis curvis verba faciemus, quæ cum datæ curvæ portione accuratius, atque arctius, congruant, quæque osculatrices solent nominari. Ac primum de rectis tangentibus.

2. Sit curva quælibet MCE (Fig. 1), ejus æquatio relate ad coordinatas A B, B C data sit. Assumpto quolibet alio puncto D agatur ordinata DE, & ex puncto C ducatur CF parallela AB. Vocetur AB = p , BC = q , quæ duæ, ad inveniendam tangentem puncti C, tamquam constantes accipiendæ sunt. Vocetur CF = x , FE = y , erit AD = $p + x$, DE = $q + y$. Ex æquatione versante inter $p + x$, & $q + y$ dematur æquatio inter p , q , remanebit æquatio simplicissima inter x , y , in qua nullus terminus ex solis constantibus consistat. Quare hanc formam inducet

$Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Bx^2y + Hxy^2 + Iy^3$ &c. Coefficientes A, B, C, &c. sunt quantitates coalescentes ex p , q , & ex constantibus, quas includit æquatio curvæ. Hæc nova æquatio, quæ refertur ad lineam abscissæ CF, & in qua initium abscissarum est ipsum punctum C, nullo negotio tangentem puncti C determinat.

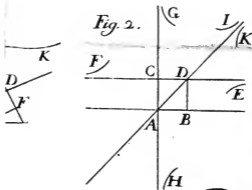
3. Illud est profecto certissimum, facta $x = 0$, esse quoque $y = 0$. Quam autem minimæ, seu evanescentis portionis curvæ indoles sit investiganda, sumenda est minima, & evanescentis abscissa CF = x ; quo in casu evanescit quoque ordinata FE = y . Sed si x , y sint minimæ, & evanescentes, ipsis infinities

minores erunt x^2 , xy , y^2 ; multo adhuc minores x^3 , x^2y , xy^2 , y^3 , atque multo magis omnes, quæ sequuntur; ergo quum istæ omnes præ primis, quæ infinities ipsis majores sunt, omitti possint, æquatio subsistet in duobus terminis $Ax + By = 0$. Hæc autem æquatio, cum sit ad lineam rectam CE transeuntem per punctum C, aperte demonstrat hanc rectam, si punctum E proxime accedat ad C, cum curva congruere. Itaque erit linea recta CE tangens curvæ in puncto C, quæ proinde facili negotio determinatur. Producat CE, donec cum AB concurrat in G. Erit ex similitudine triangulorum FE : CF seu $y : x :: CB : BG$; sed ex æquatione inventa $y : x :: A : -B$; ergo

$A : -B :: CB : BG = \frac{-B}{A} CB$. Hæc autem linea vocari solet subtangens.

Quæ quum ita sint, ad inveniendam subtangentem hæc regula utere. In data æquatione curvæ pro x, y scribe p, q ; tum in eadem pro x, y substitue $p + x$, $q + y$; primam æquationem deme ex hac secunda. Quæ resultat æquatio, ita ordinetur, ut potentias lineares constituant veluti primum terminum, tum quadraticæ, postea cubicæ, atque ita deinceps. Omissis omnibus superioribus æquatio statuatur in linearibus, atque ex hoc inveniatur proportio inter y, x , quæ sit $A : -B$; erit subtangens $BG = \frac{-B \cdot q}{A}$.

4. Pauca aliquot exempla propono. Sit parabola æquationis $ax = yy$. In hac æquatione scribo primum p pro x , & q pro y , ut sit $ap = qq$; tum $p + x$ pro x , & $q + y$ pro y , ut sit $a(p + x) = (q + y)^2$. Deme ex hac primam, & provenit $ax = 2qy + yy$, sive $ax - 2qy - yy = 0$; omisso yy , quæ quantitas nullæscit evanescentibus ordinatis, sit $ax - 2qy = 0$; ergo $y : x :: a : 2q$; Ergo $-B = 2q$, $A = a$; Erit itaque subtangens $BG = \frac{2q^2}{a}$;



atque $\frac{q}{a} = p$; Ergo $BG = 2p$. Est itaque subtangens BG dupla abscissæ AB , sicuti alias probavimus.

5. In æquatione hyperbolæ inter asymptota $aa = xy$, pro x, y (Fig. 2) substitue p, q , ut sit $aa = pq$; deinde substitue $p+x, q+y$, ut fiat $aa = pq + py + qx + xy$. Deme unam ex alia, & proveniet $0 = py + qx + xy$. Omissio xy , quæ nullecit respectu aliorum terminorum, invenies $y:x :: -q:p$; Ergo subtangens $= -p$. Quum proveniat negativa, sumenda est non ad partem, ubi initium abscissarum positum est, sed ad partes oppositas. Subtangens igitur $BG = AB$, ut alias demonstratum est.

6. Æquatio Ellipsis est hujusmodi $aa - xx : y^2 :: aa : bb$. Pro x, y scribe p, q , ut sit $aa - pp : qq :: aa : bb$; tum scribe $p+x, q+y$, ut sit $aa - pp - 2px - xx : qq + 2qy + yy :: a^2 : b^2$; Deme ab altera primam, & fiet $-2px - xx = \frac{aa}{bb} \cdot 2qy + yy$; ergo omissis omissendis $-2px = \frac{aa}{bb} \cdot 2qy$,

sive $y:x :: -p : \frac{aa \cdot q}{bb} :: q$ ad subtangentem $= \frac{-a^2 q^2}{b^2 p} = \frac{a^2 - p^2}{p}$ prout alias invenimus.

7. Ad ultimum exemplum sit linea tertii ordinis, cujus æquatio

$xy^2 = a^2 x + a^2 y$. Pro x, y primum scribe p, q erit

$pq^2 = a^2 p + a^2 q$; tum scribe $p+x, q+y$, ut fiat

$pq^2 + 2pqy + py^2 + q^2 x + 2qxy + xy^2 = a^2 p + a^2 x + a^2 q + a^2 y$. Ex hac superiore dema, ut nascatur $2pqy + py^2 + q^2 x + 2qxy + xy^2 = a^2 x + a^2 y$. Re-

lictis superioribus dimensionibus æquatio orietur $q^2 - a^2 \cdot x = a^2 - 2pq \cdot y$; Er-

go $y:x :: q^2 - a^2 : a^2 - 2pq :: q$ ad subtangentem $= \frac{a^2 q - 2pq^2}{q^2 - a^2}$. Hæc autem

exempla sufficiant ad methodum illustrandam.

8. Redeamus ad formulam æquationem $Ax + By = 0$, (Fig. 1) per quam curvæ tangens determinatur. Si in ea sit $A = 0$, fiet $y = 0$; ergo tangens coincidet cum linea CF parallela AB . Contra si $B = 0$, fiet $x = 0$; ergo tangens coincidet cum linea BC , eritque parallela ordinatis. Quotiescumque ordinata BC sit omnium, quæ ad utramque partem ducantur, vel maxima, vel minima, necesse est, ut tangens puncti C sit aut parallela abscissis, aut saltem parallela ordinatis; ergo erit aut $A = 0$; aut $B = 0$. Licet propositio hæc sit verissima, tamen cave, ne eandem convertas, & pronunties, quotiescumque $A = 0$, & tangens est parallela abscissis, aut $B = 0$, & tangens est parallela ordinatis, ordinata est omnium maxima vel minima; fieri enim potest, ut in illis punctis curva aliquid singulare habeat, quod maximam, minimamque ordinatam, ut deinceps patebit, rejiciat. Veruntamen si aliunde constet, maximam minimamve ordinatam existere, eam deteges supponendo aut $A = 0$, aut $B = 0$. Unico exemplo rem aperiam. Notum est, curvam cujus æqua-

lescerent, æquatio institienda esset inter terminos, in quibus x, y tres obtinent dimensiones ita, ut sit $Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 = 0$. Si hæc æquatio unicum habeat factorem realem, duos imaginarios, ostendet unum curvæ ramum per punctum C transire, ejusque tangentem determinabit; tum patefaciet, ovalem evanescere in puncto C, ibique latere punctum conjugatum. Si radices omnes æquationis fuerint reales, cognoscemus, tres curvæ ramos in puncto illo se interficere vel tangere, prout radices fuerint inæquales, vel æquales. Quidquid horum acciderit, curva in C donata erit puncto triplo, & rectam per hoc punctum transeuntem in tribus punctis curvam secare, censendum erit.

13. Quod si præter coefficientes omnes præcedentes, etiam quatuor F, G, H, I nulli fiant, tum ad naturam punctorum, & tangentium positionem cognoscendam, illi termini assumendi sunt, in quibus x, y quatuor obtinent dimensiones. Obtinebitur proinde punctum quadruplum, in quo vel duæ ovals evanescentes simul conjunguntur, & duplex existit punctum conjugatum; vel una tantum ovalis nullefcit, & punctum inest conjugatum, atque simul duæ curvæ rami se secant, aut tangunt, prout duæ reales radices inæquales fuerint, vel æquales; vel tandem quatuor rami curvæ se interficant, aut tangant, prout quatuor reales radices vel inæquales fuerint, vel æquales. Hoc progressu aperte cognosces, quid curvæ accidat, si assumendi sint termini quinque, sex, aut plurius dimensionum.

14. Quemadmodum ad cognoscendam naturam ramorum in infinitum extensorum latis nobis non fuit, determinare lineam rectam, seu asymptotum retilineum, cum quo curva in infinitum producta confundatur, sed etiam simpliciore curvam definiimus, cum qua nostra in infinitum extensa arctissime congruat; ita in præsentia ad curvaturam penitus cognoscendam post inventam directionem rectæ tangentis, oportet determinare curvam simpliciore, cum qua curva in dato puncto maxime cohæreat; qui arctissimus contactus a geometris vocari solet osculatio. Ut rectum ordinem sequamur, hanc definitionem præmittimus. Duarum curvarum minimi arcus duo AM, AN (Fig. 4) habentes communem tangentem sese osculari dicentur, quum ordinarum LM, LN cuiuscumque abscissæ respondentium differentia MN ad ipsas minorem habeat rationem quacumque data. Fac advertas ad rationem osculi non sufficere, ut MN differentia ordinarum LM, LN , quæ extremæ sunt, sit ad ipsas in ratione minore quacumque data, sed requiri, ut hoc verificetur in ordinatis omnibus, quæ mediæ sunt inter puncta A, L ita, ut sit ubique $QR:PQ$, aut PR in minore ratione quacumque data. His præmissis.

15. Ajo, circulum cujus radius = a osculari parabolam apollonianam in vertice, cujus parameter = $2a$. Sit circulus AMB , cujus radius $CA = CB = a$, & parabola AND , cujus parameter = $2a$. Accepta minima AL agatur LMN .

Ex natura circuli erit $2a \cdot AL - AL^2 = LM^2$, sive $2a \cdot AL = LM^2 + AL^2$;

Ex natura parabolæ erit $2a \cdot AL = LN^2$; Ergo $LN^2 = LM^2 + AL^2$, & ex-

tracta radice $LN = LM + \frac{AL^2}{2LM}$, sequentes termini negliguntur, utpote evanescentes. Igitur $LN - LM = MN = \frac{AL^2}{2LM}$. Si LM , adeoque arcus ponatur

gr. $\frac{1}{\infty}$, erit AL gr. $\frac{1}{\infty^2}$; ergo MN gr. $\frac{1}{\infty^3}$. Ergo MN respectu LM , & LN minor est quacumque data. Quæ demonstratio valet, quodcumque sumatur punctum P inter puncta A , L ; igitur sese arcus AM , AN osculantur. Q. E. D. Quoniam circulus eandem ubique obtinet curvaturam, utile semper visum est geometris cognoscere circum, qui curvam osculetur in dato puncto. Ex hac vero propositione si determinata sit parabola, cujus vertex in dato puncto curvam osculetur, cognoscetur etiam radius circuli osculatoris, & institui poterit comparatio inter curvaturam curvæ in dato puncto, & curvaturam circuli. Inventa per curvaturam circuli curvatura parabolæ vulgaris in vertice, cum hæc comparo curvaturas aliarum parabolæ in vertice. Hanc ob rem sequentes propositiones enuncio, quæ maxime attendendæ sunt.

16. Parabolam ARM (F. 5), cujus æquatio sit $a^{n-m} x^m = y^n$ existente $\frac{n}{m} > 1$, nequit in vertice osculari parabola apolloniana, tamen si parametro prædita sit infinita. Sumpta minima AL agatur ordinata LM . Ex natura parabolæ erit

$$a^{n-m} \cdot AL^m = LM^n; \text{ ergo } a^{\frac{n-m}{m}} \cdot AL^{\frac{n}{m}} = LM; \text{ ergo quadrando}$$

$$a^{\frac{2n-2m}{m}} \cdot AL^{\frac{2n}{m}} = LM^2, \text{ five } a^{\frac{2n-2m}{n-2m}} \cdot AL = LM^2. \text{ Quare ut parabola}$$

apolloniana ordinata, respondens abscissæ AL adæquet LM , necesse est, ut ejus parameter = $\frac{AL^{\frac{n}{m}}}{\frac{2n-2m}{n-2m}}$, quæ est infinita. Parabola itaque vulgaris hæc

parametro descripta transibit per punctum M . Sit ea AQM . Ne tamen judices arcus ARM , AQM sese invicem osculari. Nam sumpto quolibet puncto P , ordinataque PQR , erit ex proprietate parabolæ ARM , $a^{\frac{n-m}{m}} \cdot AP^{\frac{n}{m}} = PR$,

& ex proprietate parabolæ conicæ $\frac{a^{\frac{n}{m}}}{\frac{n-2m}{n-2m}} \cdot AP^{\frac{n}{m}} = PQ$. Igitur

$$PR : PQ :: AP^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{a^{\frac{n-m}{m}}}{\frac{n-2m}{n-2m}} : AL^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{a^{\frac{n-m}{m}}}{\frac{n-2m}{n-2m}}; \text{ sed } AL : AP \text{ est}$$

in qualibet data ratione majoris inæqualitatis; ergo etiam $PR : PQ$ potest esse in qualibet data ratione majoris inæqualitatis; ergo QR non est minima præ PQ , PR ; non igitur sese osculantur arcus ARM , AQM . Q. E. D.

17. Iisdem positis si $\frac{n}{m}$ fit < 2 , & > 1 , parabolam AQM nequit osculari in vertice parabola apollonianam, tamen prædita sit parametris minori quacunque data. Eodem instituto calculo pervenimus ad æqualitatem

$\frac{AL^n}{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n}$. $AL = LM^2$. Quare ut parabola conica transeat per punctum M, debet ejus parameter æquare $\frac{AL^n}{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n}$, quæ est quantitas minima. Ne tamen

putes parabolam apollonianam ARM hac parametris descriptam osculari aliam in vertice. Nam sumpta alia abscissa AP, atque PQR, habebimus has æ-

qualitates $a^{\frac{n-m}{m}} \cdot AP^{\frac{m}{m}} = PQ, \frac{AL^n}{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n} \cdot AP^{\frac{1}{2}} = PR$; Ergo

$PQ:PR::AP^{\frac{m}{m}}:AL^{\frac{1}{2}n}$. $AP^{\frac{1}{2}}:AP^{\frac{1}{2}n}:AL^{\frac{1}{2}n}$; ergo PQ:PR potest esse in qualibet ratione minoris inæqualitatis. Ergo arcus AQM, ARN sese invicem osculari non possunt. Ex his colligis velim, nullam parabolam, si excipias apollonianam, in vertice habere circulum osculatorem, tamen diametris præditus sit aut minima, aut infinita; quare curvatura omnium parabolarum in vertice, excepta conica, est generis toto cæli diversi a curvatura circulari. Hoc autem geometricè demonstrandum curavi, quia analytice ad unum omnes docent, curvam, cujus radius osculator sit aut minimus, aut infinitus, habere pro curva osculante parabolam aliquam in vertice ab apollonianam diversam. Quæ doctrina, quum vel maxime abhorreat a veritate, a geometria in perpetuum eicienda est. Quinimo curvaturæ in vertice parabolarum diversi ordinis sunt generis omnino diversi; quod ita demonstrandum aggredior.

18. Posito quod $\frac{n}{m} < \frac{p}{q}$, sive parabolam, quibus conveniunt æquationes

$a^{n-m}x^m = y^n$, $b^{q-p}x^p = y^q$ non posse sese in vertice osculari, licet a parameter primæ sit infinite exigua, aut b parameter secundæ infinita. Prima parabola sit ARM, secunda AQM, & ordinata communis sit LM. Ex æquationibus erit $a^{n-m} \cdot AL^m = LM^n$, $b^{q-p} \cdot AL^p = LM^q$. Ergo

$a^{\frac{n-m}{m}} \cdot AL^n = LM, b^{\frac{q-p}{q}} \cdot AL^q = LM$. Igitur

$a^{\frac{n-m}{m}} \cdot AL^n = b^{\frac{q-p}{q}} \cdot AL^q$, sive $\frac{a^{\frac{n-m}{m}}}{b^{\frac{q-p}{q}}} = AL^{\frac{p-m}{q}}$, in qua, existen-

re $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$, si AL sit minima, debet esse aut a minima, aut b infinita. Verum hoc etiam supposito nulla habetur osculatio. Nam ducta qualibet ordi-

nata PQR, habebimus $a^{\frac{n-m}{m}} \cdot AP^n = PR$, $b^{\frac{q-p}{p}} \cdot AP^q = PQ$; Ergo

PR: PQ: $a^{\frac{n-m}{m}} \cdot AP^n : b^{\frac{q-p}{p}} \cdot AP^q$, sive: $\frac{a^{\frac{n-m}{m}}}{b^{\frac{q-p}{p}}} : AP^{\frac{p}{m} - \frac{m}{n}}$; atqui

$\frac{a^{\frac{n-m}{m}}}{b^{\frac{q-p}{p}}} = AL^{\frac{p}{m} - \frac{m}{n}}$; Ergo PR: PQ: $AL^{\frac{p}{m} - \frac{m}{n}} : AP^{\frac{p}{m} - \frac{m}{n}}$, quæ

esse potest in qualibet data ratione majoris inæqualitatis; ergo QR minima non est respectu rectarum PQ, PR, neque osculantes sibi invicem sunt arcus ARM, AQM.

19. Quandoquidem quilibet vertex diversarum parabolarum, diversi generis curvatura præditus est, commodum erit referre curvaturas curvarum ad diversas curvaturas, quæ habentur in parabolarum verticibus. Quæmobrem ducta CH normali tangenti CG, (Fig. 1) in eamque demissa ordinata EK, oportet æquationem revocare inter CF, FE, quæ est hujusmodi nempe

$Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3$ &c. = 0 & transferre ad novas coordinatas CK, KE, vocatis scilicet CK = r , KE = u . Ponamus rationem ordinatæ BC ad subtangentem BG, seu minimæ FE ad minimam CF, seu subnormalis BH:BC esse ut $a:-b$; igitur trianguli HBC latera BH, BC, CH erunt ut $a, -b, -\sqrt{aa+bb}$. Præposui signum -

quantitati radicali $\sqrt{a^2+b^2}$, quia quantitates a, b supposui diversis signis affectas, primam scilicet +, secundam -. Cæterum in accipiendo signo quantitatis radicalis hæc regula tenenda est; si duæ quantitates a, b idem signum præfixum habeant, radicali præfige signum +; præfige autem signum -, si ipsæ signis affectæ sint diversis. In calculo instituendo, quia posui b affectam signo -, etiam $\sqrt{aa+bb}$ eodem signo afficiam. Ex puncto F ducantur FL, FI novis coordinatis parallelæ. Similitudo triangulorum has præbet analogias

$$CH:CB::CF:FL$$

$$-\sqrt{aa+bb}:-b::x:FL = \frac{-bx}{-\sqrt{aa+bb}}$$

$$CH:BH::FE:EI$$

$$-\sqrt{aa+bb}:a::y:EI = \frac{ay}{-\sqrt{aa+bb}}$$

$$CH: BH:: CF: CL$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}: a:: x. CL = \frac{ax}{-\sqrt{aa+bb}}$$

$$CH: CB: FE: FI$$

$$-\sqrt{aa+bb}: -b:: y: FI = \frac{-by}{-\sqrt{aa+bb}};$$

$$\text{atqui } FL+EI=KE, \text{ seu } \frac{-bx+ay}{-\sqrt{aa+bb}} = u, \text{ \&}$$

$$CL-FI=CK, \text{ seu } \frac{ax+by}{-\sqrt{aa+bb}} = r. \text{ Ex quibus valores } x, y \text{ de-}$$

terminabuntur hoc modo $x = \frac{ar-bu}{-\sqrt{aa+bb}}$, $y = \frac{br+au}{-\sqrt{aa+bb}}$. Si valores hujusmodi substituas in superiore æquatione, habebis æquationem inter $r, \& u$, quam requiris.

20. Si coefficientes A, B ambo non desint in æquatione, quam hypothefim primum tractandam suscipio, constat fore $A=a, B=b$. Quum ex æquatione constat $Ax+By$ æqualem esse superioribus dimensionibus x, y , quum ad minima venimus, patet $Ax+By$ fore minimum præ alterutro rectangulo Ax, By , adeoque etiam præ $-Bx+Ay$; Ergo r erit minima respectu u .

Ergo in æquatione, si excipias $Ax+By$, quæ æquat $-r\sqrt{AA+BB}$, licebit pro x substituere $\frac{-Bu}{-\sqrt{AA+BB}}$, pro y scribere $\frac{Au}{-\sqrt{AA+BB}}$. Igitur æquatio in hanc mutabitur

$$-r\sqrt{AA+BB} + CB^2 \frac{+FB^3}{-DAB \cdot AA+BB + HBA^2 \cdot \frac{u^2}{AA+BB \cdot \sqrt{AA+BB}}} \&c. = 0$$

$$+ EA^2 \frac{-IA^3}{-IA^3}$$

21. Si coefficientes $CB^3 - DAB + EA^2$ non sit $= 0$, omittantur termini sequentes, & æquatio inter duos terminos scilicet

$$r \cdot \frac{\sqrt{AA+BB} \cdot AA+BB}{+CB^3 - DAB + EA^2} = uu \text{ exhibebit parabolam appollonianam, cujus}$$

vertex osculatur curvam in puncto dato. Si vero $CB^3 - DAB + EA^2 = 0$, tum in paralogismum caderet, qui post secundum terminum continentem u^3 reliquos omitteret; nam tertius respectu secundi non evanescit, sed potius secundus respectu tertii. Quare æquatio proveniet

$$\frac{AA+BB \cdot r}{FB^3 - GB^2A + HBA^2 - IA^3} = u^3, \text{ quæ præbet parabolam cubicam, cu-}$$

jus vertex curvam osculatur; Atque ita progrediendum est deinceps nullefcensibus coefficientibus superiorum potestatum. Quæres utrum parabolæ osculantium parametris infinitæ esse possint. Infinitæ sine dubio erunt, quoties existente infinita aut A , aut B denominator fractionis respectu numeratoris nullefcatur; erunt autem minimæ, quoties utraque A, B minima existente numerator respectu denominatoris nullefcatur.

22. Si ambæ $A, B = 0$, tum spectandus est secundus terminus $Cx^2 + Dxy + Ey^2$, qui est secundi ordinis. Omittamus casum, in quo nullus sit factor realis, qui quam exhibeat punctum conjugatum, nullum locum relinquit neque contactui, neque osculo. Si in prædicto membro duo insint factor s reales inæquales, qui sint $ax + by, mx + ny$ facta divisione per $mx + ny$ proveniet

$$ax + by + \frac{Fx^3 + Gxy^2 + Hx^2y + Iy^3}{mx + ny} \&c. \text{ Substitue pro } x \frac{bu}{\sqrt{aa+bb}}, \&$$

pro y substitue $\frac{-au}{\sqrt{aa+bb}}$ ubique, excepto in $ax + by$, pro quo scribendum

$$-s\sqrt{aa+bb}, \& \text{ fiet } -s\sqrt{aa+bb} + \frac{Fb^3 - Gab^2 + Ha^2b - Ia^3 \cdot u^2}{mb - na \cdot aa + bb} \&c.$$

ex qua si coefficientis termini u^2 non $= 0$, habes parabolam apollonianam osculantem curvam propositam. Si coefficientis u^2 sit $= 0$, computato sequenti termino eadem methodo invenies parabolam cubicam; quod si etiam coefficientis u^3 sit $= 0$, ad parabolæ superiores quemadmodum antea devenies. Methodus hæc æque valet, quotiescumque in primo termino qui non deest in æquatione, existit factor simplex realis, qui non habeat æqualem. Etenim facta divisione per alterum factorem, qui ductus in $ax + by$ dat primum terminum æquationis, præstitisque ut antea iisdem substitutionibus, semper inveniemus pro curva osculante æquationem ad parabolam hujus formæ $Mr = u^m$ existente m numero integro.

23. Quod si factores primi membri duo, aut plures fuerint æquales, resest altioris, ac difficilioris indaginis. Nam licet s debeat esse minima respectu u , tamen non possunt, quemadmodum antea fecimus, omitti termini omnes, in quos ingreditur s , sed duntaxat illi, in quibus exponens s est æqualis, aut major numero factorum æqualium. Ut gradatim procedamus, proponamus æquationem

$$\frac{ax+by}{\sqrt{aa+bb}} + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 + Kx^4 \&c. = 0. \text{ Pro } x \text{ substituito } \frac{-as+bu}{\sqrt{aa+bb}}, \text{ pro } y \text{ autem } \frac{-bs-au}{\sqrt{aa+bb}} \text{ proveniet redactis ad breviorẽ$$

formam coefficientibus $rs + csu^2 + du^3 + esu^3 + fu^4 + gru^4 + bu^5 \&c. = 0$; nam manifestum est terminos ubi esset $s^2, s^3 \&c.$ respectu ad eos, qui scripti sunt, evanescere. Si $c = 0$, non autem d , æquatio consistet in terminis $rs + du^3 = 0$, quæ est ad parabolam secundam cubicam, & hæc est curva osculatrix. Si præterea tam d quam $e = 0$, æquatio erit $rs + fu^4 = 0$, quæ in duas potest resol-

solvi nempe $s = \pm u^2 \sqrt{-f}$. Si f sit positiva, curva est imaginaria, & punctum est conjugatum. Si f sit negativa, duplex habetur parabola apolloniana curvam osculans una ad partem s positivæ, altera negativæ, cæterum utraque parabola eadem; atque ita progrediens nullefcntibus terminas, in quibus adest s , parabolas osculantes determinabis.

24. Nunc ponamus c non $= 0$, si neque $d = 0$, patens est su^2 minimam esse respectu u^3 . Quare æquatio subsistit in terminis $ss + du^3 = 0$, ut antea.

Verum si $d = 0$, evanescente su^3 respectu su^2 æquatio consistet in terminis

$ss + csu^2 + fu^4 = 0$, in qua si s , & u^2 ejusdem gradus ponantur, omnes termini inveniuntur ejusdem gradus. Si æquatio nullum habet factorem realem, indicat nullam esse curvam osculatricem, sed tantum ibi adest punctum conjugatum. Si vero habeat duos factores reales, resolvetur in duas hujus formæ

$s = Mu^2$, quæ indicant duos ramos curvæ, a duabus vulgaribus parabolis osculari; quæ duæ parabolæ in unam coeunt, quoties duo factores æquales sint.

Si etiam $f = 0$, evanescente su^4 respectu su^2 æquatio statuatur in terminis

$ss + csu^2 + bu^5 = 0$. Si s , u^2 ejusdem gradus ponantur esse, u^5 respectu horum evanescent; quare æquatio duos tantum terminos complectetur $ss + csu^2 = 0$,

quæ divisa per s exhibet $s + cu^2 = 0$, quæ est ad parabolam apollonianam.

Si vero ss ponatur ejusdem gradus ac u^5 , seu s ac u^2 , su^2 est infinite magna respectu reliquorum terminorum; ergo æquatio non potest subsistere. Ponamus

s , & u^3 ejusdem gradus, ss respectu reliquorum terminorum evanescent, & æquatio versabitur inter ultimos duos nempe $csu^2 + bu^5 = 0$, seu $cs + bu^3 = 0$, quæ dat parabolam primam cubicam pro curva osculante alterum ramum. Idem dicas velim, si existente $b = 0$ considerandus foret terminus u^6 , atque ita deinceps.

25. Si c , & $d = 0$ non autem e ; si f non sit $= 0$ evanescent su^3 respectu u^4 ; Ergo æquatio $s^2 = -fu^4$ quam paullo ante invenimus. Si $f = 0$, evanescente su^4 respectu u^5 tres termini erunt considerandi nempe $ss + csu^3 + bu^5 = 0$.

In hæc alia non potest valere æquatio præter $ss + bu^5 = 0$, quæ exhibet parabolam osculantem. Si $b = 0$ tres termini erunt considerandi, hoc est $ss + csu^3 + ku^6 = 0$,

qui omnes sunt homogenei, si s sit ejusdem gradus ac u^3 . Æquatio vel nullum habet factorem realem, & indicat punctum conjugatum; vel duos factores reales habet, & ad duas parabolas erit formæ $s = Mu^3$, quæ duæ parabolæ duos osculantur curvæ ramos. Hæc autem in unam coeunt, si factores æquales sint.

Si $k = 0$, æquatio oriretur $ss + csu^3 + mu^7 = 0$, ex qua duæ eliciuntur æquationes nempe $ss + csu^3 = 0$ sive $s + cu^3 = 0$, quæ est parabola osculans unum

num ramum; tum $rsu^3 + mu^7 = 0$, seu $rs + mu^4 = 0$, quæ est parabola osculans ramum alterum; atque ita deinceps.

26. Quare in his casibus generalis æquatio prædicit $rs + Asu^p + Bu^q = 0$, in qua p debet esse $< q$; si enim esset æqualis, aut major secundus terminus præ tertio evanesceret; p autem debet esse > 1 , quia si esset æqualis, r non evanesceret respectu u . In æquatione si $q = 2p$, omnes termini sunt homogenei. Æquatio autem vel nullum habet factorem realem, & tunc indicat punctum conjugatum; vel duos habet factores inæquales, & tunc resolvitur in duas hujus formæ $r = Mu^p$, quæ dant duas parabolas osculantes; duæ autem parabole in unam conveniunt, si factores æquales sint. Si $2p > q$; æquatio sola resultat $rs + Bu^q = 0$; quæ aut resolvitur in duas si q sit par, aut dat parabolam unam osculantem si q sit impar. Demum si $2p < q$; duæ valebunt æquationes hujus formæ $r + Au^p = 0$, $As + Bu^{q-p} = 0$, quæ præbent duas parabolas osculantes duos ramos curvæ in eodem puncto.

27. Si factor duplex $ax + by$ multiplicaretur per quamlibet aliam functionem integram x, y , eadem valeret methodus. Nam facta divisione, si substituantur pro x, y valores dati per r, u ; manifestum est in divisore omnes terminos continentes r evanescere respectu ejus, qui completitur solam u . Quare divisione peracta redibit æquatio habens eandem formam quam superior.

28. Simili modo, si in primo æquationis membro factores æquales fuerint tres, perveniemus ad formulam $r^3 + As^2u^p + Bsu^q + Cu^r = 0$, in qua p non potest esse < 2 , & est $p < q, q < r$. Si tam A , quam $B = 0$, æquatio fiet $r^3 + Cu^r = 0$, quæ dat speciem parabolæ osculantis. Si r foret divisibilis per 3,

extracta radice cubica fiet $r = -u^{\frac{r}{3}} \sqrt[3]{C}$. Quum $\sqrt[3]{C}$ habeat unum valorem realem, & duos imaginarios, habebimus unam tantum parabolam osculantem curvam in puncto dato, in quo spectandum punctum conjugatum propter duos va-

lores imaginarios $\sqrt[3]{C}$. Si $2p = q$, & $3p = r$, ex quibus nascitur tertia $3q = 2r$, existentibus r, u^p ejusdem gradus omnes termini sunt homogenei, neque ullus omitti potest. Formula vel habet unum factorem realem, & duos imaginarios & tunc simul cum puncto conjugato habebitur una parabola osculans formæ

$r = Mu^p$; vel tres sunt factores reales, & tunc tres sunt parabole osculantes omnes formæ ejusdem; duæ autem, aut tres in unam coeunt, si duo, aut tres factores æquales sint. Si prædicta proportio inter exponentes locum non habet, unus, aut duo termini negligi poterunt, inter alios æquatione intercedente. Ut autem cognoscas inter quos terminos æquatio statuenda sit, hanc sequere methodum. Pone successive singula terminorum paria in eodem gradu; observa quid fiat reliquis terminis. Si in eodem gradu reperiantur esse, omitti non possunt, sed in æquationem ingredientur; si inveniuntur minimi, hi omittantur & inter reliquos æquatio consistit; si unus ex illis respectu assumptorum infinitus proveniat, ea æquatio valere non potest, & reiicienda est. Ita determinatis æquationibus parabolas omnes invenies, quæ curvam propositam osculantur in puncto dato. Eadem methodo procedendum, si factores æquales fuerint quatuor, quinque aut plures.

29. Ex his, quæ hæcenus tradita, atque explicata sunt, constat, nullum esse in curva punctum, in quo alicujus parabolæ vertex curvam non osculetur. Igitur diversæ curvaturæ genera jure optimo per diversa parabolæ genera possunt discriminare. In plura autem genera, prout res, ac methodus polcit, parabolæ omnes tribuamus. In primo genere eas constituo, quæ continentur

æquatione hujus formæ $r = Au^m$ existente m numero integro. Punctum, in quo hæc parabola curvam osculatur, est simplex. Si $m = 2$, curvatura comparabilis est cum curvatura circulari, neque quidquam habet singulare. Si $m = 3$, curva in eo puncto prædita est flexu contrario, & ex concava transit in convexam. Si $m = 4$, flexus contrarius apparet nullus; verum in hoc puncto solet spectari flexus contrarius duplex ita, ut curva transeat a convexa in concavam, tum a concava in convexam, quæ puncta flexus, ut ita dicam, invisibilis puncta *anginea*, seu *serpentina* solent nuncupari. Si $m = 5$, iterum flexus contrarius visibilis, sed triplex spectatur, quia curva a concava fit convexa, tum iterum concava, iterumque convexa. Ita successive in casibus superioribus, ita ut numerus flexuum sit $m - 2$; si m sit par, punctum est serpentinum, & flexus invisibilis; si m sit impar, flexus contrarius apparet.

30. Secundi generis parabolæ præditæ sunt forma $r = Au^m$, quæ ostendunt puncta dupla æquivalentia scilicet duobus punctis simplicibus. Si $m = 3$ (Fig. 6) prodibit culpis primæ speciei, quæ a fig. 6 representatur, in qua duo rami ad eandem partem positi sibi mutuo convexitates obvertunt. Si $m = 4$, (Fig. 7) oritur forma figuræ 7, sed hæc nihil aliud est, nisi duplex parabola primi gradus. Generatim autem si m sit impar, rami parabolæ osculantis sunt ut in fig. 6, si m par ut in fig. 7; verum in hoc secundo casu duplex est parabola

formæ $r = Au^{\frac{m}{2}}$. Itaque punctum duplex in curva habetur, vel quum adest punctum conjugatum, vel quum parabola osculantur in eo duæ parabolæ generis primi, vel quum parabola osculans est generis alterius.

31. Parabolæ tertiæ generis exprimuntur ab æquatione $r^3 = Au^m$, punctum autem, ubi curvam hæc parabolæ osculantur est triplum. Si $m = 4$ figura est similis apollonianæ, si $m = 5$ adest flexus contrarius, si $m = 6$, provenit una parabola ordinis primi formæ $r = Au^{\frac{2}{3}}$, & propter duas alias æquationes imaginarias provenit punctum conjugatum duplum. Generatim si m sit impar, figura habet flexum contrarium, si par est similis apollonianæ. Verum si divisibilis sit per 3, habebitur parabola generis primi simul cum puncto conjugato. Quare punctum triplum in curva habetur, vel cum parabola est generis primi simul cum puncto conjugato; vel quum tres adfunt parabolæ generis primi; vel quum una generis primi, alia generis secundi, vel quum una tantum generis tertiæ.

32. Ne tamen putes, methodum adhibitam demonstrare curvam reapse haberi, ejusque ramos ostendere. Hoc solum probat, eam parabolam osculari curvam, si curva adfit. Verum fieri potest, ut curva ejusque ramus imaginarius sit; quo in casu habebitur punctum conjugatum. Ostendamus hoc exemplo facili. Supponamus nos pervenisse ad æquationem

$$r^3 - \frac{2rs^2}{a} + \frac{u^4}{a^2} + \frac{u^6}{a^4} = 0. \text{ Utentes me-}$$

Y y

tho-

thodo hæcenus usurpata, quum u evanescat respectu reliquorum, æquatio consistet in terminis $s^2 - \frac{2fs^2}{a} + \frac{u^4}{aa} = 0$, quæ habet duas radices æquales, nempe $s - \frac{u^2}{a} = 0$. Si quis autem ex hoc inferret, haberi curvam in eo puncto, quod duplum est, ibique osculari a duabus parabolis apollonianis, quæ in unam coeunt, in errorem apertissimum laberetur, quia ibi nihil existit aliud præter punctum conjugatum duplum. Quod tibi constabit si æquationem propositam resolvas modo vulgari; nam invenies $s = \frac{u^2}{a} \pm \frac{u^3}{a^2} \sqrt{-1}$, quæ semper imaginaria est. Igitur ex nostra methodo hoc unice colligere potes, parabolam inventam esse osculantem, si curva adsit. Verum hæc potest esse imaginaria ratione eorum terminorum, qui propter exiguitatem omissi sunt. Quapropter nisi tibi constet curvam realem, ibi esse, oportet, ut per aliam methodum hoc investiges, antequam quidquam pronuncies.

33. Si æquatio proposita esset hujusmodi $s^2 - \frac{2fs^2}{a} + \frac{u^4}{a^2} + \frac{u^5}{a^3} = 0$; tunc

ut antea omisso ultimo termino inveniremus duas parabolæ apollonianas osculantes, quæ in unam coeunt. Parabola apolloniana habet duos ramos, qui abscissam s complectuntur. Num propterea curva habet aut unum aut duplex par ramos complectentium abscissam s ? Qui hoc putaret, laberetur in paralogismum, quia duo rami ad partes u positivæ evadunt imaginarii, realibus existentibus duobus, qui ad partem u negativæ positi sunt. Nam si resolvas æquationem, invenies $s = \frac{u^2}{a} \pm \frac{u^2 \sqrt{-u}}{a\sqrt{a}}$. Hæc si u fit positiva est imagi-

naria, si u fit negativa est realis, & duplex valor s duos ramos ostendit. Rami itaque AB, AC sese habebunt, ut in figura octava. Utrumque autem ramum osculatur eadem parabola apolloniana. Ex hoc exemplo apparet, cur possibilis sit cuspis secundi generis, in qua scilicet convexitas unius rami obverta est alterius cavitati, de quo diu multumque certatum est. Hoc non ideo accidit, quia parabolæ osculantes hanc figuram habere possint, certum enim est, hoc evenire non posse, quia una parabola non potest habere ramos ita constitutos; duz habent semper duos ramos alios, qui conjunguntur cum hisce. Causa cur hæc cuspis haberi possit in curva est, quia ratione terminorum sequentium duo rami ad partes ordinarum positivarum sunt imaginarii, dum reales sunt illi, qui jacent ad partes ordinarum negativarum, aut viceversa.

34. Quandoquidem omnium parabolarum curvaturam in vertice esse proprii generis constat, videamus quænam sint curvaturæ earundem parabolarum in aliis punctis. Ut brevitati consulam æquationem parabolæ æmunicam ita expono $a^{n-1}p = q^n$ supposita n majore quam unitate. Quare sumptis coordinatis $p + x$, $q + y$, fiet $a^{n-1} \cdot p + x = q + y$, sive evoluto binomio in se-

ricm

riem $a^{n-1} p + a^{n-1} x = q^n + n q^{n-1} y + \frac{n \cdot n-1}{2} q^{n-2} y^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} q^{n-3} y^3$
 &c. detractaque prima ex hac secunda æquatione

$$a^{n-1} x = n q^{n-1} y + \frac{n \cdot n-1}{2} q^{n-2} y^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} q^{n-3} y^3 \text{ \&c. five}$$

$$a^{n-1} x - n q^{n-1} y - \frac{n \cdot n-1}{2} q^{n-2} y^2 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} q^{n-3} y^3 \text{ \&c.} = 0.$$

Quando positis x, y minimis, y^3 evanescit respectu y^2 , æquatio subsistit in terminis

$$a^{n-1} x - n q^{n-1} y - \frac{n \cdot n-1}{2} q^{n-2} y^2 = 0. \text{ Quoniam autem ex æquatione pa-}$$

$$\text{rabolæ } q^{n-1} = \frac{a^{n-1} p}{q}, q^{n-2} = \frac{a^{n-1} p}{q^2}, \text{ fiet } x - \frac{n p y}{q} - \frac{n \cdot n-1}{2} \cdot \frac{p y^2}{q^2} = 0,$$

five $q x - n p y - \frac{n \cdot n-1 \cdot p y^2}{2 q} = 0$. Ut æquatio trasferatur ad abscissas
 sumptas in recta normali tangenti, ponendum est $x = \frac{q s - n p u}{\sqrt{q^2 + n p^2}}$,

$$y = \frac{n p s + q u}{\sqrt{q^2 + n p^2}} \text{ existente } s \text{ minima respectu } u. \text{ Fiet autem æquatio}$$

$$s \sqrt{q^2 + n p^2} - \frac{n \cdot n-1 \cdot p}{2 q} \cdot \frac{q^2 u^2}{q^2 + n p^2} = 0, \text{ aut}$$

$$s \cdot \frac{\sqrt{q^2 + n p^2} \cdot q^2 + n p^2}{n \cdot n-1 \cdot p q} = u^2, \text{ quæ est ad parabolam apollonianam. Igi-}$$

tur curvatura in omnibus punctis cujuscumque parabolæ, excepto vertice, est eju-
 dem generis ac curvatura verticis parabolæ apollonianæ, hoc est ac curvatura
 circularis.

35. Verum ut harum curvaturarum ideam efformemus clariorem, ponamus p
 esse minimam ita, ut punctum, in quo quaeritur curvatura parabolæ, sit vertici
 infinite proximum. Patet ex natura parabolæ, p fore minimam, atque adeo nul-

lescere respectu q . Ergo nascetur æquatio $\frac{q \cdot s}{n \cdot n-1 \cdot p} = u^2$. Si p sit ejusdem-

gradus ac q^2 , ut evenit in parabola apolloniana, parameter parabolæ osculantis

finita est. Si p sit minima respectu q^2 , quod accidit quotiescumque est $n > 2$,
 parameter parabolæ evadit infinita. Quapropter si accipias minimum arcum AB ,
 A (Fig. 9) est vertex parabolæ; tum sumas arcus BC, Bc , qui ad arcum AB
 habeant minorem rationem quancumque data; tum ducas BH tangenti normalem;

Y y 2

po-

postremo circa axem BH, parametro infinita, cujus valor dependet ab arcu AB, describas parabolam apollonianam DBd, arcus DBd osculabitur arcum CBc, & ordinatæ horum arcuum normales BH non differunt inter se nisi quantitate relate ad ipsas minima. Si vero p infinita sit respectu q , quod accidit, quoties n sit < 1 , tunc parameter parabolæ apolloniæ osculantis minima evadit. Itaque si accipias arcum minimum AB, (Fig. 10) tunc sumas arcus BC, Bc, qui minimi sint respectu AB, parabola apolloniæ, cujus vertex sit B, & parameter infinite parva dependens ex quantitate arcus AB, osculabitur in B parabolæ arcum CBc. Ex his colligas velim, puncta illa, in quibus arcus curvatura diversa est a curvatura verticis parabolæ apolloniæ, sive a curvatura circulari, esse puncta prorsus singularia. Etenim in quibuslibet aliis punctis, quantumvis volueris, proximis, curvatura est ejusdem generis, ac curvatura verticis parabolæ apolloniæ, seu circuli, tamen radius circuli, aut parabolæ parameter augetur, vel minuitur in infinitum.

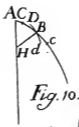
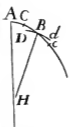
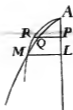
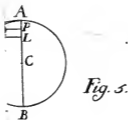
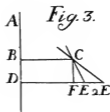
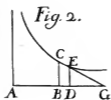
CAPUT DECIMUM.

De figura linearum curvarum in spatio finito.

1. **F**acilius est cognoscere, & determinare positionem, & naturam ramorum in infinitum extensorum, quam figuram curvarum in spatio finito. Etenim ad hanc definiendam hæc una suppetit methodus, ut scilicet pro quacumque abscissæ valore singuli ordinatæ valores inveniantur, & reales secernantur ab imaginariis; quod identidem vires cognitæ analyseos excedit, præsertim si sit altioris gradus æquatio. Nam si determinatus valor abscissæ tribuatur, ordinata vicem tenebit incognitæ in æquatione, cujus gradus pendet a numero dimensionum, quem obtinet eadem ordinata. Juvabit sæpè numero mutare lineam, & initium abscissarum, ut in æquatione curvæ alterutra ex coordinatis, quæ tamquam ordinata habenda erit, minimam obtineat dimensionem, & expeditissima evadat resolutio. Postquam autem hoc perfeceris, quo pacto figura curvæ definiti possit, ostendam gradatim, incipiens a casu maxime simplici, ubi ordinata y unius est dimensionis.

2. Quotiescumque y linearem obtinet dimensionem, & æqualis statuitur functioni rationali x , manifestum est, curvam haberi ita continuam, ut cuicumque valori x una tantum y respondeat vel negativa, vel positiva. Si y æqualis sit functioni non solum rationali, sed etiam integræ x , quam voco P , docuimus Cap. 6 Num. 4, curvam præditam esse duobus ramis infinitis generis parabolici. Si P nullum habeat factorem simplicem realem, quod contingere non potest, nisi maximum exponens x in P sit par, nusquam secabit lineam abscissarum. Si vero adsint factores simplices reales, quot isti sunt, tot in punctis secabitur linea abscissarum; quibus determinatis da operam, ut quomodo inter hæc puncta progrediatur curva, cognoscas, atque ad maximas minimasque ordinatas, & ad diversarum contactuum genera attende. Unico exemplo casum hunc maxime simplicem illustrabo.

3. Proponatur construenda curva æquationis $y = \frac{x \cdot x + a \cdot x - b}{a \cdot a}$. Duos ramos statim inscriptos BF, CG (Fig. 1) determino generis parabolici, quorum sunt



sunt asymptota rami parabolæ æquationis $y = \frac{x^3}{a^2}$. Primus habet ordinatas;

& abscissas positivas, alter negativas. Quoniam functio integra x tres habet factores simplices reales, hoc est x , $x+a$, $x-b$, facta A abscissarum initio, abscindo ad partes x positivæ $AB = b$, ad partes negativæ $AC = a$, curva transibit per tria puncta A, B, C. Queramus tangentes in hisce punctis. Tangens puncti A efficit angulum cum AB, cujus sinus est ad cosinum ut $b : a$; tangens puncti B concurrerit in angulo, cujus sinus ad cosinum ut $b : a+b : a$; in puncto vero C sinus ad cosinum anguli ut $a+b : a$. A puncto A usque ad B ordinatæ sunt negativæ, a B deorsum positivæ utque in infinitum, ab A ad C positivæ, tum utque in infinitum negativæ. Si abscindas

$$AK = \frac{-a+b+\sqrt{aa+ab+bb}}{a^2}, \text{ \& AH} = \frac{a-b+\sqrt{aa+ab+bb}}{a^2}$$

invenies puncta K, H, quibus maximæ ordinatæ partium BDA, AEC respondent. Demum si feces $AL = \frac{a-b}{3}$, & ducas LI, in puncto I curva prædicta erit flexu contrario, vertex autem parabolæ primæ cubicæ osculabitur curvam in puncto I. Reliquorum punctorum curvatura, nihil habet peculiare. Si $b = a$, punctum flexus I transiret in A. Si $b = 0$, pars BDA evanescit, & ramus F (Fig. 2) tanget lineam CA; linea AL, cui respondet flexus contrarius erit $= \frac{a}{3}$, linea AH ubi maxima est ordinata, erit $= \frac{2a}{3}$.

4. Si y æquet constantem divisam per functionem rationalem x , quam voco Q , ut sit $y = \frac{A}{Q}$, vel Q continet factores simplices reales, vel secus. Si nullus habet, nullum erit curvæ asymptotum ordinatis parallelum. Si habet aliquos, tot erunt asymptota ordinatis parallela, quot factores reales. Hæc asymptota determina, tum quid inter hæc asymptota accidat curvæ, diligenter inquire, ut

ejus figuram invenias. Exemplum habe in æquatione $y = \frac{a}{x-a \cdot x+b}$, in

qua, quum divisor habeat duos reales factores simplices, duo curva habebit asymptota parallela ordinatis. Sit A initium abscissarum, secus $AB = a$ (Fig. 3) ad partes x positivæ, ad partes negativæ $AC = b$, & per C, B duc MI, NL ordinatis parallelas, quæ erunt asymptota. Inter A, & B, pariter inter A, & C ordinata provenit negativa; quare nascetur ramus NFM, cui una minima ordinata convenit. Hæc determinabitur si CB dividatur bitariam in D; ordinata enim in hoc puncto est omnium minima. Post punctum B, item post punctum C ordinatæ invenuntur positivæ; prope puncta B, C sunt infinitæ, tum decrescunt, & abscissis in infinitum auctis, ipsæ in infinitum minuuntur. Itaque orientur duo rami LK, IH, utrique est asymptotum KH, primo BL, alteri CI. Genera asymptotorum aliis determinanda relinquo.

5. Si $y = \frac{P}{Q}$, P, Q sunt functiones integræ, & rationales x , observandum est, quot factores reales adsint in quantitibus P, Q. Quot sunt in P, tot habentur

bentur puncta, in quibus curva lineam abscissarum secat; quot sunt in Q , tot definiuntur puncta, per que transeunt asymptota parallela ordinatis. Exemplum

fit in æquatione $y = \frac{x \cdot x + a \cdot x - b}{x - a \cdot x + b}$. Sit A (Fig. 4) initium abscissarum, abscinde

$AC = b = AE$, $AB = AD = a$. Per puncta E, B due lines parallelas ordinatis KG, IL; curva transibit per tria puncta D, A, C, & erit lineis KG, IL asymptotica. Quoniam facta x vel positiva, vel negativa infinita, y infinita est positiva, & negativa, existunt duo rami in infinitum recedentes, quibus erit asymptotum rectilineum. Determinatur autem hoc asymptotum, si abscindatur $AF = 2a - 2b$, & ex puncto F agatur linea FH efficiens angulum BFH semirectum. Intra angulum GNH progreditur curva GH, cui utrumque crus est asymptotum. Intra asymptota IE, KB progreditur pars IACK, que transit per puncta A, C. Demum per D transit pars, que ad partem L accedit ad asymptotum EL, ad partem M ad asymptotum PFM.

6. In æquatione $y = \frac{a^4 + x^4}{a \cdot a^2 + x^2}$ propono aliud exemplum, in quo neque

numerator, neque denominator fractionis habet ullum factorem simplicem realem; quare curva nusquam secat lineam abscissarum, neque habet ullum asymptotum ordinatis parallelum. Adverto $y = a$, si fiat vel $x = 0$, vel $x = \pm a$. Sit initium abscissarum A (Fig. 5); ad utramque partem abscinde $AC = AD = a$. Ordina $AB = CE = DF = a$; curva transibit per puncta B, E, F. Si sumatur x vel positiva, vel negativa minor, quam a , fiet $y < a$; imo secta

$AG = AH = a\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$, ordinata fit omnium minima, & invenitur $= 2a\sqrt{2} - 2a$. In puncto A ordinata AB est maxima. Quapropter curva a B, ubi habet tangentem parallelam abscissis, eisdem obvertit concavum, tum post flexum contrarium in aliquo puncto M abscissis obvolvitur convexum, eisdem semper appropinquans usque ad I, tum recedit, & fertur ad punctum E. Idem die de altero ramo BNKF. Demum post puncta E, F in infinitum recedit per duos ramos generis parabolici.

7. Si in æquatione y ad secundam potestatem ascendat, ut nusquam potestas prima reperitur, tunc extracta radice æquatio hanc formam induet $y = \pm \sqrt{P}$, in qua P est functio rationalis x vel integra, vel fracta. Perspicuum est y ubique habere duos valores æquales alterum positivum, alterum negativum. Quare linea abscissarum bifariam partietur chordas omnes parallelas, atque adeo erit diameter, imo axis si angulus sit rectus. Curva non erit semper continua, quia pluribus in locis contingere potest, ut P evadat negativa, quo in casu y , atque adeo curva fit imaginaria. Cæterum quoad puncta, in quibus curva secat lineam abscissarum, aut habet asymptota parallela ordinatis, eadem ac antea regula tenenda est. Exemplum sufficiat æquatio $y = \pm \sqrt{a \cdot a \cdot a - x}$. Per A

(Fig. 6) initium abscissarum due parallelam ordinatis indefinitam KH, hæc erit asymptotum curvæ. Abscinde $AB = a$, per punctum B curva transibit, in quo puncto tangens erit normalis AB. Si x sit minor $AB = a$, y , & curva

rea-

realis est, & quo x est minor, y est major. Abscinda $AD = \frac{3}{4}a$, cui respondet $y = DE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, in puncto E habebitur flexus contrarius. Quare curva

obvertens abscissis concavam progredietur a B ad E; tam sese flectens, & obvertens convexam accedet ad asymptotum AH. Pars BFK prorsus similis existat ad plagam ordinaratarum negativarum. Si x sit aut $> a$, aut negativa, ordinata y , & curva evadit imaginaria. Quod si æquatio proposita fuisset

$y = \pm \sqrt{\frac{a \cdot x - a}{x}}$, secta $AB = AC = AD = a$, (Fig. 7) ductisque per CD

indefinitis HE, LF, quæ sint parallelæ abscissis, curva ab A ad B erit imaginaria; deinceps incipiens a B in infinitum progredietur per duos ramos BE, BF, quibus sunt asymptota CE, DF. Ad plagam autem x negativæ, prædita est ramis duobus HG, LI sitis inter angulos HCG, LDI, quorum asymptota sunt crura angulorum.

8. Aliud exemplum præbeat æquatio $y = \sqrt{\frac{x \cdot x - a \cdot 2a - x}{a}}$, (Fig. 8)

in qua quum tres sint factores simplices $x, x - a, 2a - x$, in tribus punctis linea abscissarum secabitur. Sit A initium abscissarum, secæ $AB = BC = a$. Si sit $x < a$, unus tantum ex tribus factoribus negativus est; ergo y , adeoque curva imaginaria. A puncto A ad punctum B nihil existit curvæ. Si x sit $> a$, & $< 2a$, factores omnes sunt positivi; existente igitur y reali orietur ovalis BECF. Si $x > 2a$, duo primi factores sunt positivi, tertius negativus; ergo omnia imaginaria. Si x ponatur negativa, in A hinc inde descendunt duo rami infiniti AH, AK generis parabolici, qui primum concavi sunt ad abscissas, deinde convertuntur in convexos. Maximam ovalis ordinatam habebis, si abscindas $BD = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

flexum vero contrarium, si secas $AG = a \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$.

9. Si in æquatione præter yy addit y , resoluta æquatione secundæ gradus, hujus formæ occurret æquatio $y = P \pm \sqrt{Q}$ in qua P, Q sunt functiones rationales x vel integre, vel fractæ. Ut formam curvæ detegas, hanc sequere methodum. Pone $z = P, u = \sqrt{Q}$, ut sit $y = z \pm u$. Curvarum hinc æquationibus respondentium figuram detege. Ex autem sint AE, CF, (Fig. 9) in quibus $AB = CD = x, BE = z, DF = DG = u$. Singulis ordinatis BE, adde, & deme EH, & EK = DF, & puncta H, K erunt in curva quæsita. Hoc si in singulis punctis efficias, curvæ figuram patefacies. Ex hoc operandi modo colligas velim, lineam AE dividere bifariam omnes parallelas KH. Exemplum

sufficiat æquatio maxime simplex $y = \frac{a}{b}x \pm \sqrt{ab - xx}$. Æquatio $\frac{a}{b}x = z$ est ad lineam rectam, quæ ita construitur. Sume $AB = b, BC = a$ (Fig. 10)

junge AC, hic erit locus; & existente AK = x , erit KL = $z = \frac{ax}{b}$. Altera æquatio $uu = ab - xx$, si coordinatarum angulus rectus est, dat circulum. Radio igitur FG = \sqrt{ab} describe circulum, erunt FH = $x, HI = u = \sqrt{ab - xx}$.

Qua-

Quare factis ubique $AK = FH$, duc ordinatam KL , in qua ad utramque partem sume $LM = LN = HI$, puncta M, N erunt in curva quaesita, quae invenietur esse ellipsis conica. In hoc artificio fundata est methodus construendi locos geometricos, quam proposuit Jacobus Hermannus, quamque perfecit Vincentius Riccatus in primo Opus. Tomo opusculo ultimo.

10. Alterum exemplum sufficiat æquatio $y = \frac{aa}{x} + a \pm \sqrt{\frac{aa \cdot a - x}{a}}$. Æquatio $\frac{aa}{x} + a = z$ est ad hyperbolam apollonianam, quæ ita describitur.

Accipe $CG = GM = a$, (Fig. 11) & inter asymptota CG, CH describe hyperbolam. Produc HC in I , donec $CI = a$, & duc IL parallelam CG , e-

runt $IN = x$, $NQ = \frac{aa}{x} + a$. Secundæ æquationis $u = \sqrt{\frac{a^2 \cdot a - x}{x}}$ curva de-

scripta est N. 7, & exhibitæ est a fig. 6. Seca ubique $IN = AD$, (Fig. 6) ductaque NQ , accipe $QP = QO = DE$, puncta P, O erunt in curva quaesita, quæ discedet a puncto M , in quo tangetur a recta GM , & per duos ramos MPH, MOH progrediens accedet ad asymptotum CH . Si abscindas $IN = \frac{3}{5}a$, & ducas ordinatam NOP ; in utroque puncto O, P tangens curvæ erit parallela abscissis. In O habebit minimam ordinatam NO , in P prædita erit flexu contrario.

11. Tertium exemplum præbeat æquatio $y = \frac{xx}{a} \pm \sqrt{a \cdot a + x}$. Factæ $xx = a z$ habetur parabola FAG , (F. 12) cujus vertex A , parameter $= a$, tangens AB ,

in qua sumuntur abscissæ $= x$. Ad æquationem $u = \sqrt{a \cdot a + x}$ construendam abscind: $AC = a$, & vertice C describe eandem parabolam CE , cujus vertex C , axis CAB . Demum singulis punctis t parabolæ FAG ad utramque partem accommoda tn, ts æquales ordinatæ ur ; puncta n, s erunt in curva quaesita. Hæc prædita erit ramis duobus, quorum uterque initium habet in puncto F , in quo tangitur a CF . Alter est $FmInDP$, qui secat rectam FH parallelam abscissis in punctis I, D , tum in infinitum progreditur per DP . Alter venit ad contactum parabolæ in puncto E , secat FD in H , & abit in infinitum.

12. Quod si y æqualis inveniatur duabus radicibus quadratis, eadem est tenenda methodus. Fac enim unam radicem $= x$, alteram $= u$. Duas curvas construe, utriusque abscissæ $= x$, ordinatæ vero in una $= z$, in altera $= u$. Tum singulis ordinatis unius curvæ adde, & deme ordinatas alterius, & puncta determinabis curvæ quaesitæ. Exemplum sit $y = \pm \sqrt{2ax - xx} \pm \sqrt{ax - xx}$.

Describe circum $AGBH$ (Fig. 13) æquationis $x = \sqrt{2ax - xx}$, cujus radius $CA = a$, erunt $AF = x$, $FG = x$. Item describe circum AIC æquationis $u = \sqrt{ax - xx}$, cujus diameter $CA = a$. Tum singulis punctis G primi circuli ad utramque partem applica $GL, GM = FI$ ita, ut ordinatæ FG auquantur, & imminuantur per ordinatas FI , puncta L, M erunt in curva quaesita. Quæ curva duobus foliis continetur, nempe $ALDMA, AOENA$. Ramus omnes tangunt circum in A . Diameter autem ECD tangit curvam in punctis D, E . Si accipias $AP = \frac{2}{3}a$, & ducas ordinatam PSQ ; PQ erit or-

ordinata omnium maxima. In puncto S tangens erit parallela abscissis, & curva prædita erit flexu contrario. Idem dic de curva posita ad plagam ordinatarum negativarum. Quadrans AD dividit bifariam omnes chordas ML, quæ continentur intra ramos ALD, AMD. Semicirculus autem ALC dividit bifariam cordas omnes OL, quæ continentur inter ramos ALD, AOE.

13. Alterum exemplum præbet æquatio $y = \pm \sqrt{xx - aa} \pm \sqrt{a \cdot b + x}$.

Construe æquationem $u = \pm \sqrt{xx - aa}$, quæ est ad hyperbolam æquilateram. Facto C (Fig. 14) centro sume $CB = CD = a$, & verticibus B, D describe hyperbolam æquilateram HBG, NDO. Tum specta æquationem $z = \pm \sqrt{a \cdot b + x}$, quæ est ad parabolam, atque hoc modo construitur. Abscinde $DA = b$, & vertice A, parametro $= a$ describe parabolam HAG, quæ secabit hyperbolam in quatuor punctis K, I, G, H, quæ jungantur lineis IK, GH secantibus axem in punctis F, E. Si singulis hyperbolæ ordinatis addantur, & detrahantur respondententes ordinatæ parabolæ, determinabuntur singula puncta curvæ describendæ. Per vertices hyperbolæ, & parabolæ agantur tangentés MBL, QDP, OAN. Curvæ figura est hujusmodi: supra puncta D, A curva est imaginaria, intra puncta A, D nodum habet transeuntem per punctum F, nempe NFQOFPN, qui tangitur a rectis ON, QP. Intra puncta D, B curva imaginaria. Demum post hæc puncta quatuor ramis in infinitum progreditur, qui initium habent in punctis M, L, ubi tanguntur a recta ML. Duo interni lese invicem, & axem secant in puncto E. Si $b = 0$, & vertices D, A coinciderent, nodus definiret in punctum conjugatum.

14. Si y inveniretur æqualis quantitati rationali additis duabus radicibus, describatur curva, cujus ordinatæ æquales sint quantitati rationali, addita una radice per methodum expositam; tum delineata altera curva, cujus ordinatæ æquales sint residuæ radici, hujus ordinatæ addantur, & demantur ex ordinatis primæ; atque ita determinantur puncta singula curvæ describendæ. Idem dicas velim, si y tribus radicibus esset æqualis. Imo aucto radicum numero eadem methodus gradatim valet.

15. Spectavi solas quantitates rationales, & radices secundas quantitatum rationalium. Verum eadem applicanda sunt quibuscumque radicibus quantitatum rationalium. Nam si impares fuerint, unum tantum valorem realem semper habebunt; si pares, vel duos æquales unum negativum, alterum positivum, vel duos imaginarios. Quare eo pacto tractantur, quo quantitates rationales, & radices secundæ.

16. Major difficultas occurrit, inveniendi figura curvæ, quæ y invenitur æqualis radici, quæ aliam radicem includat. Nam nulla alia methodus suppetit nisi determinare veros valores y , suppositis pluribus valoribus x ; atque hoc modo inspicere quo pacto curva progrediatur. Exemplum propono in formula maximo

simplici $y = \pm \sqrt{aa + xx} \pm \sqrt{a^4 - x^4}$. Fiat

$x = 0$, & provenit $y = \pm a\sqrt{2}$, $y = 0$

$x = \pm a$ $y = \pm a\sqrt{2}$

$x > \pm a$ y semper imaginaria

$x = \frac{1}{2} a$ $y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{5 + \sqrt{15}}$, $y = \pm a \sqrt{5 - \sqrt{15}}$, atque ita

Z z

in

in reliquis valoribus. Quod si facias $x = \pm \frac{a}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$, fiet $y = \pm a\sqrt{1+\sqrt{2}}$,

$y = \pm a$. Ordinata autem $= a\sqrt{1+\sqrt{2}}$ est omnium maxima. His inspectis figura curvæ sese manifestat. Posito A (Fig. 15) abscissarum initio, abscindens AB=AC=a. Ex punctis A, B, C ductis normalibus, secæ AD=AE=BH=BK=CF=CG= $a\sqrt{2}$. Demum sumptis AI=AL= $\frac{a}{\sqrt{2}}$ fiant

IM=IN=LO=LP= $a\sqrt{1+\sqrt{2}}$, in quibus secæ IQ=IR=LS=LT=a. Curva ex A procedet ad Q, veniet ad contactum BH in H, tum per M transibit, quo in puncto maxima erit ordinata, demum veniet ad D, ubi tangetur a recta AD. In singulis autem plagis quatuor partes habebit similes, & æquales.

17. Quod si eveniat, ut æquatio tam altæ dimensionis sit & ejusmodi, quæ nullam resolutionem ex cognitis analyticis regulis admittat, nulla suppetit methodus cognoscendi, qua figura prædicta sit in spatio finito. De proprietatibus curvarum ex æquatione deducendis egregie scripsit in introductione ad analytum infinite parvorum Leonardus Eulerus vir ingeniosissimus, cujus inventa magnam nobis attulisse utilitatem fatemur. Dignissimus pariter est, qui legitur, liber egregius hujus de rebus editus a Cramero, qui tamen longe diversa utitur methoæo.

CAPUT UNDECIMUM.

De resolutione, & constructione æquationum per intersectiones curvarum.

1. **L**ibro superiore capite decimo criterium tutum exhibui, per quod cognoscimus, quibusnam in casibus tot sint in duabus curvis puncta intersectionis, quot in æquatione determinata radices reales, ut tuto, ac sine paralogismo per hanc methodum easdem radices determinemus. Criterium, quod potissimum lineis primi, & secundi gradus aptavi, augendum est, atque ad omnes omnino curvas transferendum. Curva, cujus æquatio contineat solam y linearem, conjuncta cum curva cujuscumque gradus, tot habet intersectiones, quot sunt radices reales. Quantitates P, Q, R &c. p, q, r &c. datæ ponuntur per x, & constantes. Sit æquatio $P+Qy=0$, & $p+qy+ry^2+\dots+ry^m=0$. Quis non videt, quemcumque valorem realem positum pro x in P, Q præbere valorem realem y; ergo quælibet radix realis æquationis, quæ prodit eliminata y, posita in P, Q præbebit valorem realem; igitur non potest esse imaginaria illa ordinata, quæ æqualis est ordinatæ secundæ æquationis; tot igitur sunt intersectiones, quot radices reales. Quare si æquationem construas per curvam, in cujus æquatione y sit dimensionis linearis, quæcumque sit alia curva, radices omnes per intersectiones obtinebis.

2. Hoc idem dicere non licet de æquatione continente quadratum yy, ut $P+Qy+Ry^2=0$. Nam plures sunt valores x, qui introducti in quantitates P, Q, R

2.

Fig. 3.

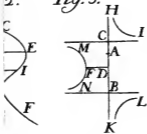


Fig. 5.

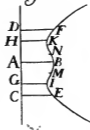


Fig. 6.

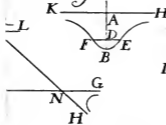


Fig. 7.

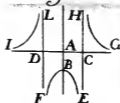


Fig. 9.

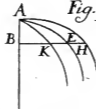
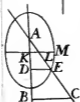


Fig. 10.



P, Q, R , æquationem præbent, quæ utramque radicem habet imaginariam. Quare contingere potest, ut ordinatæ duæ æquales, quæ in duabus curvis respondent eidem abscissæ reali, sint imaginariæ, ac proinde ut nulla ibi habeatur interseccio realis, ubi realis est abscissæ valor. Constructio itaque, quæ per has curvas peragitur dubia est, quum numerus interseccionum minor sit numero radicum realium. Verum si per methodum toties usurpatam, eliminando scilicet potestates y incipiendo ab altioribus devenire possis ad æquationes duas, in quibus y linearem teneat dimensionem, atque hujusmodi æquationes nullum habebant factorem communem, accidere non poterit, ut ordinatæ æquales sint imaginariæ. At si alterutrum accidat, de constructione dubitare debemus.

3. Quamquam methodus ejiendi potestates y incipiendo ab altioribus, & inveniendi æquationes duas continentes solam y explicata est sæpius; tamen non pigebit hic addere exemplum, ne quid obscurum relinquatur.

$$I. P + Qy + Ry^2 = 0$$

$$II. p + qy^3 + ry^4 = 0$$

$$III. Rp - Pr y^2 + Rq - Qr . y^2 = 0.$$

$$IV. \frac{R^3 p - P . Rq - Qr y + P . Rr - Q . Rq - Qr . y^2}{R^2 p - P . Rq - Qr . y + M y^2} = 0$$

$$V. \frac{PM - R^3 p + QM + PR . Rq - Qr . y}{m + Ny} = 0$$

$$VI. PN + \frac{QN - Rm . y}{Rq - Qr . y} = 0$$

ductam in $\frac{Rq - Qr . y}{Rq - Qr . y}$, ut oriatur quarta, quæ simplicior fiet, si facias $PRr - Q . Rq - Qr = M$. A prima multiplicata per M deduco quartam du-

ctam in R , ut oriatur quinta, quæ simplicior evadet facta $PM - R^3 p = m$, $QM + PR . Rq - Qr = N$. Quintam multiplicatam per Ry detraho a prima multiplicata per N , ut demum oriatur sexta. Si in æquatione quinta fuerit $N = 0$, prohibet etiam $m = 0$, ex qua æquatione determinantur omnes valores reales x . Hi si introducantur in æquationem primam, aut quartam, data reperietur y in æquatione secundi gradus, atque adeo accidere poterit, ut sit imaginaria. In hoc casu plures esse possunt radices reales x , quam interseccionum, neque constructio numerum radicum realium tuto determinat. Si non sit $N = 0$, advertet, utrum in æquationibus quinta, & sexta factor communis reperiat. Si adsit, quum ad inveniendum valorem y radix realis, quæ oritur ex hoc factore æquato 0, ponenda sit in æquatione secundi gradus, prodire potest y imaginaria, & dubitandum de constructione. Si nullus sit duarum æquationum factor communis, tot erunt interseccionum reales curvarum, quot radices reales æquationis, quæ eliminata y exoritur, & per interseccionum numerum radicum realium tuto determinatur.

4. Quod dictum est de æquatione includente y^3 , idem dicendum de illis, quæ continent y^3, y^4, y^5 &c., quarum curvæ conjunguntur cum alia cujuscumque gra-

Assumo duas æquationes, in quarum prima y ascendit ad secundam, in altera ad quartam potestatem; Primam multiplicatam per ry^2 detraho a secunda multiplicata per R , & oritur tertia. A tertia multiplicata per R deduco primam

lati quadrati radice, duæ curvæ adhibendæ sunt, quarum gradus unitate superet gradum a radice indicatam. Ita in æquatione gradus 11 auferatur maximum quadratum 9, ut residuus sit numerus 2, qui est minor 3 radice quadrati 9; æquatio itaque constituitur per duas curvas alteram gradus tertii, alteram gradus quarti. In æquatione vero gradus decimitertii, dempto a 13 quadrato maximo 9, remanet 4, qui est major 3 radice 9; duæ curvæ igitur adhibendæ erant ambæ gradus quarti.

8. Ut hæc regula utilitatis laudem aliquam sibi vindicet, analytice doceant oportet, quo pacto æquationes omnes cujuscumque gradus servata regula construantur. Quantum spectat ad æquationem sexti gradus, ad quam reducetur æquatio gradus quinti facta multiplicatione per x , res caret omni difficultate.

Nam sit æquatio $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ex + f = 0$ construenda per duas alteram secundi, alteram tertii gradus. Fiat $x^2 = y$, factaque opportuna

substitutione oriatur $y^3 + ay^2 + by^2 + cyx + dy + ex + f = 0$, quæ est tertii gradus, neque difficilis constructionis, quia x linearem solum obtinet dimensionem. Si adhibuisses substitutionem $x^3 = y$, quæ pertinet ad æquationem

tertii gradus, oriatur $y^2 + ayx^2 + byx + cy + dx^2 + ex + f = 0$, quæ pariter est tertii gradus. Verum si æquatio proposita secundo termino careret, quod semper obtinere possumus, & $a = 0$, ultima æquatio esset secundi gradus, & ad sectionem conicam perlineret. Igitur utroque modo sexti gradus æquatio constituitur per duas curvas secundi, & tertii gradus.

9. Progredior ad æquationem gradus noni, ad quam facta multiplicatione per xx , aut x reducitur æquatio gradus septimi, & octavi. Hæc debet constitui per duas curvas tertii gradus. Sit æquatio

$x^9 + ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3$ &c. $= 0$. Pone $x^3 = y$, ut oriatur $y^3 + ay^2 + by^2 + cy^2 + dyx^2 + eyx + fy$ &c. $= 0$, quæ est quarti gradus. Verum si secundus terminus arceatur, & $a = 0$, fit gradus tertii, & constituitur per duas curvas.

10. Æquationes decimi, & undecimi gradus reducuntur ad duodecimum, multiplicando per x^2 , & x . Æquatio duodecimi ex regula tradita construenda est per duas curvas tertii, & quarti gradus. Æquationem sumemus secundo termino carentem, nempe $x^{12} + ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5$ &c. $= 0$. Pone

namus $x^3 = y$, ut fiat $y^4 + ay^3 + by^3 + cy^2 + dy^2 + dy^2 + ey^2 + fy^2$ &c. $= 0$ quæ est quarti gradus prout optamus. Si substitutio facta fuisset $x^4 = y$, pro-

diidisset $y^3 + ay^2 + by^2 + cy^2 + dyx^3 + eyx^2 + fyx$ &c. $= 0$ quæ pariter est quarti gradus. Quare hoc modo non obtinemus duas curvas unam tertii, aliam quarti gradus, sed ambas quarti.

11. Hæc servata regula tradita constituuntur, sed superiores non item. Æquatio gradus decimi sexti secundo termino carens sit

$x^{16} + ax^{14} + bx^{13} + cx^{12} + dx^{11} + ex^{10} + fx^9$ &c. $= 0$, quæ construenda esset per duas quarti. Fiat $x^4 = y$ ut oriatur

$y^4 + ay^3x^2 + by^2x^3 + cx^4 + dy^3x^3 + ey^2x^4 + fy^3x + \&c. = 0$ quæ est æquatio gradus quinti propter terminos ay^3x^2, dy^2x^3 . Quapropter æquatio decimi quarti gradus hac methodo tractata non construitur per duas curvas gradus quarti. Difficultas autem vel maxime augetur, si methodus applicetur æquationibus superioribus, ut gradus vigesimi, vigesimi primi, trigesimali, & reliquis. Neque methodus alia adhuc tradita est, per quam æquationes gradum duodecimum superantes generatim resolvantur per intersecctionem earum curvarum, quas exigit regula propofita. Quare illi analytæ nisi generalem hanc methocum doceant, frustra perunt, ut regula ab ipsis statuta custodiatur.

12. Verum hoc nihil mihi moleſtum accidit, quia utrum superior analyſarum regula fit omnium optima, vehementer ambigo. Namque ea fundatur in hoc principio; ea constructio maxime simplex judicanda est, quæ peragitur per curvas, quarum æquationes sint maxime simplices, & in infimo gradu potestæ sint. Verum simplicitas constructionis nullo modo videtur dependere a simplicitate æquationis earum curvarum, per quas peragitur. Certe æquatio parabolæ $ax = yy$ simplicior est æquatione circuli $2ax - xx = yy$. Attamen quis umquam in constructione præteret parabolam circulo? Etenim non simplicitas æquationis attendenda est, sed facilitas descriptionis. Quam autem facilius, & tutius delineetur circulus, quam parabola, circulus eligendus est ad constructionem, imo ob hanc causam circulus sæpe præponitur linearæ rectæ, licet hujus æquatio sita sit in primo gradu. Quæ quum ita sint primum illæ curvæ teligendæ sunt ad constructionem, quæ tuto instrumento possint delineari; deinde si his careamus, illæ, cujus puncta singula facilius determinantur in praxi.

13. Exiſtunt problemata ejusmodi conditiones includentia, quæ determinatam curvam ad elegantem sui constructionem videntur postulare. Hoc in præsentia unico exemplo præstat explicare. Solutum dedimus libro secundo per duas sectiones conicas se interfecantes hoc problema. Intra angulum rectum BCD (F. 1.) dato puncto A ducere lineam AMN ita, ut pars MN intercepta inter latera anguli datæ sit æqualis. Si naturam problematis consideres, videbis, illud ad elegantiam constructionis conchoidem Nicomedis quodammodo postulare. Demitte AB normalem in BC, in eaque producta accipe BF, BE æqualem datæ MN. Puncto B iter faciente per lineam BC, describant puncta F, E conchoidem nicomedeam, quæ secabit lineam DC in N; duc AMN, hæc erit linea quaesita, & MN ex natura conchoidis datam æquabit. Licet conchois sit curva quartæ gradus, tamen quum facillime per instrumentum describatur, constructio est. Ela nihil videtur illi concedere, quæ perficitur per conicas sectiones. Nihil hic dicam de radicum numero, sed tantum paucis attingam, quam late patet genus hoc constructionis. Etenim tamen si linea CD non sit perpendicularis CB, tamen ea non recta sit, sed curva; tamen ejus intersecctio cum conchoide nicomedea problematis solutionem præbebit. Imo etiam si linea BC non recta, sed curva fuerit, genus constructionis non deficiet; quia si punctum B moveatur super curvam BC, non describetur a punctis F, E conchois nicomedea, sed ejusmodi curva delineabitur, quæ interfecans lineam DC determinabit puncta, quæ jungenda sunt cum A ad problema solvendum.

14. Verum licet aut non adſint, aut nobis cognitæ non sint curvæ hujusmodi, quæ expeditissimam problematis solutionem perficiant, & necessario confugiendum sit ad æquationem analyticam, quæ ex datis conditionibus invenitur; tamen atbitror non esse attendendum gradum curvarum, sed earum facilem de-

linca-

lineationem per puncta singula. Hanc ob rem puto, feligendam esse curvam eisdem gradus, in quo est æquatio construenda, & conjungendam cum linea recta. Hoc obtinebis si ultimum terminum æquationis, qui datus est, facias $= y$, ut facta substitutione y in uno tantum termino reperiat, in quo & linearem dimensionem tenet, neque per x multiplicetur. Hujus curvæ, dato quocumque valore x , ordinatæ singulæ per solas lineas rectas, & circulos determinantur, adeoque etiam puncta singula per quæ curva transeat. Hac curva delineata agatur recta parallela abscissis, in dato intervallo, atque hæc radices omnes æquationis suppeditabit.

15. Facili exemplo theoriam illustrabo. Inveniendæ sint radices æquationis $x^5 - 2a^2x^3 + a^4x - a^4b = 0$, quæ ex resolutione problematis orta est. Pono

$b = y$, atque ita æquationem dispono $y = \frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^3}{a^2} + x$. Curvam quinti gra-

dis, cui æquatio convenit, inventis punctis singulis delinea. Ea autem hanc formam habet. Ad plagam abscissarum positivarum progrediens habet omnes ordinatas positivas, ad plagam oppositam habet negativas. In A (Fig. 2) habet flexum contrarium, secat lineam abscissarum ad angulum semirectum, ejusque curvatura coheret cum curvatura verticis parabolæ primæ cubicæ. Ad utramque partem progrediens recedit a linea abscissarum usque ad certum terminum, tum

iterum accedens, & sese flectens in R, S, ubi $AI = AL = a\sqrt{\frac{3}{5}}$, ad ejus contactum venit in B, C, ubi $AB = AC = a$; tum per duos ramos BD, CE in infinitum recedit. Jam vero, hac descripta, ponamus A M parallelam ordinatis $= b$, & parallelam abscissis duc MN. Interceptæ inter punctum M & puncta sectionis cum curva, ut MP, MQ, MN dabunt reales æquationis radices.

16. Genus hoc constructionis magnam affert utilitatem in determinandis limitibus, quibus a reëlibus separantur radices imaginariæ. Nam si inveniuntur valores maximarum, & minimarum ordinatarum, limites statim sunt determinati.

In exemplo adducto maximæ ordinatæ habentur quæ AF = AG = $\frac{a}{\sqrt{5}}$, quo valore in æquationem introducto obtinemus maximas ordinatas FH, GK = $\frac{16a}{25\sqrt{5}}$. Itaque si sit $b > \frac{16a}{25\sqrt{5}}$, una tantum radix realis habetur, reliquæ

omnes quatuor imaginariæ. Si $b = \frac{16a}{25\sqrt{5}}$, duæ ex imaginariis reales sunt, & æquales; quare tres radices reales, quarum duæ æquales. Si $b < \frac{16a}{25\sqrt{5}}$, tres

radices omnes inæquales. Demum si $b = 0$, quinque sunt in hoc tantum casu radices, una $= 0$, duæ æquales positivæ, duæ æquales negativæ, omnes $= a$. Idem dicendum, si b foret negativa. Hæc satis esse arbitror, ut ana yleos studiosi intelligant, quid sibi curandum sit in æquationum constructione.

CAPUT DUODECIMUM.

Superiorum graduum problemata aliquot tum determinata, tum indeterminata solvuntur.

1. **P**roblema primum. Ex puncto A (Fig. 1) posito in circumferentia circuli, cujus diameter est AB, ductis infinitis chordis AF, bifecentur arcus AF in D, & ex punctis D demittantur DG normales diametro AB, quæ secant chordas in E, quaeritur curva transiens per omnia puncta E. Quoniam ducto radio CD, qui chordas AF secat bifariam, & ad angulos rectos, triangulum AGE est simile AHC, atque hoc simile est DGC, erit AGE simile DGC; ergo AG:GE::DG:CG. Jam vero vocetur radius CA=a, AG=x, GE=y; erit ex natura circuli DG= $\sqrt{2ax-xx}$; CG autem = a-x. Habemus itaque x:y:: $\sqrt{2ax-xx}$:a-x, sive \sqrt{x} : $\sqrt{2a-x}$:y:a-x; ergo $\frac{a-x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}} = y$, sive $\frac{a^2 x - 2ax^2 + x^3}{2a-x} = y^2$, quæ est æquatio curvæ, cujus constructionem dedimus Cap. 7. num. 22.

2. Problema secundum. Ipsidem positis ex D (Fig. 2) bifecante arcum AF, parallela diametro AB agatur DE secans chordam in E; quaeritur locus omnium sectionum E. Juncta ex centro CD, quæ & bifariam & ad angulos rectos dividet chordam AF, ducantur normales diametro EG, DI. Triangulum AEG est simile ACH, hoc est simile DCI; ergo AEG simile DCI; igitur AE:AG::DC:DI. Quare vocatis CA=CD=a, AG=x, EG=DI=y, AE= $\sqrt{xx+yy}$, erit $\sqrt{x^2+yy}$:x::a:y; ergo $a^2 x^2 = x^2 y^2 + y^4$, sive $x^2 = \frac{y^4}{a^2 - y^2}$. Ducta diametro MN normali AB per M, N agantur RP, SQ parallelæ AB. Curva quarti gradus nostræ æquationi respondens prædita erit quatuor ramis, qui omnes in infinitum hinc inde abeunt, & habent pro asymptotis rectas RP, SQ.

3. Problema tertium. Descriptis super AB (Fig. 3) infinitis triangulis, in quibus angulus A ad angulum B fit in data ratione 1:m, invenire curvam transeuntem per apices C triangulorum. Demittatur in basim normalis CE, & divisa AB bifariam in D, vocetur DE=x, CE=y, AD=BD=a, BE=a-x, AE=a+x, AC= $\sqrt{a^2+x^2+y^2}$, angulus A= μ , B= $m\mu$. Ex trigonometricis y:a-x::Sc.m μ :Cc.m μ , sive positis valoribus tam sinus, quam

$$\text{cosinus } m\mu, y:a-x:: \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu - (Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu)}{\sqrt{-1}} : \\ \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu + Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}{m}$$

atqui

$$\text{atqui } \sqrt{a+x+y^2} : y :: r : s.c.p. = \frac{r y}{\sqrt{a+x+y^2}}, \text{ \&}$$

$$\sqrt{a+x+y^2} : a+x :: r : c.c.p. = \frac{r \cdot a+x}{\sqrt{a+x+y^2}}; \text{ ergo substitutis his}$$

valoribus, expurgataque analogia

$$y : a-x :: \frac{a+x+y\sqrt{-1} - (a+x-y\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}};$$

$$\frac{a+x+y\sqrt{-1} + a+x-y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

4. Analogia hæc, si m sit numerus integer, sufficit æquationem curvæ quæ sitæ; elatis enim formulis ad potestatem integram m , imaginaria abeunt, & sese offert æquatio curvæ. Exempla aliquot proferamus. Sit $m = 1$; fit

$y : a-x :: 1 y : a+x : a+x-y^2$, ex qua æquatio $yy = -aa + 2ax + 3xx$ ad hyperbolam, de qua loquuti sumus lib. 1. cap. 7. num. 23. Si $m = 3$, oritur

$y : a-x :: 3. a+x. y - y^3 : a+x^3 - 3. a+x. y^2$, ex qua

$y^3. a+x^3 = -a^3 + 3ax^2 + 3x^3$, quæ est æquatio tertii gradus. Si $m = 4$;

fit $y : a-x :: 4. a+x. y - 4. a+x. y^2 : a+x^4 - 6. a+x. y^2 + y^4$, ex qua æquatio quarti gradus

$y^4 + y^2. (-2a^2 - 12ax - 10x^2) = 3a^4 + 4a^2x - 6a^2x^2 - 12ax^3 - 5x^4$, atque ita deinceps in aliis casibus.

5. Quod si m non fuerit numerus integer, sed fractus, vocetur $= \frac{m}{n}$ cxi.

stantibus m, n numeris integris inter se primis; tum hac methodo progredi licet. Analogiæ, quæ habetur num. 3., primus, & tertius terminus multiplicetur per $\sqrt{-1}$, tum componendo, ac dividendo proportio ita disponatur

$$a-x+y\sqrt{-1} : a-x-y\sqrt{-1} :: \frac{a+x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^m : \frac{a+x-y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^m.$$

Omnès termini eleventur ad potestatem n , ut oriatur

$$\frac{a-x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^n : \frac{a-x-y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^n :: \frac{a+x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^m : \frac{a+x-y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^m;$$

ergo dividendo, & componendo fiet

$$\frac{a-x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^n - \left(\frac{a-x-y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^n : \frac{a-x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^n + \frac{a-x-y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^n \right) ::$$

$\frac{a+x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^m - \left(\frac{a+x-y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^m : \frac{a+x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^m + \frac{a+x-y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}^m \right),$
cujus analogiæ si primus, & tertius terminus dividatur per $\sqrt{-1}$, obtinebis formulam, ex qua in singulis valoribus m, n abibunt imaginaria. Ad exem-
pium

plum ponat $n=2$; $m=3$, & invenies

2. $\frac{a-x}{a-x} \cdot \frac{y}{a-x} - \frac{yy}{a-x} :: 3 \cdot \frac{a+x}{a+x} \cdot \frac{y-y}{a+x} : \frac{a+x}{a+x} - 3 \cdot \frac{a+x}{a+x} \cdot y^2$, ex qua
provenit æquatio quarti gradus

$$y^4 + y^2 \cdot 2a^2 - 4ax - 10xx = -a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 - 4ax^3 - 5x^4.$$

6. Quod si angulus A non ad internum CBA, sed ad externum CBF
debeat esse ut 1 : m, tunc valebit hæc proportio $y : a-x :: Sc. CBE : Cc. CBE$;
atque $Sc. CBE = Sc. CBF = Sc. m\mu$, & $Cc. CBE = -Cc. CBF = -Cc. m\mu$,
ergo erit $y : a-x :: Sc. m\mu : -Cc. m\mu$, five

$$y : a-x :: \frac{a+x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} - \frac{(a+x-y\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}} :$$

$-(a+x+y\sqrt{-1})^m - (a+x-y\sqrt{-1})^m$, ex qua in singulis ca-
sibus m integri æquationem eruemus. Si $m=2$, erit $y : a-x :: 2y \cdot a+x :$
 $-(a+x+y^2)$, ex qua æquatio $yy = 3aa + 2ax - xx$, quæ est ad cir-
culum, cujus centrum B, radius BA, quod etiam ab elementis eruere potuis-
ses. Si $m=3$, exurgit proportio

$y : a-x :: 3 \cdot \frac{a+x}{a+x} \cdot \frac{y-y}{a+x} : -\frac{(a+x)^3}{a+x} + 3 \cdot \frac{a+x}{a+x} \cdot y^2$, ex qua æquatio tertii gra-
dus $y^2 \cdot 2a+x = 2a^3 + 3a^2x - x^3$; ita in reliquis casibus.

7. Si m fit numerus fractus, fiat $= \frac{m}{n}$. In superiore analogia anteceden-

tes multiplicentur per $\sqrt{-1}$, mutantur signa consequentium, demum com-
ponendo & dividendo invenitur

$$\frac{x-a+y\sqrt{-1}}{x-a-y\sqrt{-1}} : \frac{x-a-y\sqrt{-1}}{x-a+y\sqrt{-1}} :: \frac{(a+x+y\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}}{(a+x-y\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}}.$$

Elevantur omnes termini ad potestatem n, ut fiat

$$\frac{x-a+y\sqrt{-1}}{x-a-y\sqrt{-1}} : \frac{x-a-y\sqrt{-1}}{x-a+y\sqrt{-1}} :: \frac{(a+x+y\sqrt{-1})^m}{(a+x-y\sqrt{-1})^m}.$$

Demum dividendo & componendo, tum antecedentibus divis per $\sqrt{-1}$ exurgit
analogia

$$\frac{x-a+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} - \frac{(x-a-y\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}} : \frac{x-a+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} + \frac{(x-a-y\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}} ::$$

$$\frac{a+x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} - \frac{(a+x-y\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}} : \frac{a+x+y\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} + \frac{(a+x-y\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}}$$

ex qua in singulis casibus æquationem determinabis. Si $n=2$, $m=3$, fiet pro-
portio $2y \cdot \frac{x-a}{x-a-y^2} - y^2 : 3y \cdot \frac{a+x}{a+x-y^3} - 3y^2 \cdot \frac{a+x}{a+x}$, ex qua
ori-

eritur æquatio quarti gradus

$$y^4 + y^3 \cdot 2x^2 - 4ax - 10a^2 = -x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x - 5a^4.$$

8. Angulus externus CBF æquat duos internos CAB, ACB; ergo $m\mu = \mu + ACB$, five $ACB = m - 1, \mu$. Igitur solutio problematis propofiti exhibet solutionem alterius. Data AB quaeritur curva tranfieri per apices omnium triangulorum ACB, in quibus angulus CAB fit ad ACB in data ratione $1:m-1$. Nam hæc eadem est eum curva tranfeunte per vertices triangulorum, in quibus angulus internus CAB est ad externum CBF in data ratione $1:m$.

9. Problema quartum. Dato circuli quadrante AEB (Fig. 4) ductoque ubicumque radio CE, qui determinat arcum BE, eujus cofinus CD, finus DE, abfcindatur arcus BF, qui ad BE fit ut $1:m$, & in radio CF fecetur CG, quæ data fit per CD, aut DE; quaeritur curva tranfieri per omnia puncta G. Radio CB agantur normales GH, FK. Vocetur $CH = x$, $GH = y$, $CG = z = \sqrt{xx + yy}$; præterea radius CB, feu finus totus = a , arcus FB = μ , EB = $m\mu$. Ex formulis jam probatum habemus

$$Cc.m\mu = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1.Sc.\mu} + Cc.\mu - \sqrt{-1.Sc.\mu}}{2a^{m-1}}; \text{ atqui}$$

$$z:a::x:Cc.\mu = \frac{ax}{z}, z:a::y:Sc.\mu = \frac{ay}{z}; \text{ ergo}$$

$$Cc.m\mu = \frac{a}{z} \frac{x+y\sqrt{-1} + x-y\sqrt{-1}}{2a^{m-1}}; \text{ ergo vocato } Cc.m\mu = p, \text{ qui}$$

in hypothesi datur per z , fiet $\frac{pz^m}{a} = \frac{x+y\sqrt{-1} + x-y\sqrt{-1}}{2}$. Quare si m supponatur esse numerus integer, elatis binomiis ad potestatem integram m , imaginaria abibunt, & substituto pro p ejus valore dato per z , & pro z posita $\sqrt{xx + yy}$, æquatio quaerita obtinebitur.

10. Si $m = 2$, fiet $\frac{pz^2}{a} = xx - yy$. In hac hypothesi ponamus $p = \frac{z^3}{a}$, & fiet $\frac{z^4}{a} = xx - yy$, seu $z^3 = a\sqrt{xx - yy}$; demum $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$.

Æquationi huic quarti gradus curva respondens vocari solet lemniscata, quæ constat ramis quatuor similibus & æqualibus $CG_1B, C_2GB, C_3G_2B, C_4G_1B$, (Fig. 5) clausis intra circulum radij = a , & sese intersecantibus ad angulum semirectum in centro C.

11. Si adhibuisses formulam finus, vocato $DE = q$, (Fig. 4) invenisses $\frac{qz^m}{a} = \frac{x+y\sqrt{-1} - (x-y\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$. Si poneres $m = 2$, & $q = \frac{xz}{a}$, fiet

ret $\frac{z^4}{a^2} = a^2xy$, seu $\frac{x^2+y^2}{a^2} = a^2xy$, quæ pariter est æquatio quarti gradus. Quod si poneres $p = \frac{xz}{a}$, adeoque $q = \frac{z}{a} \sqrt{a^4 - z^4}$; fieret

$$\frac{x^2 \sqrt{a^4 - z^4}}{a^2} = a^2xy, \text{ five } \frac{x^2+y^2}{a^2} \sqrt{a^4 - (x^2+y^2)^2} = a^2xy, \text{ five}$$

$$a^4 \cdot x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - (x^2+y^2)^2 = 4a^4x^2y^2; \text{ vel } a^4 \cdot x^2 + y^2 = x^2 + y^2;$$

deum $a^2 \cdot x^2 - y^2 = x^2 + y^2$, quæ eadem est ac antea.

12. Quod si m non fuerit numerus integer sed fractus, vocetur $= \frac{m}{n}$, ut

formula, ad quam pervenimus, hæc sit $\frac{p z^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$.

Vocetur præterea $DE = Sc. \frac{m}{n} p = q$. Ex nostris formulis habemus

$$Sc. \frac{m}{n} p = \frac{Cc. p + \sqrt{-1} \cdot Sc. p}{2a^{\frac{m}{n}} - 1 \cdot \sqrt{-1}} - (Cc. p - \sqrt{-1} \cdot Sc. p), \text{ five ut an-}$$

tea substitutis valoribus $\frac{q x^{\frac{m}{n}} \sqrt{-1}}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}} - (x-y\sqrt{-1})$. Hæc primum addatur, deinde detrahatur a superiore, ut fit

$$\frac{z^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot p + q \sqrt{-1} = x + y \sqrt{-1}$$

$$\frac{z^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot p - q \sqrt{-1} = x - y \sqrt{-1}$$

$$\frac{z^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot p + q \sqrt{-1} = x + y \sqrt{-1}$$

$$\frac{z^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot p - q \sqrt{-1} = x - y \sqrt{-1}$$

quæ eleventur ad potestatem integram n , ut habeamus.

Istæ æquationes de more addantur, & subducantur, ut orientur

$$\frac{z^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$\sum_{a}^m \frac{p+q\sqrt{-1} + p-q\sqrt{-1}}{a} = x+y\sqrt{-1} + x-y\sqrt{-1}$$

$$\sum_{a}^m \frac{p+q\sqrt{-1} - (p-q\sqrt{-1})}{a} = x+y\sqrt{-1} - (x-y\sqrt{-1}), \text{ in quibus}$$

quum p, q dentur per z , elevatis binomiis ad potestates integras, æquatio curvæ, eliminatis imaginariis, reperietur.

13. Si ponamus $m = 1, n = 2$, ex prima æquatione habebimus

$$\sum_{a}^2 \frac{pp-qq}{a} = x. \text{ Ponamus in hac hypothesi } p = z, \& qq = aa - zz; \text{ ergo}$$

$$\sum_{a}^2 \frac{2xz - aa}{a} = x, \text{ substitutoque pro } x \text{ ejus valore } \sqrt{xx+yy}, \text{ fiet}$$

$\sqrt{xx+yy} \cdot 2x^2 + 2y^2 - a^2 = a^2x$, quæ est æquatio sexti gradus. Si adhiberes secundam æquationem, proveniret $\sum_{aa}^2 \frac{2x\sqrt{aa-zz}}{aa} = y$, sive

$2x^2 + 2y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = a^2y$, quam eandem esse cum superiore, facile demonstrabis.

14. Problema quintum. Sit circulus AFB, (Fig. 6) quem tangat in A indefinita AK, datumque sit punctum E, ex quo ducatur quælibet EK secans circulum in F, tangentem in K. Per F ducatur FI parallela tangenti, ex K agatur KI tangenti normalis, quæ duæ lineæ concurrant in I. Quæritur curva transiens per omnia puncta I: Age diametrum AB, in quam cadant normales ED, FG. Vocetur radius circuli = a , DB = b , ED = c , CG = x ,

GI = y = AK; ergo GF = $\sqrt{aa-xx}$. Quoniam, est

AK:DE::AH:DH erit componendo

DE+AK:DE::AD:DH, seu analyticè

$$c+y:c::2a+b:DH = \frac{2ac+bc}{c+y}; \text{ ergo}$$

$$CH = \frac{2ac+bc}{c+y} - a - b = \frac{ac-ay-by}{c+y}; \text{ atqui HG:GF::HA:AK,}$$

$$\text{hoc est } x + \frac{ay+by-ac}{c+y} : \sqrt{aa-xx} :: a + \frac{ay+by-ac}{c+y} : y, \text{ vel}$$

$$\frac{cx+xy+ay+by-ac}{2a+b\sqrt{aa-xx}} = \frac{2ay+by}{\sqrt{aa-xx}} : y; \text{ ergo}$$

$$\frac{2a+b\sqrt{aa-xx}}{2a+b\sqrt{aa-xx}-cx+ac} = \frac{cx+xy+ay+by-ac}{2ay+by}; \text{ demum}$$

$$\frac{2a+b\sqrt{aa-xx}-cx+ac}{a+b+x} = y, \text{ quæ est æquatio quarti gradus.}$$

15. Curva, quæ nascitur, pro diversa puncti E positione diversam admodum figuram habet. Quæ omnibus hisce curvis conveniunt, breviter attingam. Ducta tangente BM, curvæ omnes continentur inter tangentes AK, BM; omnes transeunt per punctum A, in quo tanguntur ab AK; omnes in aliquo puncto ad contactum veniunt rectæ BM. Si recta per punctum E ducta paral-

rallela tangenti AK secet, aut tangat circulum, hæc erit curvæ asymptotum; secus curva carebit asymptoto, & intra spatium finitum claudetur.

16. Aliquot casus ex simplicioribus evolvamus. Si punctum E (Fig. 7) cadat extra circulum in diametro AB producta, ex eo ducatur circuli tangens EP, quæ producta puncti A tangentem secabit in Q. Huic tangenti age normalem QR, & parallelam PR. Curva tota, est extra circulum. Ex A progreditur ad R, ubi tangitur a QR, tum venit in B; similis ramus positus est ad alteram partem diametri. Si punctum sit in diametro ad alteram partem producta ut in 2 E, facta ut supra præparatione, curva A 2 RB invenietur tota intra circulum. Recedente in infinitum puncto E, aut 2 E, curva confundetur cum circulo. Ad habendas autem harum curvarum æquationes, satis est ponere in æquatione generali $c=0$, & in secunda spectare, b ut negativam, & majorem quam $2a$.

17. Si punctum E caderet in B, fieret tam c , quam $b=0$; ergo æquatio curvæ $\frac{2a\sqrt{aa-xx}}{a+x}=y$, quæ elata ad quadratum, quum sit divisibilis per $a+x$, habebimus $x=-a$, quæ æquatio docet tangentem BM componere curvam quarti gradus, quæ proinde constabit & linea primi & linea tertii gradus. Hujus autem æquatio facta divisione prodit $\frac{2a\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}}=y$. Figura autem

est hujusmodi. Ex A (Fig. 8) progreditur extra circulum, & concava obvertit inæ BM, tum post flexum contrarium convexa ad eandem accedit tamquam ad asymptotum. Æqualis ramus existit ad alteram partem diametri AB. Hæc curva vocatur versoria. Si punctum E cadat in centro C, fiet $c=0$,

$b=-a$; ergo æquatio curvæ in hac mutatur $\frac{a\sqrt{aa-xx}}{x}=y$. Curvam tangentem rectæ AK, BM (Fig. 9) in punctis A, B, & constabit duobus ramis æqualibus positus ex utraque parte lineæ CN parallelæ AK, primum concava versus CN, deinde convexa habebit eandem CN pro asymptoto. Rami duo similes & æquales ad alteram partem diametri AB jacebunt. Reliquos casus lectionibus evolvendos relinquo.

18. Problema sextum. Ex mediis proportionalibus inter datas a, b , quarum numerus est $=m$, invenire eam, quæ tenet sedem n^{efima} ; ut si $m=10$, $n=7$, invenire septimam ex decem mediis proportionalibus inter a, b . Vocata prima ex mediis proportionalibus $=x$, inspice sequentem seriem

$a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \dots, \frac{x^{m-1}}{a^{m-2}}, \dots, \frac{x^m}{a^{m-1}}, \frac{x^{m+1}}{a^m}=b$. Vides in hac exponentes

x esse numeros indicantes sedes mediorum proportionalium; ergo quæ posita est in sede n^{efima} est $=\frac{x^n}{a^{n-1}}$. Vocetur hæc $=z$, ut habeatur $x^n=a^{n-1}z$;

atque $x^{m+1}=a^m b$, ergo $x^n=a^{\frac{m}{n+1}} b^{\frac{n}{n+1}}$, sive $a^{\frac{m-n+1}{n+1}} \frac{z^n}{b^{\frac{n}{n+1}}}=z$, quæ formula exhibet mediam proportionalem quæsitam.

19. Ut

19. Ut ad constructionem veniamus, ita disponamus formulam

$a^{m-n+1} b^n = z^{m+1}$. Si m effet numerus impar, & $m+1$ par, posita

$z^2 = ay$, fiet $a^{m-n+1} b^n = a^{\frac{m+1}{2}} y^{\frac{m+1}{2}}$, aut $a^{\frac{m-n+1}{2}} b^n = y^{\frac{m+1}{2}}$, ex qua si inveniatur y , inveniatur etiam x , quæ est media proportionalis inter a, y . Si $\frac{m+1}{2}$ fit item par, eadem methodo utere, ut formulam traducas ad

tertiam proportionalem post a, y ; atque ita deinceps, donec devenius ad exponentem imparem. Quamobrem satis est formulam construere in hypothese $m+1$ imparis. Multiplica illam per z , ut fiat $a^{\frac{m-n+1}{2}} b^n z = z^{\frac{m+1}{2}}$; expo-

nens $m+1$ erit par. Fac $z^2 = ay$, ut habes $a^{\frac{m-n+1}{2}} b^n z = y^{\frac{m+1}{2}}$, existente $\frac{m+1}{2}$ numero integro. Ad axem AD (Fig. 10) describe parabolam ABM

æquationis $a^{\frac{m-n+1}{2}} b^n z = y^{\frac{m+1}{2}}$, erunt AD = x ; tum describe parabolam apollonianam ABN æquationis $z^2 = ay$. Parabolæ sese secabant in puncto B; ex hoc demitte ordinatam BD, erit AD = x media proportionalis quaesita. BD vero = y erit tertia proportionalis post a , & hanc z . Q. E. Inv.

20. Problema septimum. Datum arcum circulearem in plures æquales partes dividere. Si numerus partium, in quas arcus dividendus est, non esset primus, expediret dividere numerum in suos factores, qui sint m, n &c.; tum arcum dividere in partes m , unum ex his in partes n , & sic deinceps; ita problema solvetur per æquationes gradus inferioris. Quare partium numerus = n ut primus spectetur. Advoco formulam cosinus arcus multipli, quæ vocato radio = r , & arcu dato = μ , est hujusmodi

$$C c . \frac{\mu}{n} = \frac{C c . \frac{\mu}{n} + \sqrt{-1} . S c . \frac{\mu}{n} + C c . \frac{\mu}{n} - \sqrt{-1} . S c . \frac{\mu}{n}}{2 r^{n-1}} . \text{ Vocetur}$$

$C c . \mu = a$, $C c . \frac{\mu}{n} = x$, $S c . \frac{\mu}{n} = y$, ut fit $yy = rr - xx$, & hæc nascetur

$$\text{æquatio } a = \frac{x + y \sqrt{-1} + x - y \sqrt{-1}}{2 r^{n-1}} . \text{ Si duo binomia ad potestatem } n$$

elevantur, omnia imaginaria abibunt, & y ad potestatem parem elevatam invenies. Quare pro y^2 substituto ejus valore, proveniet æquatio gradus n , quæ per curvam ejusdem gradus sectam a linea recta non difficulter construetur.

21. Contrahamus formulam ad exemplum, & fit $n = 5$. Elevatis binomiis ad quintam potestatem, substitutoque valore y^2 , proveniet æquatio gradus quinti $r^4 a = 16 x^5 - 20 r^2 x^3 + 5 r^4 x$. In hac spectemus tamquam ordinatam a , & construa-

struamus curvam æquationi respondentem. Initium abscissarum sit C. Summa $CA = CB = r$, abscinde CE, CD, CG, CF, (Fig. 11) quæ fiat æquales

$\pm \frac{r}{2} \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}$; curva transibit per quinque puncta C, E, D, G, F. Deinde descripto quadrato KH per C agatur $2C_3C$ perpendicularis AB. Seca-

$2CL = 3CM = \frac{\sqrt{5-1}}{2}$, $2CN = 3CI = \frac{\sqrt{5+1}}{2}$; curva tanget rectas

KI, HN in punctis L, N, M, I, & transibit per puncta K, H. Descripta autem curva secat $AO = a$, & duc OV parallelam AB, quæ curvam secabit in quinque punctis. Abscissæ autem incipientes a puncto C dabunt cosinus arcuum $\frac{\mu}{5}$, $\frac{4\omega + \mu}{5}$, $\frac{8\omega + \mu}{5}$, $\frac{12\omega + \mu}{5}$, $\frac{16\omega + \mu}{5}$, denotante ω quadrante

tem circumferentiæ. Scio, eidem cosinui duplicem respondere arcum, ducto sinu vel positivo vel negativo, sed in singulis casibus non est difficile determinare, quinam ex duobus arcibus accipiendus sit. Curva descripta ultra puncta H, K per duos ramos infinitos progredietur. Qui rami inserviunt inveniendis cosinui logarithmi subquintupli. Namque problema hoc eandem prorsus æquationem suppeditat, quod breviter sufficiat indicavisse. Idem prorsus constructionis genus valet, quum in plures partes arcus dividendus est.

22. Problema octavum. In recta positione data datis duobus punctis C, B; (Fig. 12) & extra ipsam puncto A, ducere ex hoc lineam AMN, ut secata in ea MN æquali datæ, & ducta in CB normali NS, rectangulum CSB æquet rectangulum ex data in NS. Quoniam MN debet æquare datam, manifestum est, punctum N esse in conchoide nicomedea, cujus polus A, & intercepta inter curvam & BC ducta ex polo A æquat datam. Describatur itaque conchoïdnicomedea EN, punctum N erit in hac curva. Ut alia curva determinetur, quæ per intersectionem conchoïdis determinet punctum N, dividatur CB b. s. ar. in D, eidemque ducatur normalis DF, in quam cadat normalis NT. Vocetur $CD = BD = a$, $DT = NS = x$, $TN = DS = y$; ergo $CS = a + y$, $BS = a - y$; igitur rectangulum CSB = $aa - yy$; sed ex conditione hoc debet æquare $NS = x$ in datam = b ; ergo $aa - yy = bx$, seu

$b \cdot \frac{a^2}{b} - x = yy$, quæ est ad parabolam apollonianam hoc pacto describendam.

Seca DF, quæ sit tertia proportionalis post b , a . Vertice F, parametro = b describe parabolam, quæ transibit per puncta B, C. Punctum intersectionis N parabolæ & conchoïdis illud ipsum erit, quod queritur. Tot igitur erunt solutiones, quot in punctis parabola conchoïdem secat.

23. problema nonum. Lineis rectis AC, AD (Fig. 13) sese ad angulos rectos deculantibus determinare in recta positione data PQ punctum M, ut, juncta AM, intercepta CMD eidem perpendicularis sit æqualis datæ. Quoniam CD & debet æquare datam, & debet esse normalis lineæ AM transfrenti per punctum A, peripicuum est, punctum M reperiri in curva sexti gradus, quæ a nobis descripta est Cap. 6. Prob. 6. num. 19. Hæc itaque curva si describatur, secabit rectam positione datam PQ in puncto M. Hoc erit punctum requiritum, ut proprietates curvæ patefacit. Curva descripta & linea PQ possunt secare sese vel in sex punctis, vel in quatuor, vel in duobus, vel nunquam;

qua-

quare problema modo sex, modo quatuor, modo duas, modo nullam solutionem recipiet. Eadem constructio locum habebit, licet PQ non fuerit recta, sed curva quæcumque, ut si fuerit circulus descriptus centro dato R, & dato radio RM. Quo in casu ita problema proponi potest. Rectis AC, AD secantibus sese normaliter, datoque puncto R, determinare punctum M ita, ut RM æquet datam, & intercepta CD normalis AM alii datæ æqualis sit: quod problema ad summum octo recipere potest solutiones.

24. Problema decimum. In anguli recti latere AT (Fig. 14) dato puncto A, & ubicumque puncto R, ita agere AO, ut producta in N, donec $ON = OT$, recta RN fiat æqualis datæ. Quandoquidem ON debet æquare TO, punctum N erit in curva, de qua loquuti sumus Cap. 6. Prob. 9. num. 22. Quare ea curva describatur. Tum centro R intervallo dato circulus describatur, qui secabit curvam in puncto N. Junge AN, hæc erit linea requisita satisfaciens problemati. Si circulus curvam læcet in folio A2NT, tum linea A2O non est producenda, sed ejus pars 2N2O æquabit T2O. Si punctum N non in circumferentia circuli, sed in alia quacumque linea recta vel curva deberet reperiri, hujus intersectio cum curva ATN præberet problematis solutionem. Hæc autem tria problemata eum ob finem proposui, ut cognoscat Analysta, multa esse problemata, quæ ad elegantem sui solutionem certas quasdam curvas postulare videntur. Cæterum exercitatio & industria opus est, ut problemata ad elegantem, facilemque solutionem perducantur.

25. Dum hæc thypis parabamus, præiit tomus tertius Operum Comitis Jacobi Riceati, qui plura opuscula continet. Legi in appendice opusculi duodecimi artificium construendi problemata tertium, & quartum gradum superantia, quod propter elegantiam, qua sæpenumero solutionem adornat, non videtur esse omittendum. Artificium in eo positum est, ut pro illis expressionibus, quæ si retinerentur in calculo, efferrent ad potestates altiores secundæ, a iis incognitæ substituantur, atque ita multiplicatis incognitis deveniatur ad æquationem secundi gradus. Hac obtenta per vestigia analysis regredientes, ope sectionum conicarum, quæ novimus delineare, describimus altiores curvas, quæ solutionem problematis exhibent. Ut elegantior evadat solutio, attendendum est, ne numerus substitutionum, & numerus incognitarum in ultima æquatione magis, quam par est, augeatur. Hoc enim numero crescente semper complicatior fit solutio. Quæ hic generatim tradita sunt vix intelligi possunt, nisi dilucide per exempla declarantur. Quare sit.

26. Problema undecimum. Data prima ex continuis proportionalibus determinare secundam ita, ut summa secundæ & ultimæ æquet datam. Prima vocetur = a, secunda = x, summa secundæ, & ultimæ = b; ergo ultima = b - x

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX

a	x	$\frac{x^2}{a}$
		$\frac{xy}{a}$
	y	$\frac{xy}{a}$	$\frac{y^2}{a}$
			$\frac{y^3}{x}$
				f	$\frac{fx}{a}$	$\frac{fy}{a}$.	.	.
					$\frac{fy}{x}$	$\frac{ff}{x}$.	.	.
					$\frac{ff}{y}$
					z	$\frac{xz}{a}$	$\frac{zy}{a}$	$\frac{zf}{a}$	$\frac{zz}{a}$
						$\frac{zy}{x}$	$\frac{fz}{x}$	$\frac{zz}{x}$.
						$\frac{zf}{y}$	$\frac{zz}{y}$.	.
						$\frac{zz}{s}$.	.	.

Quoniam a est prima continue proportionalium, x secunda, erit tertia $\frac{x^2}{a}$. Si hanc retinerem in calculo, necessario expressio quartæ proportionalis includeret tertiam potestatem. Quare pono $\frac{x^2}{a} = y$, & spectans y tamquam tertiam proportionalem invenio quartam, quæ per a, x, y duplici modo exprimi potest, tum per $\frac{xy}{a}$, tum per $\frac{y^2}{x}$; deinde quintam $= \frac{y^2}{a}$, in quibus formulis nihil superat potestatem secundam. Sed si his retentis calculum produceremus, tertia & superiores potestates obviam venirent. Quare quartam proportionalem facio $= f$, atque determino quintam & sextam, prout in tabula superiore notatur. Si ponam quintam $= z$, determino sequentes usque ad nonam. Atque ita deinceps calculum promovere poteris, quousque libuerit.

27. Nunc quo pacto hujusmodi substitutiones eleganter ad constructionem perducant declarandum. Si ponas quintam proportionalem esse ultimam, & æqualem $b - x$, assume ejus expressionem maxime simplicem $\frac{yy}{a}$, quæ non eget nisi una substitutione; ergo erit $yy = a \cdot b - x$, quæ est ad parabolam. Præterea substitutio dat $x = ay$, quæ pariter est ad parabolam ejusdem parametri. Itaque oritur hæc constructio. Posita parametro $AB = a$, (Fig. 15.) describatur parabola AD , cujus tangens sit AB ; deinde secta $AC = b$, vertice C , axe CA de.

describere parabolam CD ejusdem parametri, quæ secabit priorem in D. Ordina DE, abscissa AE = x erit secunda in proportione continua. Ad methodum illustrandam præmissi solutionem hujus problematis, quod cæteroquin non superat gradum quartum. Si velis sextam proportionalem esse æqualem b - x, assume ejus expressionem $\frac{xy}{x}$, ut sit $xy = bx - x^2$, quæ est

ad circulum. Primum delineam parabolam AD (Fig. 16) æquationis $x^2 = ay$, quam dat substitutio. In tangenti AB sitæ erunt AE = x; huic normales sint ordinatæ ED = y. Fac ubique ut AB = a; AE = x, ita DE = y; FE = s, & per omnia puncta F transeat nova curva AF; demum sumpta AC = b, super diametrum AC describere circulum AFC, qui secabit curvam AF in puncto F, ex quo demissa FE determinabit AE secundam proportionalem quaesitam. Adnoto quomodo curva AF inserviens solutioni problematis delineetur ope parabolæ apolloniensæ primum descriptæ. Hoc problema ad methodum indicandam unice sibi proposuit Comes Riccatus, atque hanc ipsam tradit solutionem.

28. Idem problema alio modo solves, si alia usurpata expressione facias $\frac{xy}{a} = b - x$, quæ exhibet hyperbolam inter asymptota. Primum ut supra describamus parabolam AD æquationis $x^2 = ay$. Deinde quomodo sit $xy = a(b - x)$, fiat ut $a : y :: y : x$. Quare sumpta EF (Fig. 17) tertia proportionali post AB, DE per omnia puncta F transeat curva gradus superioris. Postremo ducta AG = a, & clauso parallelogrammo ACHG, productisque ejus lateribus in M, N describatur hyperbola inter asymptota transiens per punctum C, quæ secabit curvam AF in puncto F. Ordina FE, erit AE secunda proportionalis quaesita. Si octava proportionalis simul cum secunda debeat = b, invenies æquationem $\frac{xy}{x} = b - x$, quæ est ad circulum diametri = b. Si vero velis nonam cum secunda = b, invenies $\frac{xy}{a} = b - x$, quæ est ad parabolam. Quapropter intersectio harum curvarum, & curvæ AF determinabit secundam quaesitam.

29. Quamquam in solutione superiorum problematum dedimus operam, ut æquatio ultimo prodians non contineat nisi duas indeterminatas, tamen methodus non deficeret, si tres pluresve contineret, licet non parum de sua elegancia perderet. Exemplum præbeamus in septima proportionali, quæ exprimitur per $\frac{xy}{a}$; igitur habebimus $xy = a \cdot b - x^2$; ergo $y : a :: b - x : x$. Descriptis ut antea curvis AD, AF ordinarum y, x, fiat ubique ut RP = y : AB = a :: CB = b - x : RS. Per omnia puncta S transeat curva MSC, quæ secabit AF in F; ex quo puncto demitte ordinatam FE, abscissa AE erit secunda proportionalis quaesita.

30. Problema duodecimum Circuli arcum datum in quinque partes secare. Problema hoc idem est ac septimum; sed ad præiens artificium indicandum præstat novam ejusdem solutionem adornare. Arcus secundus sit BH (Fig. 18), quem divide in quinque partes in punctis D, E, F, G. Ex puncto B duc circuli diametrum BCA, & ex A age chordas AD, AE, AF, AG, AH, quas produc quousque opus fuerit. Ex punctis D, E, F, G duc DM, EN, B b b 4 FP,

FP, GQ ita, ut sint respectively æquales chordis AD, AE, AF, AG; demum duc radium CD. Palam est, triangula omnia ACD, ADM, AEN, AFP, AGQ esse similia, quia omnia ex constructione isoscelia sunt, & habent angulos ad basim æquales. Præterea ajo, ME = AB, NF = AD, PG = AE, QH = AF. Ut hoc demonstretur, intellige ductas chordas æquales BD, DE, EF &c. Æqualia sunt quoad omnia triangula ADB, MDE, quia AD = MD, BD = ED, & angulus BAD = EAD; ergo AB = ME. Eodem modo triangula ADE, NFE habent AE = NE, DE = FE, & angulos in A, N æquales; ergo AD = NF. Similis demonstratio valet de aliis.

31. His præmissis venio ad analysim. Sit radius CA = a , AD = x , ultima chorda AH, quæ data est, = b . Similitudo triangulorum dat CA : AD :: AD : AM

$$a : x :: x : AM = \frac{x^2}{a} \quad \left| \begin{array}{l} \text{sed ME} = 2a \text{ ex demonstratis; ergo} \\ \text{AE} = \frac{x^2 - 2a^2}{a}. \text{ Item est} \end{array} \right.$$

$$AC : AD :: AE : AN \quad \left| \begin{array}{l} \text{sed NF} = AD; \text{ ergo} \\ \text{AF} = \frac{x \cdot x - 3aa}{a^2}. \end{array} \right.$$

Quoniam istæ formulæ ad tertiam dimensionem ascendunt, ut deprimantur, usurpanda est prima substitutio. Ea autem sit $xx - 3aa = ay$. Quare fiet AN

$$\frac{x \cdot y + a}{a}, \text{ \& AF} = \frac{xy}{a}. \text{ Producens analysim ex aliis triangulis similibus eruo}$$

$$AC : AD :: AF : AP \quad \left| \begin{array}{l} \text{\& dempta AE} = PG \text{ fit} \\ \text{AG} = \frac{x^2 y}{a^2} + \frac{2a^2 - x^2}{a}. \end{array} \right.$$

Ut hæ formulæ deprimantur, non est opus novam substitutionem advocare, sed sufficit pro xx ponere ejus valorem $ay + 3aa$; quo facto habebimus

$$AP = \frac{y^2 + 3ay}{a}, \text{ \& AG} = \frac{yy + 2ay - aa}{a}. \text{ Devenimus jam ad ultimum triangulum, quod præbet}$$

$$AC : AD :: AG : AQ \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ab hac demamus} \\ \text{QH} = AF = \frac{xy}{a}, \end{array} \right.$$

& habebimus AH = $\frac{x \cdot yy + ay - aa}{a^2}$. Quum hæc formula tertiam potestatem

includat, utamur secunda substitutione, nempe $yy + ay - aa = ax$; ergo AH = $\frac{x^2}{a} = b$, quæ ultima est æquatio pertinens ad hyperbolam inter asympota.

32. Analysim sequentem præbet constructionem. Ita describantur curvæ, quæ suppeditant duæ substitutiones, ut indeterminata y , quæ utrique communis est, sit earum abscessa. Parabola primæ substitutionis, cujus æquatio est,

$x^2 - 3aa = ay$, ita describitur. Sectis $AB = BC = CD = DE = a$, vertice A , (*Fig. 19*) parametro $= a$, axe AE describitur parabola AN . Erunt $DM = y$, $MN = x$. Alia parabola æquationis $yy + ay - aa = az$, hoc modo construitur. Divisa CD bifariam in F , ei perpendicularis agarur $FG = \frac{5a}{2}$, & vertice G , parametro $= a$, diametro GF , describitur parabola GH , quæ erit eadem cum superiore; sed diverso loco posita, erunt ut antea $DM = y$, $MP = z$ negativæ ad partem G , positivæ ad oppositam. Per duas hæc curvas tertia delineetur curva, cujus abscissæ $= x$, ordinatæ scilicet parabolæ AN , (*Fig. 20*) ordinatæ vero $= z$, ordinatæ alterius parabolæ GK . Curva hujusmodi progressum habebit. Facto initio abscissarum in A secæ $AB = BC = AD = AE = a$. Excita perpendicularem $AF = \frac{5a}{2}$. Curva discedens ex F secabit abscissas in G , & ultra excurrens converso itinere iterum secabit in K , deinde in infinitum progreditur. Huic ramo posito ad partes abscissarum positivarum respondet ramus alius similis, & æqualis situs ad plagam abscissarum negativarum. Descripta hæc curva nihil aliud restat, nisi ut hæc conjungatur cum curva ultimæ æquationis $xz = ab$. Quapropter inter asymptota AC , AV describantur hyperbolæ oppositæ KIV , MLN rectanguli ab . Iste in quinque punctis K , I , M , L , N secabunt curvam descriptam. Ex his demittantur normales, quæ determinabunt radices AO , AP , AQ , AR , AS . Ex his quæ inter positivas est omnium maxima ipsa est chorda, quæ quaeritur. Hæc solutio diversa est ab ea, quam tradidit Jacobus Riccatus. Methodus produci potest, ut in plures quam quinque partes arcus dividatur.

CAPUT DECIMUM TERTIUM.

De inventione curvarum ex datis proprietatibus linearum, quæ a pluribus sectionis punctis definiuntur.

1. Quotiescumque data est proprietas, quæ aut ad coordinatas x , y pertineat, aut ad easdem reduci possit, per methodos, quas hæcenus docuimus, possumus naturam curvæ determinare. Verum si proprietas data uni eisdemque lineæ curvam secanti conveniat, & versetur inter lineas desinentes in plura sectionum puncta, nova aperienda est methodus, qua naturam curvæ, aut potius curvarum investigemus. Hujus generis esset quaestio. Data linea AB (*Fig. 1*) invenire curvam ejus naturæ, ut perpendicularæs AM eam secantes in punctis M , $2M$ exhibeant vel summam $BM + B_2M$, vel rectangulum $BM \cdot B_2M$ constans. Idem dicendum si lineæ secantes non eliciant parallelæ, sed discederent a dato puncto B (*Fig. 2*).

2. Hoc notandum est sedulo, proprietatem convenientem secantibus BM , B_2M , talem esse debere, ut si pro BM ponatur B_2M , & simul B_2M pro B_2M , ea nullam prorsus mutationem patiatur. Ita accidit expositis proprietatibus, si reciprocentur secantes BM , B_2M , eadem remanet summa, idem rectangulum. Quod si quaeretur curva, in qua duplex BM simul cum B_2M esset constans, in-

eptum

eptum esset quæsitum, quia accepta BM pro B_2M & viceversa, eadem non proveniret quantitas. Idem dic si quærerem curvam, in qua $\frac{B_2M}{BM}$ esset constans. Hui-

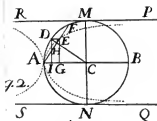
scæ regulæ ratio est, quia in curva proprietas singulis ejus punctis debet eodem modo convenire. Ita proprietas exhibitæ ab æquatione $aa - xx = yy$, communis est omnibus coordinatis, atque adeo omnibus punctis circuli. Quapropter si proprietas, quæ data est per secantes pertinet ad unam eandemque curvam, omnibus ejus punctis communis sit necesse est. Hoc autem non accideret, si præcepta reciprocatio fieri non posset, quia quæ æquatio habetur relate ad punctum M , eadem non valeret relate ad punctum $2M$. Hæc animadversio statuit limites, quibus quæstiones proponendæ debent contineri.

3. Notandum est deinde proprietatem involventem secantes BM , B_2M exprimi posse non minus per constantes, quam per quantitates variables quidem, sed quæ eadem prorsus sint respectu secantium BM , B_2M . Quare si istæ parallelæ ponantur, & desinentes in AB , (Fig. 1) sumpto quolibet puncto fixo A , proprietas dari poterit per AB abscissam communem duabus ordinatis BM , B_2M . Si vero secantes (Fig. 2) discedant a dato puncto B , sumpta qualibet BA positione data, proprietas dari poterit, aut per angulum ABM communem secantibus BM , B_2M , aut per quantitates ab hoc angulo dependentes, ut sunt sinus, cosinus, alique. His prænotatis agemus primum de secantibus parallelis, deinde de illis, quæ a dato puncto procedunt.

4. In primo casu si puncta sectionum duo sint, quis non videt, secantes BM , B_2M (Fig. 1) esse ordinatas duas, quibus eadem est abscissa AB : ergo valor ordinatæ $= y$ expressus per abscissam $= x$ duplex sit oportet, atque adeo y debet in æquatione curvæ dimensionem secundam tenere. Formetur itaque æquatio $yy - 2my + n = 0$, in qua m, n dari debent per x , & per constantes, prout proprietas exigit. Resolvatur æquatio, & inveniantur duo valores y , nempe $y = m + \sqrt{mm - n}$, $y = m - \sqrt{mm - n}$. Ex istis valoribus efforma æquationem, quam proprietas postulat, & per hanc determina aut m , aut n , & colloca in æquatione supposita, & habebis omnes curvas data proprietate gaudentes.

5. Sint primo determinandæ curvæ in quibus rectangulum BM, B_2M sit constans, aut datum per $AB = x$. Voca $= P$ quantitatem, quam rectangulum debet æquare. Duos valores inventos y simul multiplica, ut habeas $mm - mm + n = n = P$. Ergo si in æquatione substituas P , quicumque sit valor m habebis curvam propositæ proprietati satisfaciendam; nempe $yy - 2my + P = 0$. Hoc facilius deducere potuisses. Nam quum ultimus terminus æquationis n sit rectangulum ex duabus radicibus, si hoc supponatur $= P$, etiam $n = P$. Quare si P sit constans, rectangulum ex duabus ordinatis BM , B_2M constans erit, in qua suppositione si $m = a + bx$, æquatio erit ad hyperbolam, quæ referetur ad asymptota. Proprietatem hanc convenire hyperbolæ ordinatis in asymptotum definentibus supra demonstravimus. Verum eadem proprietates non hyperbolæ tantum, sed infinitis curvis convenit, quarum æquationes habentur, si pro m quælibet functio x ponatur. Maxime autem simplex esse videtur, si fiat $m = \frac{x^2}{a}$; oritur enim curva tertii gradus, cujus æquatio $xx = \frac{yy + P}{2y} a$.

6. Quod



72.



Fig. 3.

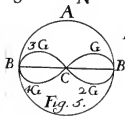


Fig. 5.

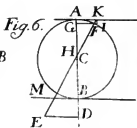


Fig. 6.

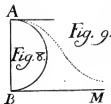


Fig. 8.

Fig. 9.

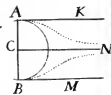


Fig. 11.

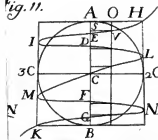
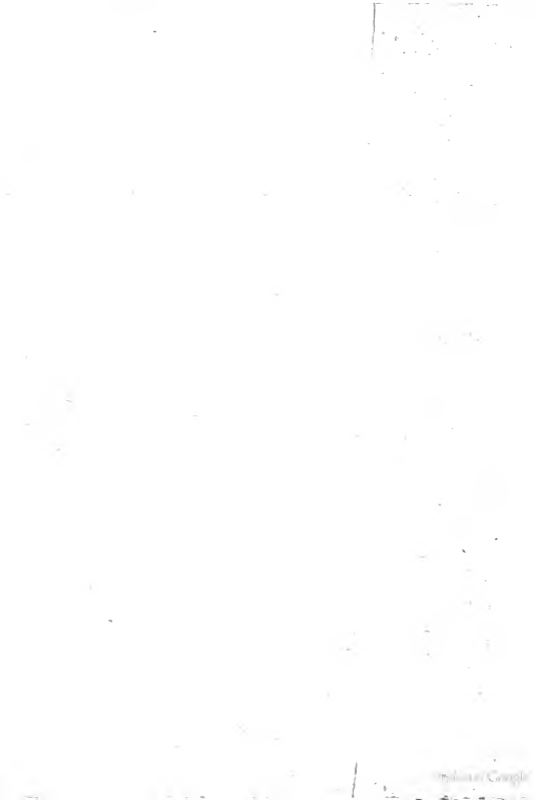
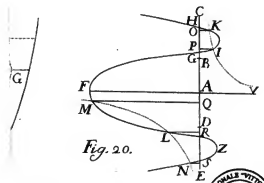
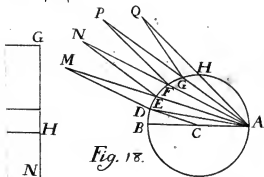
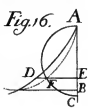
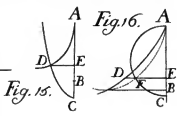
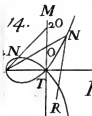


Fig. 12.







6. Quod si $P = a + bx + cx^2$; rectangulum ex duabus ordinatis BM, B₂M hanc quantitatem æquabit. Si in hac hypothefi fiat m aut constans, aut æqualis $f + gx$, æquatio nascens poterit spectare ad omnes sectiones conicas pro coefficientium diversitate; quod si $a + bx + cx^2$ possit resolvi in duos factores reales, linea abscissarum in duobus punctis curvam secabit. Quare rectangulum ex duabus ordinatis erit ad rectangulum ex duabus interceptis inter ordinatam & duo puncta sectionum abscissæ cum curva in ratione data. Proprietatem hanc convenire sectionibus conicis jam ostendimus. Nunc vero liquet, eam propriam esse infinitarum curvarum, quarum æquationes habebis, si m alio modo supponas datam per x . Sed alias proprietates spectemus.

7. Querantur curvæ, in quibus duarum ordinatarum summa BM + B₂M aut constans sit, aut data per communem abscissam AB. Hæc quoque questio facile resolvitur. Nam quum coefficientis secundi termini mutato signo æquationis assumptæ summx radicem æquale sit, debet $xm = BM + B_2M$. Quam summam pone $= P$. Verum hoc idem colligimus summatis radicibus inventis, quum earum summa sit $= 2m$. Quare curvarum quaritarum æquationes hac formula continentur $yy - Py + n = 0$ existente n quomodocumque data per x . Si P constans sit, & fiat $n = a + bx + cx^2$, æquatio erit ad unam ex sectionibus conicis, nempe ad ellipticam, si c sit positiva; ad hyperbolam, si c sit negativa; ad parabolam, si $c = 0$. Idem dicas si sit $P = f + gx$. Sed hæc proprietates communis est & infinitis aliis curvis, quarum maxime simplex est parabola secunda cubica,

quam obtines si $P = 2a, n = aa - \frac{x^2}{a}$. Nam æquatio fit $a.y - a = x^2$; quæ ita construitur. Sit A (Fig. 3) initium, AC linea abscissarum. Parallelam ordinatis pone AF = a , ductaque FG parallela AC, vertice F describe parabolam secundam cubicam, in qua cubi abscissarum FG sint æquales quadratis ordinatarum CG ductis in a . Ducta qualibet BM₂M summa BM + B₂M = $2a$. Quare in C ubi curva secat AE, erit CD = $2a$. Infra autem quoniam EN sit negativa, erit E₂N - EN = $2a$.

8. Queramus nunc curvas, in quibus $\frac{x}{BM} + \frac{x}{B_2M} = \frac{x}{P}$, quæ P (Fig. 1) data sit per x , & constantes. Adhibitis speciebus supra positis erit

$$\frac{1}{m + \sqrt{mm - n}} + \frac{1}{m - \sqrt{mm - n}} = \frac{1}{P}, \text{ sive redactis ad eandem denominationem fractionibus } \frac{2m}{n} = \frac{1}{P}; \text{ ergo } 2mP = n. \text{ Quare æquatio proveniet}$$

$y^2 - 2my + 2mP = 0$. Si sit $P = a$, & m ponatur $= x$, proveniet æquatio $yy - 2xy + 2ax = 0$, quæ est ad hyperbolam, atque hoc modo construitur.

Existente A (Fig. 4) initio, AB linea abscissarum sume AE = a , & duc parallelam ordinatis EC = a ; jungæ AC, quam producat in D, ut AC = CD; centro C, semidiametris CD, CE describe hyperbolam MD₂M; ducta ubicumque BM₂M erit ubique $\frac{x}{BM} + \frac{x}{B_2M} = \frac{x}{a}$. Quod si supponatur $P = b + cx + dx^2$, oritur æquatio $yy - 2my + 2mb + 2mcx + 2mdx^2 = 0$, quæ, si m sit constans, esse potest ad omnes sectiones conicas, pro diversitate co-

efficientium. Has autem proprietates habent sectiones conicæ communes cum curvis infinitis.

9. Investigandæ sint curvæ, in quibus $BM^2 + B_2M^2 = P$. Erit itaque

$$\frac{m + \sqrt{mm-n}}{2} + \frac{m - \sqrt{mm-n}}{2} = P, \text{ sive } 4m^2 - 2n = P, \text{ sive}$$

$$2m^2 - \frac{P}{2} = n; \text{ ergo æquatio proveniet } y^2 - 2my + 2m^2 - \frac{P}{2} = 0. \text{ Ponatur}$$

$P = 2aa$, & $m = \frac{ax}{f}$, ut fiat $yy - \frac{2axy}{f} + \frac{2a^2x^2}{f^2} = a^2$, quæ est ad ellip-

sim, atque hoc modo construitur. Accipe $AF = f$, $FD = a$, (Fig. 5) cui sit æqualis, & parallela AE , iunge AD , atque duabus semidiamentris conjugatis AD , AE describe ellipsum EDM . Ducta qualibet BM_2M erit semper $BM^2 + B_2M^2 = 2.AE^2$. Hinc pulcherrimam discimus proprietatem ellipsis. Sit qualibet ellipsis, cujus semidiamentri conjugatæ duæ AD , AE . Duc DF æquam, & parallelam AE , & iunge AF . Ex hac ducta qualibet BM_2M parallela AE erit semper $BM^2 + B_2M^2 = 2.AE^2$. Quare si AD , AE æquales sint, & angulorum rectum faciant, ellipsis mutatur in circulum, cui proprietatem hanc convenire cognoscimus. Si ponas $P = 2a + 2bx + 2cx^2$, & $m = f + gx$ omnes sectiones conicæ obtinentur, quibus proprietas hæc convenit. Infinitæ aliæ curvæ orientur, si speciei m alium tribus valorem.

10. Conditio sit, ut $\frac{1}{BM^2} + \frac{1}{B_2M^2} = \frac{1}{P}$; ergo

$$\frac{1}{\frac{m + \sqrt{m^2-n}}{2}} + \frac{1}{\frac{m - \sqrt{m^2-n}}{2}} = \frac{4m^2 - 2n}{nn} = \frac{1}{P}; \text{ igitur}$$

$2m = \pm \sqrt{\frac{n^2}{P} + 2n}$. Quapropter æquatio curvæ hæc erit

$y^2 \pm y \sqrt{\frac{n^2}{P} + 2n} + 2n + n = 0$. Æquatio hæc liberata ab irrationalitate continebitur elevatam ad gradum quartum. Verum ad obtinendam conditionem propositam, necessarium est curvæ duos ramos accipere, qui oriuntur sumptò signo superiori, vel duo qui resultant ex signo inferiori. Eliminato vero radicali provenit æquatio $y^4 + n^2 = \frac{n^2y^2}{P}$. Si P sit constans, & $= aa$, maximè simplex æquatio habetur posita $n = ax$, ex qua positione resultat quarti gradus æquatio $y^4 = x^2.y^2 - aa$. Hæc est constructio. In abscissis sume $AE = 2a$, (Fig. 6) parallelam ordinatis $AC = a$; sit CH parallela abscissis; abscinde AD

AD = $a\sqrt{2}$, claudet parallelogrammum AF. Curva HM asymptotica ad CH veniet in punctum F, in eoque tanget EF, tum per ramum F2M. in infinitum recedet. Quatuor rami similes, & æquales in quatuor angulis existient;

Si agatur BM2M, erit $\frac{1}{BM^2} + \frac{1}{B2M^2} = \frac{2}{EF^2} = \frac{1}{a^2}$.

11. Demum inquiratur curva, in qua $BM^2 + B2M^2 = P$ seu

$m + \sqrt{m^2 - n} + m - \sqrt{mm - n} = 8m^3 - 6mn = P$; ergo
 $n = \frac{4}{3}m^2 - \frac{P}{6m}$. Curvæ itaque requisitæ hac æquatione continentur

$y^2 - 2my + \frac{4}{3}m^2 - \frac{P}{6m} = 0$. Si debeat esse $\frac{P}{6} = a + bx + cx^2$, & m po-

natur constans, æquatio $yy - 2my + \frac{4}{3}mm - \frac{a - bx - cx^2}{m} = 0$ ad sectiones conicas spectabit. Si P debeat esse constans, & m fiat $= x$, simplicissima orietur curva tertii gradus hac proprietate donata, nempe

$$x.y^2 - 2xy + \frac{4}{3}x^2 = \frac{P}{6}.$$

12. Sufficiant exempla hæc ad methodum Indicandam, si de una proprietate tantum agatur. Verum si curva quærat, in qua duæ ex prædictis proprietatibus locum habeant, tunc non plures curvæ, sed ad limum una problemati satisfaciæ. Dixi ad summum; nam si utraq; proprietate præbere debeat quantitatem constantem, æquatio proveniet determinata, & non ad curvam, sed ad puncta pertinebit. Verum si aut utraq; aut alterutra proprietate data sit per x , reperietur curva determinata, cui utraq; convenit. Exemplum unum satis fit. Inquiratur curva, in qua $\frac{1}{BM} + \frac{1}{B2M} = \frac{1}{Q}$, &

$\frac{1}{BM^2} + \frac{1}{B2M^2} = \frac{1}{P}$. Ex dictis paulo ante prima proprietate postulat, ut $2mQ = n$, secunda ut $2m = \sqrt{\frac{nn}{P} + 2n}$; ergo ejecta m ; erit

$$\frac{n}{Q} = \sqrt{\frac{nn}{P} + 2n}, \text{ seu } \frac{n^2}{Q^2} = \frac{n^2}{P} + 2n, \text{ ex qua } n = \frac{2PQ^2}{P - Q^2}; \text{ ergo}$$

$2m = \frac{2PQ}{P - Q^2}$; igitur æquatio curvæ est $y^2 - \frac{2PQy}{P - Q^2} + \frac{2PQ^2}{P - Q^2} = 0$, quæ, datis P, Q per x , determinata est. Si $Q = a$ sit constans, & $P = ax$, æquatio erit

$yy - \frac{2a^2xy}{ax - aa} + \frac{2a^3x}{ax - aa} = 0$ five $y^2x - ay^2 - 2a^2xy + 2a^3x = 0$, quæ est æquatio tertii gradus.

12. A duabus ordinatis progredior ad tres. Initio autem monere opus est, duas ex tribus ordinatis imaginarias esse posse, ita tamen ut si simul conjungantur, prout

prout proprietates postulat, quantitatem exhibeant realem. Hoc autem contingere in duabus non potest, quia aut ambæ reales sunt, & curvam exhibent, aut ambæ imaginariæ, ac proinde curva imaginaria. Quare quum de tribus ordinatis agitur, si curvam invenias, pronunciare nequis, omnes reales esse, sed ex aliis fontibus inquirendum est, utrum curva tres ordinatas reales habeat, an duas imaginarias, & unam realem. In hujusmodi quæstionibus assumenda est æquatio

tertii gradus $y^3 - 3ly^2 + 3my - n = 0$. Si summa trium ordinarum data sit aut absolute, aut per x , & sit $= P$, huic faciendæ est æqualis $3l$. Si producta omnia ex binis ordinatis debeat $= P$, fiat $3m = P$. Demum si productum ex tribus debeat esse $= P$, fiat $n = P$. Reliqui coefficientes determinati quomodocumque per x , præbent curvam proposita proprietate gaudentem.

13. Proprietates istæ facili negotio absolvuntur. Verum si data esset proprietates ordinarum, quam exprimere per l, m, n nesciamus, oporteret, resolvere æquationem tertii gradus, ut tres ordinatæ per tres radices exprimerentur. His enim inventis per analysim fiet determinatio necessaria ad inveniendas curvas. Ad resolutionem faciendam primum eiciendus terminus secundus facta $y = z + l$,

& proveniet æquatio $z^3 - 3l^2z - 3lz + 3ml - n = 0$, vocatisque $l^2 - m = A$,

$2l^3 - 3ml + n = B$ fiet $z^3 - 3Az - B = 0$, cujus resolutio, vocatis

$$\sqrt[3]{\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\frac{BB}{4} - A^3} = p, \quad \sqrt[3]{\frac{B}{2}} - \sqrt[3]{\frac{BB}{4} - A^3} = q, \text{ dabit tres valores } z$$

$$p + q, p \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + q \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}, p \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + q \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2};$$

quibus si addamus l , habebimus tres valores y , nempe $p + q + l$,

$$p \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + q \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + l, p \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + q \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + l.$$

His adhibitis ex data proprietate curvas determinabis.

14. Quamquam analysi hæc difficilior evadat, tamen, ad exemplum, inquiramus curvas, in quibus quadrata trium ordinarum simul sumpta æquent P datum vel absolute, vel per x . Radices inventæ ad quadrata eleventur, ut hæc habeamus ordinarum quadrata

$$pp + 2pq + qq + 2l \cdot \frac{p+q+l^2}{2}$$

$$pp \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} + 2pq + qq \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} - l \cdot \frac{p+q+l}{2} + l \cdot \frac{p\sqrt{-3} - q\sqrt{-3} + ll}{2} + ll$$

$$pp \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} + 2pq + qq \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} - l \cdot \frac{p+q+l}{2} - l \cdot \frac{-p\sqrt{-3} + q\sqrt{-3} + ll}{2} + ll;$$

quorum summa $= 6pq + 3ll$; atque $pq = \sqrt[3]{\frac{BB}{4} - \frac{BB}{4} + A^3} = A - ll - m$; ergo summa quadratorum $= 9ll - 6m$; quod alia etiam methodo facilius invenire potuissim; igitur $9ll - 6m = P$, seu $\frac{3}{2}ll - \frac{1}{6} \cdot P = m$; igitur pro-

veniet $y^3 - 3ly^2 + \frac{9l^2}{2} - \frac{P}{3} \cdot y - n = 0$, in qua quum duz l, n possint infinitis modis determinari per x , infinities infinitæ adfunt curvæ problemati satisfaciennes.

15. Si curva duabus ex nostris proprietatibus prædita sit oporteat, tum ex tribus l, m, n duz determinationem accipiant, reliqua indeterminata remanebit; quare infinitæ curvæ supererunt proprietates duas continentes. Si tres proprietates datæ requirantur, omnes coefficientes l, m, n definiuntur, quare curva una dumtaxat obtinebitur. Excipe tamen casum, in quo proprietates non per x datæ sint, sed omnes absolute. Nam tunc æquatio determinata nascetur, quæ non ad curvam erit, sed ad puncta ad summum tria.

16. Quæ dicta sunt hæctenus applica quatuor, quinque, pluribusque ordinatis. Nam si harum summa, vel summa rektangulorum ex binis, aut ternis, aut quaternis data esse debeat, facillimam problema accipit solutionem; immo solvetur quotiescumque proprietas per has summas exprimi possit. Verum si nesciamus, quo pacto per has exprimat, quum altiorum æquationum resolutione non sit in potestate, problemata proposita vires cognitæ analytice superabunt. Sed de his satis.

17. Ex proprietates inspiciendæ sunt, quæ conveniunt secantibus non parallelis, sed ab uno eodemque puncto descendentes. Quamobrem opus est spectare curvas alio prorsus modo, ac fecimus hæctenus, diversaque æquatione earum naturam exprimere. Sit curva DME (Fig. 7) & punctum quodlibet B, ex quo ducatur ad curvam rectæ BM. Ex eodem B ducatur quælibet positione data BC, oportet, naturam curvæ exprimere per æquationem inter $BM = z$, & quantitatem dependentem ab angulo $CBM = \mu$, ut sunt $Sc. \mu, Cc. \mu, Tc. \mu$ &c. Primum modus tradendus est, quo, ducta ordinata orthogonalis MN, vocatisque $BN = x, MN = y$, ex æquatione inter z, μ inveniri possit æquatio inter x, y & viceversa. Adverte fore $z = \sqrt{xx + yy}$, $\frac{Sc. \mu}{r} = \frac{y}{\sqrt{xx + yy}}$, $\frac{Cc. \mu}{r} = \frac{x}{\sqrt{xx + yy}}$, $\frac{Sc. \mu}{r} = \frac{Tc. \mu}{x} = \frac{y}{x}$. Quare pro his quantitibus dependentibus ab angulo μ , & z , substitue illas, quæ datæ sunt per x, y , & ab æquatione inter z, μ transibis ad illam, quæ intercedit inter x, y . Tum substituto pro $\sqrt{xx + yy}$ ejus valore z invenies, $\frac{z \cdot Sc. \mu}{r} = y$, $\frac{z \cdot Cc. \mu}{r} = x$. Hos valores pone in æquatione inter x, y , & invenies æquationem inter z , & $Sc. \mu$, ac $Cc. \mu$.

17. Ad exemplum sit datus circulus DME, cujus centrum C, & radius $CD = b$. Accipiat quodlibet punctum B, & agatur per centrum recta BDC. Vocetur $BD = a$, oportet invenire æquationem inter $BM = z$, & quantitates dependentes ab angulo $B = \mu$. Vocatis $BN = x, MN = y$, erit $DN = x - a$; ergo æquatio circuli proveniet $2b + 2a \cdot x - xx - aa - 2ab = yy$. Pro x scribe $\frac{z \cdot Cc. \mu}{r}$, & pro y pone $\frac{z \cdot Sc. \mu}{r}$, & invenies

$$\frac{2b + 2a \cdot z \cdot Cc. \mu}{r} - \frac{z^2 \cdot Cc. \mu^2}{rr} - aa - 2ab = z^2 \cdot \frac{Sc. \mu^2}{rr}, \text{ seu}$$

Ccc 2

 $\frac{2b + 2a \cdot z}{r}$

$$\frac{2b+2a}{r} \cdot \frac{z \cdot Cc \cdot \mu}{r} - aa - 2ab = z^2 \cdot \frac{Sc \cdot \mu^2 + Cc \cdot \mu^2}{rr} = z^2, \text{ seu}$$

$$z^2 - \frac{2z \cdot Cc \cdot \mu}{r} \cdot \frac{b+a+aa+2ab}{r} = 0, \text{ quæ est æquatio circuli requisita.}$$

18. Si proprietates exigat, ut secantes sint duæ, accipienda est æquatio secundi gradus $z^2 - 2mz + n = 0$, in qua m, n datæ sint per angulum B, qui communis est duabus secantibus BM, B α M; tum alterutra determinanda ex data proprietate, altera indeterminata remanente, ex cujus diversa determinatione diversæ oriuntur curvæ problemati satisfaciens. Primum exemplum inquirat curvam, cujus secantes duæ ab eodem puncto discedentes præbeant rectangulum absolute constans. Quam hoc rectangulum = n ; fiat $n = aa$; ergo

$$z^2 - 2mz + aa = 0. \text{ Si fiat } m = \frac{b \cdot Cc \cdot \mu}{r}, \text{ æquatio erit } z^2 - 2bz \cdot \frac{Cc \cdot \mu}{r} + aa = 0,$$

quæ, ut colligere potes ex numero superiore, est ad circulum. Verum hoc deducamus reducendo æquationem inventam ad aliam, quæ est inter x, y . Pone in

$$\text{æquatione } \sqrt{xx+yy} \text{ pro } z, \text{ \& } \frac{x}{\sqrt{xx+yy}} \text{ pro } \frac{Cc \cdot \mu}{r}, \text{ \& h. hebis}$$

$$xx+yy - 2bx+aa = 0, \text{ quæ in hunc modum constructur. Abscinde } BC = b, \text{ \& } CD = \sqrt{bb-aa}, \text{ atque hoc radio, \& centro C circulum describe DME, erit ubique } BM. B\alpha M = aa. \text{ Circulum quoque invenies si ponas } m = \frac{b \cdot Sc \cdot \mu}{r}.$$

$$19. \text{ Quod si debeat } n \text{ esse } = \frac{-bb \cdot rr}{Sc \cdot \mu^2}, \text{ quæ quantitas negativa indicat}$$

puncta sectionum posita esse ad diversas partes puncti, a quo procedunt secantes, quarum una erit proinde positiva, altera negativa, atque adeo earum

$$\text{rectangulum negativum, proveniet æquatio } z^2 - 2mz - \frac{b^2 r^2}{Sc \cdot \mu^2} = 0. \text{ Si po}$$

neres $m = a$, substitutis valoribus proveniet æquatio $xx+yy - 2a\sqrt{xx+yy} - bb$.

$\frac{xy}{xx+yy} = 0$, quæ expurgata, & liberata a radicalibus, fiet æquatio sexti gradus. Verum si facias $m = a \cdot \frac{r \cdot Cc \cdot \mu}{Sc \cdot \mu^2}$, substitutis opportunis valoribus prove-

$$\text{niet æquatio } xx+yy - \frac{2arx \cdot \sqrt{xx+yy}}{r^2 y} - \frac{b^2 x^2 + y^2}{y^2} = 0, \text{ five}$$

$$y^2 - 2ax - bb = 0, \text{ seu } yy = 2a \cdot x + \frac{bb}{2a}, \text{ quæ est ad parabolam, atque hoc}$$

modo constructur. Describatur parabola A M, (Fig. 8) cujus parameter = $2a$. In ejus axe sume AB = $\frac{bb}{2a}$. Si per punctum B ducas quamlibet MB α M, erit rectangulum BM. B α M ad quad. bb in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli

guli MBC. Si fuerit $b = a$, punctum B erit parabolæ focus.

20. Si duarum secantium summa debeat $= 2a$, oriatur æquatio $zx - 2az + n = 0$. Quomocumque determinetur n per angulum μ , curva huic æquationi respondens habebit duarum secantium summam constantem. Si $n = \frac{ab r}{Cc \cdot \mu}$, substitutis

valoribus, inter x, y oriatur æquatio $xx + yy - 2a\sqrt{xx + yy} + \frac{ab\sqrt{xx + yy}}{x} = 0$,

quæ in hanc transit $x^4 + x^3y^2 = a^2 \cdot 2x - b^2$, quæ est æquatio quarti gradus.

21. Si non summa, aut rectangulum secantium, sed alia functio daretur, hæc, ut antea docui, inveniatur expressa per m, n , atque ex hisce speciebus una per alteram determinetur, & in æquatione substituat. Ita æquationem invenientes continentem curvas omnes proposita proprietate gaudentes. Ad exemplum, si quadrata secantium debeant $= P$ datam aut absolute, aut per quantitates anguli μ ; inveniemus $n = 2m^2 - \frac{P}{2}$; unde æquatio $zx - 2mz + 2m^2 - \frac{P}{2} = 0$. Si

P , & m ponatur constants, æquatio, quæ, eliminata z , ascendit ad quartum gradum, erit ad duos circulos. Casum hunc omittendum non censui, ut sit in exemplum cautionis, qua secantes duæ accipiendæ sunt, quum curva ordinis superioris, aut coalescat ex curvis ordinis inferioris, aut secus, secatur in pluribus quam in duobus punctis. Disponatur æquatio in hunc modum $zx - 2mz + mm = \frac{P}{2} - mm$.

Extrahatur radix quadrata $z - m = \pm \sqrt{\frac{P}{2} - mm}$. Si $\frac{P}{2} = mm$, habebimus $z = \sqrt{xx + yy} = m$, quæ est ad circulum, cujus radius $= m$, dum a centro discedunt z . Quod apprime evidens est; nam utraque secans $= m$; ergo summa quadratorum $= 2mm = P$. Verum si $\frac{P}{2} > mm$, ut si $\frac{P}{2} = 5mm$ fieret

$z = \sqrt{xx + yy} = m \pm 2m$; quæ est ad duos circulos, quorum alter habet radium $= 3m$, alter radium $= -m$. Describantur itaque circuli duo, nempe FM, (Fig. 9) cujus radius BF $= 3m$, & G₂M, cujus radius BG $= m$. Si agatur quælibet secans BM transfrens per punctum B, secat duos circulos in punctis M₁, 2 M, 3 M, 4 M. Quænam ex quatuor secantibus illæ duæ sunt, quarum quadratorum summa $= 10mm$, ut conditio postulat? Si accipias secantes definitas in eisdem circuli peripheriam, proprietatam minime invenies. Nam

$BM^2 + B_4M^2 = 18mm$, & $B_2M^2 + B_1M^2 = 2mm$. Ergo accipiendæ sunt secantes BM, B₂M, quæ definiunt in circumferentias duorum circularum. Reapse $BM^2 + B_2M^2 = 10mm$.

22. Ad alterum exemplum pono $P = 4aa$, & $m = \frac{a \cdot Sc \cdot \mu}{r}$, ut substitutis

his valoribus, æquatio fiat $zx - \frac{2az \cdot Sc \cdot \mu}{r} + \frac{2aa \cdot Sc \cdot \mu^2}{r^2} - 2aa = 0$, sive

$zx - \frac{2az \cdot Sc \cdot \mu}{r} - \frac{2aa \cdot Cc \cdot \mu^2}{rr} = 0$. Nunc transeo ad æquationem datam per

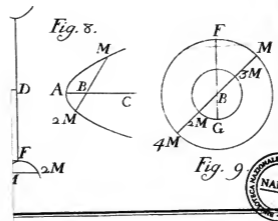
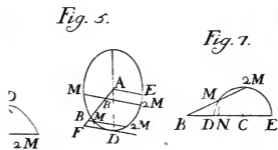
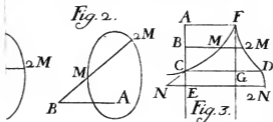
per x, y , & invenio $xx + yy - 2ay - \frac{2axx}{x^2 + y^2} = 0$ five

$\frac{x^2 + y^2 - 2ay}{x^2 + y^2} \cdot x^2 + y^2 - 2axx = 0$. Quæ est ad curvam quarti gradus præditam conditione, ut duarum secantium quadrata æquent $4aa$.

23. Quæ hætenus dicta sunt, de duabus secantibus ostendunt, quomodo solvenda sunt quæstiones pertinentes ad tres, quatuor, pluresque secantes, quoties proprietas proposita exprimitur per coefficientes terminorum æquationis, quæ assumitur. Hujus autem generis problemata omittenda non erant, quia peculiarem methodum ad sui solutionem exposcunt.

FINIS TOMI PRIMI.

Vidit



Vidit D. Johannes Maria Vidari Clericus Regularis Sancti Pauli, & in Ecclesia Metropolitana Bononia Panisentiarius pro Eminentissimo, & Reverendissimo Domino D. Vincentio Cardinali Maluetio Archiepiscopo Bononia, & S. R. I. Principe.

Die 26. Martii 1763.

A. R. P. Carolus Maria Offredi Ord. Theatinorum Pub. in Univ. Bonon. Professor, & S. Off. Revisor ordinarius videat pro S. O. & referat.

F. Seraphinus Maria Maccarinelli S. O. Bonon. Inq. Coadiutor.

30. Martii 1763.

Egregium opus inscriptum = *Institutiones Analyticae collectae a Vincentio Riccato Soc. Jesu, & Hieronymo Saladino Monacho Caelestino, Tomus Primus* = de mandato Reverendissimi Patris Seraphini Mariae Maccarinelli S. O. Bononiae Inquisitoris Coadiutoris arreante perlegi, nihilque in eo occurrit Fidei, aut bonis moribus contrarium: quapropter dignum cenfeo, ut publica luce donetur. In quorum fidem &c.

Ex Aedibus S. Bartholomei Apost. Clericorum Regularium Bononiae tertio Kal. Aprilis 1763.

D. Carolus Maria Offredi C. R. in Bononiensi Archigymn. Pub. S. T. Lector, & S. O. Revisor Ord.

Die 31. Martii 1763.

Stante suprascripta attestatione.

INPRIMATUR

F. Seraphinus Maria Maccarinelli S. O. Bononia Inquisit. Coadiutor.

AOI 1462446

